ГЛАВА 13

Векторные поля

В трех предыдущих главах подробно рассматривались скалярные поля; при этом физическое явление в каждой точке пространства описывалось значением только одной числовой величины. Конечно, в большинстве случаев эта величина была вектором (например, напряженность электрического поля или скорость жидкости). Однако положение было таково, что этот вектор можно было непосредственно получить как градиент скалярного поля. Обычно подобное упрощение достигалось за счет значительной идеализации задачи; например, приходилось считать электрические заряды неподвижными, пренебрегать вязкостью текущей жидкости и т. д. Но сравнительное удобство применения скалярных полей настолько велико, что ими пользуются всегда, когда только возможно.

Естественно, что вычисление векторного поля, которое нельзя выразить как градиент некоторого скаляра, является более трудоемкой задачей, чем вычисление скалярного поля, поскольку в каждой точке пространства вместо одной числовой величины надо вычислить три. Эти три величины можно определить различным образом в зависимости от выбранного способа задания вектора. Конечно, наиболее очевидным способом является задание в каждой точке декартовых составляющих вектора; в этом случае приходится определять три скалярных поля, удовлетворяющих граничным условиям. Другим способом является задание компонент векторного поля вдоль направлений координатных линий криволинейной системы координат, соответствующей изучаемой задаче. Это также сводит задачу к вычислению трех скалярных полей, величин этих трех компонент.

Однако обычно более согласованной с физикой явления бывает процедура построения векторного поля по трем скалярным полям при помощи более общих векторных операций. Как мы видели в гл. 1 [см. формулу (1.5.15)], любое векторное поле можно представить в виде суммы градиента скалярного потенциала и ротора векторного потенциала. Поэтому одной из скалярных величин, определяющих поле, может быть скалярный потенциал; две других величины должны единственным образом определить векторный потенциал. Для определения векторного потенциала в каждой точке достаточно задать лишь две величины, а не три, так как дополнительное условие равенства нулю дивергенции векторного потенциала сокращает до двух число независимых величин, необходимых для полного определения векторного потенциала.

Преимущества последнего метода будут ясны при рассмотрении способов удовлетворения граничным условиям для векторных полей. «Основными» граничными условиями для скалярных полей являются однородные условия Дирихле (равенство нулю поля на границе области) или однородные условия Неймана (равенство нулю нормальной составляющей градиента поля на границе области). В векторном случае нужно каким-либо образом задать на границе области значения всех трех основных скалярных функций, указанных в предыдущем абзаце, или их нормальных производных. При неудачном выборе скалярных функций, задающих векторное поле, задача составления граничных условий становится исключительно сложной; при удачном выборе эта задача оказывается сравнительно простой.

В гл. 2 и 3 изучены различные векторные поля, которые нельзя выразить через градиент одной скалярной функции (например, электромагнитное поле, скорость вязкой жидкости или смещение упругого тела). Рассмотрение этих полей показывает, что «естественные» граничные условия заключаются в задании значений нормальных или тангенциальных компонент (или их производных) векторного поля на границе области. Если F_n и $\mathbf{F}_t$ — соответствующие компоненты, то одним из возможных граничных условий является $F_n=0$, другим $\mathbf{F}_t=0$ и т. д. Конечно, $\mathbf{F}_t$ является двумерным вектором, получающимся проектированием вектора $\mathbf{F}$ на граничную поверхность; в случае неоднородного граничного условия необходимо задать и величину и направление этой проекции. Если $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к граничной поверхности, то тангенциальная проекция содержится в $\mathbf{n}\times\mathbf{F}$, так что граничное условие Дирихле заключается в задании скалярной величины $F_n=\mathbf{n}\cdot\mathbf{F}$ и двумерного вектора $\mathbf{n}\times\mathbf{F}$.

В других случаях физически интересным может быть ротор векторного потенциала $\mathbf{F}$; в этих случаях мы имеем обобщение граничного условия Неймана, заключающееся в задании величин $\mathbf{n}\cdot(\operatorname{rot}\mathbf{F})$ и $\mathbf{n}\times(\operatorname{rot}\mathbf{F})$.

Чтобы показать, как важно правильно выбрать три скалярные функции, задающие векторное поле, рассмотрим удовлетворение граничных условий на поверхности сферы. Если в качестве скалярных функций выбрать декартовы компоненты вектора F_x, F_y, F_z, то уравнения для этих функций будут весьма схожи с уравнениями для обычных скалярных полей. Например, если вектор $\mathbf{F}$ удовлетворяет векторному уравнению Гельмгольца $\nabla^2\mathbf{F}+k^2\mathbf{F}=0$, то уравнения для всех трех декартовых компонент вектора $\mathbf{F}$ будут скалярными уравнениями Гельмгольца, методы решения которых были изучены в гл. 11. Однако подчинение найденных решений граничным условиям будет затруднено, так как вектор выражен декартовыми компонентами, которые сложным образом связаны со сферической граничной поверхностью. Если даже найти F_x, F_y, F_z как решения уравнения Гельмгольца в сферической системе координат r, ϑ, φ, то для удовлетворения, скажем, условия, требующего, чтобы вектор $\mathbf{F}$ был касателен к поверхности сферы во всех ее точках, придется составить выражения, в которых все три полученных решения «переплетаются» сложным образом. Эту задачу в принципе можно разрешить, но при этом мы встретимся с трудностями того же порядка, что и рассмотренные в начале гл. 5, которые привели нас к задаче отыскания решения скалярного уравнения, разделяющегося в системе координат, соответствующей границе области. Таким образом, мы приходим к необходимости выражения компонент нашего векторного поля в виде скалярных полей, достаточно просто связанных с граничной поверхностью.

Решение, которое сразу приходит на ум, заключается в том, чтобы выразить наш вектор через его компоненты в системе координат, соответствующей границе. В рассматриваемом примере естественно выбрать за три скалярные функции, через которые выражается наш вектор, F_r, F_ϑ, F_φ — величины компонент вектора в сферической системе координат. Но здесь мы сталкиваемся с другой трудностью, которую легко усмотреть, обращаясь к выражению $\nabla^2\mathbf{F}$ через F_r, F_ϑ, F_φ, данному в конце гл. 1. Мы видим, что соответствующие векторному уравнению Гельмгольца скалярные уравнения не распадаются на три уравнения, содержащие каждое соответственно только F_r, F_ϑ и F_φ. Приходится иметь дело с системой трех однородных уравнений, каждое из которых содержит *все три функции*. Разрешить их не невозможно; однако в общем случае это сопряжено с решением дифференциального уравнения шестого порядка, чего конечно, нужно постараться избежать. Это затруднение возникает для всех криволинейных координатных систем. Если даже в уравнении скалярного поля в данной системе координат переменные разделяются, то в уравнениях для соответствующих компонент вектора **F** переменные могут уже не разделяться, и даже если они разделяются и в этих уравнениях, то компоненты так «перемешаны», что каждая входит во все три уравнения.

Однако не нужно слепо подходить к задаче, не пользуясь наводящими соображениями, подсказываемыми ее физическими аналогиями. Во всех случаях, рассмотренных в гл. 2, мы имели веские основания для разделения векторного поля на две части: одна получается как градиент скалярного потенциала, другая — как ротор векторного потенциала. Первое из этих полей обычно называется *продольной* компонентой, поскольку градиент определяет направление наибыстрейшего изменения скалярного потенциала. (Например, градиент потенциала указывает направление распространения плоской волны.) Второе называется *поперечной* (или соленоидальной) компонентой, поскольку направление ротора вектора обычно является поперечным по отношению к направлению его наибыстрейшего изменения. (Например, оно перпендикулярно направлению распространения плоской волны.) Во многих случаях эти компоненты несколько различаются в своем поведении; скорость поперечных волн в упругой среде, например, отличается от скорости продольных. Но и в других случаях, если даже обе компоненты удовлетворяют одному и тому же уравнению (как в случае электромагнитного поля), нет препятствий для такого разделения.

Разделение на продольную и поперечную компоненты $\mathbf{F} = \mathbf{F}_l + \mathbf{F}_t$ имеет ряд преимуществ. Во-первых, продольная компонента, как было отмечено, является градиентом скалярного поля, и следовательно, для ее нахождения можно пользоваться методами трех предыдущих глав. Например, известно, как получить решение методом разделения переменных и удовлетворить граничным условиям для скалярного потенциала. Поэтому наше внимание в этой главе будет сосредоточено на поперечной компоненте, получающейся в виде ротора векторного потенциала. Эта компонента всегда может быть получена из пары скалярных полей. Обычно векторное поле определяется через три скалярных величины, но требование соленоидальности, т. е. равенства нулю дивергенции поля, накладывает одно линейное соотношение на эти три скалярных функции, которое сводит число независимых скаляров к двум.

В первом параграфе этой главы будет показано, как разделение векторного поля на продольную и поперечную части дает возможность упростить способы удовлетворения граничным условиям. Будут исследованы ограничения, накладываемые на различные координатные системы, при которых поперечное решение связано с координатными поверхностями так же, как и разделяющийся скалярный потенциал. (Другими словами, будет обобщено понятие *разделимости* для того, чтобы включить в него поперечные векторные поля и их уравнения.) Затем будет дано резюме результатов 6 и 7 глав для того, чтобы рассмотреть основные свойства поперечных векторных собственных функций и векторных функций Грина, а также их использование при удовлетворении граничным условиям. В § 13.2 и 13.3 будут разобраны решения векторных уравнений Лапласа, Гельмгольца и волнового уравнения для различных координатных систем и граничных условий.

13. 1. Векторные граничные условия, собственные функции и функции Грина

Нашей первой задачей в этом параграфе будет проверка некоторых утверждений, высказанных во введении. Уравнением, на котором мы проиллюстрируем наши результаты, будет векторное уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2\mathbf{F}+k^2\mathbf{F}=\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{F})-\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F})+k^2\mathbf{F}=0. \tag{13.1.1}$$

Это уравнение при $k=0$ переходит в векторное уравнение Лапласа, а решения векторного волнового уравнения получаются из решений уравнения (13.1.1) применением преобразования Лапласа, как это показано в § 11.1. Соответствующее неоднородное уравнение получим, добавляя слагаемые в правой части (13.1.1).

Как было отмечено в § 1.5 [см. уравнение (1.5.15)], векторное решение $\mathbf{F}$ всегда можно разделить на продольную и поперечную части:

$$\begin{gathered}\mathbf{F}=\mathbf{F}_l+\mathbf{F}_t,\quad \mathbf{F}_l=\operatorname{grad}\varphi,\quad \mathbf{F}_t=\operatorname{rot}\mathbf{A},\\ \operatorname{rot}\mathbf{F}_l=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{F}_t=0,\end{gathered} \tag{13.1.2}$$

где φ — *скалярный потенциал и* $\mathbf{A}$ — *векторный потенциал*. Продольная часть (или, скорее, соответствующий скалярный потенциал) была рассмотрена в предыдущих главах, и нет необходимости в подробном ее рассмотрении; такое рассмотрение будет производиться, лишь если это потребуется для полноты изложения.

Векторный потенциал $\mathbf{A}$ также имеет продольную и поперечную части, но его продольная часть не имеет физического смысла, так как при вычислении $\operatorname{rot}\mathbf{A}$ для получения вектора $\mathbf{F}$ продольная часть дает нуль. Поэтому *мы обычно принимаем, что дивергенция векторного потенциала* $\mathbf{A}$ *равна нулю*. Будет сделано лишь несколько исключений, в частности, в случае векторного уравнения Лапласа.

Высказанное утверждение требует дополнительных пояснений в случае электромагнитного поля, так как оно связано с выбором калибровки потенциалов электромагнитного поля, не являющейся релятивистски инвариантной, как это было в т. I на стр. 206. Уравнения для определенных такой калибровкой электромагнитных потенциалов имеют вид

$$\begin{gathered}\nabla^2\varphi=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon},\\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{A})+\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{J}-\frac{\varepsilon\mu}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t},\\ \mathbf{B}=\operatorname{rot}\mathbf{A},\quad \mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.\end{gathered} \tag{13.1.3}$$

В некоторых случаях рекомендуется к выбранному таким образом векторному потенциалу добавить произвольный градиент, подбирая его так, чтобы $\operatorname{div}\mathbf{A}$ была равна некоторой произвольно заданной функции U, а не нулю. Тогда уравнениями для преобразованных потенциалов $\mathbf{A}_u$ и φ_u будут

$$\begin{gathered}\nabla^2\varphi_u=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}-\frac{1}{c\varepsilon}\frac{\partial U}{\partial t},\\ \nabla^2\mathbf{A}_u-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}_u}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{J}+\operatorname{grad}U+\frac{\varepsilon\mu}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi_u}{\partial t}.\end{gathered}$$

При этом, для того чтобы электрическое и магнитное поля не изменились при данном преобразовании потенциалов, необходимо, чтобы

$$\mathbf{A}_u=\mathbf{A}-\operatorname{grad}\chi,\quad \varphi_u=\varphi+\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t},\quad \text{где}\quad \nabla^2\chi=-U.$$

В частности, если мы хотим так выбрать потенциалы $\mathbf{A}$ и φ, чтобы они являлись компонентами четырехмерного вектора, то надо положить $\operatorname{div}\mathbf{A} = -(\varepsilon\mu/c)(\partial\varphi/\partial t)$, т. е. $\mathbf{A}_r = \mathbf{A} - \operatorname{grad}\chi_r$; $\varphi_r = \varphi + (1/c)(\partial\chi_r/\partial t)$, где $\nabla^2\chi_r = (\varepsilon\mu/c)(\partial\varphi_r/\partial t)$, а $\mathbf{A}_r$ и φ_r должны удовлетворять уравнениям (2.5.15). Поэтому можно вычислить $\mathbf{A}$ и φ из уравнений (13.1.3), а затем перейти при помощи указанного выше преобразования к новой системе потенциалов. Другая система потенциалов, иногда удобная, дается уравнениями (3.4.20).

Поперечное поле в криволинейных координатах. Предположим, что заданной граничной поверхности соответствуют криволинейные координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 с коэффициентами Ламе h_1, h_2, h_3. Например, пусть рассматривается поверхность $\xi_1 = C$. Пусть продольная часть поля равна $\operatorname{grad}\varphi$. Если, скажем, уравнение Гельмгольца в этих координатах разделяется, то к продольной части поля можно применять граничные условия таким же образом, как это делалось в предыдущих главах. Как было указано несколькими страницами раньше, поперечная часть зависит от двух скалярных функций. Удобно выбрать эти скалярные функции и способ определения через них поперечного поля так, чтобы часть поля, определяемая при помощи одной функции, была касательной к поверхности $\xi_1 = C$, а другая часть — нормальной к ней.

Вектор, нормальный к поверхности ξ_1, записывается в виде $\mathbf{a}_1 f$, где f — некоторая подлежащая определению скалярная функция от ξ_1, ξ_2, ξ_3. Однако этот вектор не всегда дает поперечное поле, так как его дивергенция $(1/h_1h_2h_3)[\partial(h_2h_3f)/\partial\xi_1]$ далеко не всегда равна нулю, даже если f не зависит от ξ_1.

Вектор

$$\mathbf{M} = \operatorname{rot}(\mathbf{a}_1 f) = \frac{\mathbf{a}_2}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial\xi_3}(h_1f) - \frac{\mathbf{a}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}(h_1f)$$

касателен к поверхности $\xi_1 = C$, и поскольку дивергенция $\mathbf{M}$ равна нулю, его можно взять в качестве решения, если только f выбрана так, чтобы $\mathbf{M}$ удовлетворял заданному уравнению. Если таковым является векторное уравнение Гельмгольца, т. е.

$$-\nabla^2\mathbf{M} = -\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{M} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{M} = k^2\mathbf{M}$$

(поскольку $\operatorname{div}\mathbf{M} = 0$), то остается лишь удовлетворить требованию, чтобы $\operatorname{rot}\mathbf{M} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{a}_1 f)$ равнялся $k^2\mathbf{a}_1 f$ плюс градиент некоторого скаляра. В этом случае уравнение будет удовлетворено. Но

$$\operatorname{rot}\mathbf{M} = -\frac{\mathbf{a}_1}{h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}h_1f\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{h_2}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial\xi_3}h_1f\right)\right] + \\ + \frac{\mathbf{a}_2}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}h_1f\right) + \frac{\mathbf{a}_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{h_2}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial\xi_3}h_1f\right).$$

Это выражение, конечно, не очень похоже на $k^2\mathbf{a}_1 f + \operatorname{grad}u$, но при более внимательном рассмотрении становится ясно, что коэффициенты при $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ могут быть представлены как соответствующие компоненты градиента в том и только в том случае, если функции h_3/h_1h_2 и h_2/h_1h_3 *обе не зависят от* ξ_1, т. е. если и h_1 и h_2/h_3 не зависят от ξ_1. Действительно, в этом случае можно изменить порядок дифференцирования, а также преобразовать первый член так, чтобы окончательно получить

$$\operatorname{rot}\mathbf{M} = \frac{1}{h_1^2}\operatorname{grad}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}h_1f\right) - \mathbf{a}_1\left\{\frac{1}{h_1^3}\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi_1^2}h_1f\right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\frac{\partial}{\partial\xi_2}h_1f\right) + \frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{h_2}{h_1h_3}\frac{\partial}{\partial\xi_3}h_1f\right)\right\}.$$

Ротор первого члена равен нулю лишь тогда, когда h_1 не зависит ни от ξ_2, ни от ξ_3; другими словами, h_1 должно быть постоянной и, следовательно, может быть положено равной единице. Тогда два последних члена соответствуют двум последним слагаемым в выражении для $\nabla^2 f$, так как при $h_1 = 1$ h_3/h_2 равно $h_1 h_2 h_3/h_2^2 = g_2(\xi_1, \xi_3) f_2(\xi_2)$ и h_2/h_3 равно $h_1 h_2 h_3/h_3^2 = g_3(\xi_1, \xi_2) f_3(\xi_3)$, где функции g_n и f_n те же, что и на стр. 484 в т. I. Выражение в фигурных скобках отлично от $\nabla^2 f$ лишь из-за первого слагаемого. Однако его можно так преобразовать, чтобы это выражение было равно $w(\xi_1)\nabla^2\psi$, где $f = w(\xi_1)\psi$. Это возможно, если первое слагаемое, которое можно записать как $\partial^2(w\psi)/\partial\xi_1^2$ равно $(w/f_1)[\partial(f_1\partial\psi/\partial\xi_1)/\partial\xi_1]$, где $h_2 h_3 = g_1(\xi_2, \xi_3) f_1(\xi_1)$. Этим путем окончательно получим

$$2\frac{dw}{d\xi_1}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1} + \psi\frac{d^2 w}{d\xi_1^2} = \frac{w}{f_1}\cdot\frac{df_1}{d\xi_1}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1},$$

что должно иметь место для любой функции ψ.

Это уравнение удовлетворяется при любой функции ψ, если $d^2w/d\xi_1^2 = 0$ и если $2\ln w = \ln f_1$. Первое уравнение удовлетворяется, если w равно 1 или ξ_1, а второе — если f_1 равно 1 или соответственно ξ_1^2. При выполнении этих условий окончательно получим

$$\operatorname{rot}\mathbf{M} = \operatorname{grad}\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}w\psi\right) - \mathbf{a}_1 w\nabla^2\psi,$$

и если ψ является решением скалярного уравнения Гельмгольца, $\nabla^2\psi = -k^2\psi$, то

$$\operatorname{rot}\mathbf{M} = \operatorname{grad}\left(\frac{\partial f}{\partial\xi_1}\right) + k^2\mathbf{a}_1 f, \quad f = w\psi,$$

следовательно,

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{M}) = k^2\mathbf{M}.$$

Таким образом, дивергенция вектора $\mathbf{M} = \operatorname{rot}(\mathbf{a}_1 w\psi)$ равна нулю, и этот вектор является решением векторного уравнения Гельмгольца.

Просматривая приведенную в конце гл. 5 таблицу различных систем координат, в которых переменные разделяются, мы видим, что из одиннадцати таких координатных систем лишь в шести один из коэффициентов Ламе равен единице, а отношение двух других не зависит от соответствующей этому коэффициенту координаты. Это: прямоугольные координаты, в которых за ξ_1 можно выбрать x, y или z, три цилиндрические системы координат, в которых за ξ_1 надо выбрать координату z, и, наконец, сферическая и коническая системы координат, в которых роль координаты ξ_1 играет радиус. В первых четырех случаях функция f_1 равна 1, поэтому и $w = 1$; в двух последних случаях $f_1 = r^2$ и, следовательно, $w = r$.

Мы показали тем самым, что в шести из одиннадцати координатных систем, в которых разделяются переменные в скалярном уравнении Гельмгольца, можно получить решение векторного уравнения Гельмгольца, поперечная часть которого касательна к одной из координатных поверхностей. Общий вид этого решения есть

$$\mathbf{M} = \operatorname{rot}[\mathbf{a}_1 w(\xi_1)\psi] = \operatorname{grad}(w\psi)\times\mathbf{a}_1, \tag{13.1.4}$$

где ψ — решение скалярного уравнения Гельмгольца, $\xi_1 = z$ и $w = 1$ для цилиндрических координат (включая и декартовы), а для сферических и конических $\xi_1 = r$ и $w = r$.

Этим получено одно из двух скалярных полей, определяющих поперечную часть общего решения, и показано, как из этого скалярного поля получается соответствующая часть поперечного поля. Остается построить второе скалярное поле, определяющее остальную часть поперечного поля, входящего в общее решение, именно, часть, нормальную к координатной поверхности $\xi_1 = \mathrm{const}$, или, проще говоря, часть, ротор которой касателен к этой координатной поверхности.

Как мы видели, вектор $\mathbf{a}_1 f$, вообще говоря, не является поперечным решением (для многих координатных систем он даже не удовлетворяет уравнению). Однако

$$\mathbf{N} = \frac{1}{k} \operatorname{rot} \operatorname{rot} [\mathbf{a}_1 w (\xi_1) \chi] = k \mathbf{a}_1 w \chi + \frac{1}{k} \operatorname{grad} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} w \chi \right), \qquad (13.1.5)$$

где χ — решение скалярного уравнения Гельмгольца [а w — то же, что и в (13.1.4)], является поперечным решением векторного уравнения Гельмгольца в указанных выше шести системах координат. При этом вектор

$$\operatorname{rot} \mathbf{N} = k \operatorname{grad} (w\chi) \times \mathbf{a}_1$$

касателен к поверхностям ξ_1. Вектор $\mathbf{N}$ не совпадает с вектором $\mathbf{M}$ даже при $\chi = \psi$. В самом деле, при $\chi = \psi$ вектор $\mathbf{N}$ часто ортогонален $\mathbf{M}$.

Таким образом, мы ввели три решения *скалярного* уравнения Гельмгольца, функции φ, ψ и χ, и построили из них решения векторного уравнения Гельмгольца, из которых можно линейно скомбинировать наиболее общее его решение:

$$\mathbf{L} = \operatorname{grad} \varphi, \quad \mathbf{M} = \operatorname{rot} (\mathbf{a}_1 w \psi) = \operatorname{grad} (w\psi) \times \mathbf{a}_1,$$
$$\mathbf{N} = \frac{1}{k} \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathbf{a}_1 w \chi) = k \mathbf{a}_1 w \chi + \frac{1}{k} \operatorname{grad} \left[\frac{\partial (w\chi)}{\partial \xi_1} \right]. \qquad (13.1.6)$$

Форма этих решений допускает достаточно простое применение граничных условий. Первый из этих векторов представляет продольную часть, два других — поперечную часть решения. Вектор $\mathbf{N}$ записан с множителем $1/k$, чтобы размерность φ, $w\chi$ и $w\psi$ была одинаковой.

Для остальных пяти координатных систем можно получить решения, выбирая в качестве прямоугольных компонент вектора три решения скалярного уравнения Гельмгольца. Однако при этом удовлетворение граничным условиям представляет почти неразрешимую задачу. Итак, мы уточнили определение разделимости векторного решения, понимая под этим возможность разложения решения на компоненты вдоль векторов $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, определенных формулами (13.1.6), причем входящие в них скалярные функции разделены на множители, зависящие каждый лишь от одной переменной, согласно изложенному в § 5.1. Поэтому в смысле данного определения лишь шесть координатных систем допускают разделение решения векторного уравнения Гельмгольца. Для остальных векторных уравнений разделение в этом смысле связано с еще большими ограничениями. Например, уравнение задач статической теории упругости разделяется лишь в сферических и полярных координатах; даже в прямоугольных координатах удовлетворить граничным условиям нелегко.

Векторные теоремы Грина. Чтобы показать связь между решениями и граничными условиями и получить векторные функции Грина для продольных и поперечных векторных полей, необходимо вывести векторный аналог теоремы Грина (7.2.2). Эта теорема устанавливает связь между поведением скалярных полей на граничной поверхности и их общим поведением внутри области, подсказывает нам характер граничных условий, необходимых для определения поля внутри области, а также служит основой в методе решения краевых задач при помощи функции Грина. Эта теорема основана, конечно, на теореме Гаусса (1.4.7), связывающей дивергенцию векторного поля с полным потоком вектора.

Формула Грина связывает две скалярные функции. Теперь мы установим соотношение между двумя векторами **E** и **F**, причем в качестве одного из них мы возьмем затем функцию Грина, а в качестве другого — искомое решение. Вместо одной величины, как это было в скалярном случае, на граничной поверхности теперь надо задать две: одну — связанную с ротором, а другую — с дивергенцией вектора. Запишем сначала теорему Гаусса для двух векторов, образованных из **E** и **F**:

$$\iiint \operatorname{div}(\mathbf{E}\operatorname{div}\mathbf{F})\,dv = \oint (\mathbf{E}\cdot\mathbf{n})\operatorname{div}\mathbf{F}\,dA,$$

$$\iiint \operatorname{div}[\mathbf{E}\times\operatorname{rot}\mathbf{F}]\,dv = \oint [\mathbf{E}\times\operatorname{rot}\mathbf{F}]\cdot\mathbf{n}\,dA =$$
$$= \oint [\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F}\,dA = \oint \mathbf{E}\cdot[\operatorname{rot}\mathbf{F}\times\mathbf{n}]\,dA,$$

где для простоты выкладок положено, что аксиальный вектор $d\mathbf{A}$ совпадает с единичным вектором **n** внешней нормали к поверхности и что его величина равна элементу dA площади поверхности.

Пользуясь таблицей векторных операций, приведенной в конце гл. 1, мы видим, что

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}\operatorname{div}\mathbf{F}) = \mathbf{E}\cdot\operatorname{grad}(\operatorname{div}\mathbf{F}) + (\operatorname{div}\mathbf{F})\cdot(\operatorname{div}\mathbf{E}),$$
$$\operatorname{div}[\mathbf{E}\times\operatorname{rot}\mathbf{F}] = (\operatorname{rot}\mathbf{E})\cdot(\operatorname{rot}\mathbf{F}) - \mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\mathbf{F}).$$

Меняя местами **E** и **F** и вычитая получаемые соотношения из исходных, окончательно получим аналог теоремы Грина для векторов:

$$\iiint \{\mathbf{E}\cdot\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}\}\,dv = \oint \{(\operatorname{div}\mathbf{F})\,\mathbf{E} - (\operatorname{div}\mathbf{E})\,\mathbf{F}\}\cdot\mathbf{n}\,dA -$$
$$-\iiint [\mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}]\,dv = \oint \{[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]\cdot\operatorname{rot}\mathbf{F} + [\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{E}]\cdot\mathbf{F}\}\,dA,$$

откуда

$$\iiint \{\mathbf{E}\cdot\nabla^2\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\nabla^2\mathbf{E}\}\,dv =$$
$$= \oint \{\mathbf{E}\times\operatorname{rot}\mathbf{F} + \mathbf{E}(\operatorname{div}\mathbf{F}) - \mathbf{F}\times\operatorname{rot}\mathbf{E} - \mathbf{F}(\operatorname{div}\mathbf{E})\}\cdot\mathbf{n}\,dA =$$
$$= \oint \{(\mathbf{E}\operatorname{div}\mathbf{F} - \mathbf{F}\operatorname{div}\mathbf{E})\cdot\mathbf{n} - (\mathbf{E}\cdot[\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{F}] + \operatorname{rot}\mathbf{E}\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{F}])\}\,dA, \qquad (13.1.7)$$

где, конечно, $\nabla^2\mathbf{F} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F}$. Наконец, будем считать вектор **E** искомым векторным полем, которое надо определить через граничные условия, а вектор **F** функцией Грина.

Из (13.1.7) мы видим, что граничные условия задачи распадаются на граничные условия для поперечного и продольного полей. Если на границе дивергенция решения равна нулю, то мы можем пользоваться поперечной функцией Грина и всюду внутри области решение представляется поперечным полем (с немногими особыми исключениями, которые будут отмечены ниже). Аналогично, если ротор решения обращается в нуль на границе, то можно пользоваться продольной функцией Грина и решение всюду внутри области является продольным; в этом случае можно вернуться к скалярному потенциалу — первое из соотношений (13.1.7) эквивалентно соотношению (7.2.2).

Из полученных уравнений легко усмотреть типы граничных условий, которым можно подчинить векторные поля. Во-первых, возможно задание двух величин $\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}\times\mathbf{E}$, то есть задание на границе нормальной и тангенциальной компонент самого поля; для этих граничных условий применяется функция Грина $\mathbf{F}$, обращающаяся в нуль на границе. Например, если искомый вектор представляет смещение в упругой среде, то эти условия употребляются при задании смещений точек граничной поверхности среды. В случае векторного электромагнитного потенциала [с добавочным условием, например, (3.4.20)] нормальная компонента $\mathbf{A}$ определяется интегралом по времени от поверхностного заряда на граничной поверхности, а тангенциальная компонента $\mathbf{A}$ определяется поверхностным током.

Во-вторых, возможна другая группа граничных условий, которая в некотором смысле соответствует заданию нормальной производной в скалярном случае и состоит в задании величины $\operatorname{div}\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{E}$. При применении этих граничных условий надо пользоваться функцией Грина, дивергенция и ротор которой равны нулю на границе. В случае упругого тела эти граничные условия для вектора $\mathbf{E}$ соответствуют заданию давления и касательного (тангенциального) напряжения на границе. В аналогичном случае для электромагнитного векторного потенциала задаются напряженности электрического и магнитного поля на граничной поверхности ($\operatorname{rot}\mathbf{A}$ пропорционален $\mathbf{H}$).

Кроме того, если физическая постановка задачи (или в граничных условиях, или в самом уравнении) указывает, что поле всюду в рассматриваемой области является либо чисто продольным, либо чисто поперечным, то можно использовать это обстоятельство, выбирая соответствующую функцию Грина. При этом граничные условия упрощаются. Например, если поле всюду поперечное, то на границе достаточно задать лишь проекцию $[\mathbf{n}\times\mathbf{E}]$ или проекцию $[\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{E}]$. Функцию Грина выбираем так, чтобы ее дивергенция была равна нулю и, кроме того, чтобы на границе касательная компонента либо самой функции Грина, либо ее ротора обращалась в нуль. С другой стороны, если поле всюду продольное, то на границе достаточно задать лишь нормальную компоненту $\mathbf{E}$ или ее дивергенцию, а для соответствующей продольной функции Грина потребовать выполнения на границе аналогичных нулевых условий.

Аффинорная функция Грина. В последней части гл. 7 было отмечено, что функция Грина, вообще говоря, является ядром интегрального оператора, который преобразует в решение граничные условия и (или) плотность распределения внешних источников. В случае скалярного решения это ядро также может быть скалярным. Если же граничные условия и функция распределения внешних источников являются векторными, то это ядро должно быть векторным оператором, аффинором типа, рассмотренного в § 1.6. Можно сказать, что это является естественным распространением теоретико-функциональной точки зрения на собственные функции и функции Грина, развитой в гл. 6 и 7. Там было указано, что граничные условия можно рассматривать как вектор в абстрактном векторном пространстве, определяемом единичными векторами $\mathbf{e}(x^s)$, а функция Грина является векторным оператором, преобразующим граничные значения в решение. До тех пор пока граничные условия и функции внешних источников являются скалярными, G представляет собой оператор в векторном пространстве, но скаляр в «реальном» пространстве. Если граничные условия и плотность источников являются векторами в обычном смысле, то функция Грина должна быть векторным оператором не только в функциональном, но и в реальном пространстве. Она преобразует векторные граничные условия и плотность внешних источников в векторное решение. Другими словами, функция Грина для векторного случая является *аффинорной* (тензорной) функцией положения источника и наблюдателя.

Эта аффинорная функция Грина $\mathfrak{G}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)$ имеет общие свойства, аналогичные перечисленным в т. I на стр. 746—747 свойствам скалярной функции Грина: 1) она должна обладать свойством симметрии; 2) при ее помощи можно получить решение как для неоднородных граничных условий, так и для неоднородного уравнения; 3) полученное с ее помощью решение граничной задачи имеет особенности вне рассматриваемой области. Для уравнения Гельмгольца эта функция должна удовлетворять неоднородному аффинорному уравнению

$$\nabla^2\mathfrak{G}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)+k^2\mathfrak{G}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)=-4\pi\mathfrak{J}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0), \tag{13.1.8}$$

где $\mathfrak{J}$ — идемфактор, аффинорный аналог единицы ($\mathfrak{J}\cdot\mathbf{F}=\mathbf{F}$ для любого $\mathbf{F}$). Оператор ∇^2 применяется к $\mathfrak{G}$ по $\mathbf{r}$ (оператор ∇_0^2 применяется к $\mathfrak{G}$ по $\mathbf{r}_0$) ко всем ее девяти компонентам. Девять декартовых компонент аффинора $\nabla^2\mathfrak{G}$ являются результатом действия оператора Лапласа на соответствующие девять декартовых компонент $\mathfrak{G}$. Выраженная в компонентах криволинейной системы координат, эта функция имеет более сложный вид, однако соответствующее выражение можно получить методом § 1.5. Ниже будут приведены некоторые примеры.

Методами, аналогичными рассмотренным в т. I на стр. 749, можно показать, что аффинор $\mathfrak{G}$ удовлетворяет соотношению взаимности

$$\mathfrak{G}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)=\mathfrak{G}(\mathbf{r}_0\,|\,\mathbf{r}).$$

Можно также показать, что $\mathfrak{G}$ является симметричным аффинором, другими словами, что $\mathfrak{G}\cdot\mathbf{F}=\mathbf{F}\cdot\mathfrak{G}$ для любого $\mathbf{F}$.

Введенную аффинорную функцию Грина можно использовать для определения решения неоднородного векторного уравнения, например уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2\mathbf{F}+k^2\mathbf{F}=-4\pi\mathbf{Q}(\mathbf{r}), \tag{13.1.9}$$

удовлетворяющего заданным условиям на граничной поверхности S. Так же, как и раньше, умножим уравнение (13.1.8) слева на $\mathbf{F}$, а (13.1.9) справа на $\mathfrak{G}$ и вычтем первое из второго. Проинтегрировав результат по области внутри S, получим *векторное* уравнение

$$\iiint\{\nabla^2\mathbf{F}\cdot\mathfrak{G}-\mathbf{F}\cdot\nabla^2\mathfrak{G}\}\,dv=4\pi\iiint\{\mathbf{F}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)-\mathbf{Q}\cdot\mathfrak{G}\}\,dv.$$

Так как $\mathfrak{G}$ является симметричным аффинором, то $\mathbf{F}$ и $\mathfrak{G}$ в этом выражении можно поменять местами.

В силу уравнения (13.1.7), меняя местами $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$, получим, что внутри области, ограниченной поверхностью S, и на самой поверхности

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r})=\iiint&\mathfrak{G}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{Q}(\mathbf{r}_0)\,dv_0+\\&+\frac{1}{4\pi}\oint\{(\nabla_0\cdot\mathbf{F}(\mathbf{r}_0^s))(\mathfrak{G}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0^s)\cdot\mathbf{n})-(\nabla_0\cdot\mathfrak{G})(\mathbf{F}(\mathbf{r}_0^s)\cdot\mathbf{n})-\\&-\mathfrak{G}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0^s)\cdot[\mathbf{n}\times[\nabla_0\times\mathbf{F}]]-[\nabla_0\times\mathfrak{G}]\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{F}(\mathbf{r}_0^s)]\}\,dA_0,\end{aligned} \tag{13.1.10}$$

где различные векторные операции над векторами и аффинорами, входящими в подинтегральную функцию в поверхностном интеграле, производятся по правилам, разобранным в гл. 1. Для некоторых случаев эти операции вскоре будут подробно рассмотрены. Член $(\nabla_0\cdot\mathbf{F})$ является скаляром, в то время как $(\mathfrak{G}\cdot\mathbf{n})$ — вектор; член $(\nabla_0\cdot\mathfrak{G})$ является вектором, а $(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})$ — скаляром; член $[\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{F}]$ — вектор, а $\mathfrak{G}$ — аффинор; член $[\mathbf{n}\times\mathbf{F}]$ — вектор, а $[\nabla\times\mathfrak{G}]$ — аффинор, так что полное выражение в фигурных скобках представляет собой вектор. Объемный интеграл берется по всему объему, ограниченному поверхностью S, а поверхностный интеграл — по всей поверхности S (по координатам $\mathbf{r}_0$). Это выражение эквивалентно формуле (7.2.7) и является исходным для различных методов получения векторных решений с помощью функции Грина.

Например, если краевая задача состоит в задании на граничной поверхности как касательной, так и нормальной составляющих $\mathbf{F}$ ($\mathbf{F}_t$ и F_n), то надо выбрать аффинорную функцию Грина, обращающуюся в нуль на границе области ($\mathfrak{G}$ равно нулю, когда $\mathbf{r}$ лежит на S, а $\mathbf{r}_0$ не лежит на S, или наоборот). Тогда

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \iiint \mathfrak{G}(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r}_0)\, dv_0 - \\ - \frac{1}{4\pi} \oint \{(\nabla_0 \cdot \mathfrak{G}(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0^s))\, F_n(\mathbf{r}_0^s) + [\nabla_0 \times \mathfrak{G}(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0^s)] \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{F}_t(\mathbf{r}_0^s)]\}\, dA_0, \quad (13.1.11)$$

где $\mathfrak{G}(\mathbf{r}^s \mid \mathbf{r}_0) = \mathfrak{G}(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0^s) = 0$. В это выражение нормальная к поверхности компонента вектора $\mathbf{F}$ входит отдельно от касательных компонент, которые образуют касательный вектор $\mathbf{F}_t$ ($\mathbf{F}_t$ есть касательный вектор, который получается проектированием вектора $\mathbf{F}$ на плоскость, касательную к поверхности; $\mathbf{n} \times \mathbf{F} = \mathbf{n} \times \mathbf{F}_t$ является касательным вектором, который получается из вектора $\mathbf{F}_t$ поворотом на $\pi/2$ вокруг вектора $\mathbf{n}$ как оси по часовой стрелке, если смотреть в направлении вектора $\mathbf{n}$). Если $\mathbf{F}$ окажется поперечным решением (что может иметь место лишь при $\operatorname{div} \mathbf{Q} = 0$), то аффинор $\mathfrak{G}$ можно выбрать поперечным (т. е. $\nabla \cdot \mathfrak{G} = -\nabla_0 \cdot \mathfrak{G} = 0$) и на граничной поверхности достаточно задать лишь касательную составляющую вектора $\mathbf{F}$, не задавая его нормальной составляющей. Это и не удивительно, так как требование равенства $\operatorname{div} \mathbf{F}$ нулю накладывает условие на три скалярные функции, определяющие вектор $\mathbf{F}$, поэтому для определения этих трех функций достаточно двух граничных условий для касательных компонент $\mathbf{F}$. Наоборот, если $\mathbf{F}$ является продольным, то и аффинор $\mathfrak{G}$ можно выбрать продольным ($\nabla \times \mathfrak{G} = -\nabla_0 \times \mathfrak{G} = 0$) и для определения вектора $\mathbf{F}$ на граничной поверхности достаточно задать лишь его нормальную компоненту.

С другой стороны, если в граничном условии на поверхности задаются дивергенция и касательная компонента ротора $\mathbf{F}$, то аффинор $\mathfrak{G}$ надо выбрать так, чтобы на S были равны нулю его дивергенция и касательная составляющая ротора. Тогда

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \iiint \mathfrak{G}(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r}_0)\, dv_0 + \\ + \frac{1}{4\pi} \oint \{[\mathfrak{G} \cdot \mathbf{n}]\,(\operatorname{div}_0 \mathbf{F}) - \mathfrak{G} \cdot [\mathbf{n} \times \operatorname{rot}_0 \mathbf{F}]\}\, dA_0, \quad (13.1.12)$$

где $\operatorname{div}[\mathfrak{G}(\mathbf{r}^s \mid \mathbf{r}_0)] = \operatorname{div}_0[\mathfrak{G}(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0^s)] = 0$ и соответственно $\mathbf{n} \times \operatorname{rot}[\mathfrak{G}(\mathbf{r}^s \mid \mathbf{r}_0)] = \mathbf{n} \times \operatorname{rot}_0[\mathfrak{G}(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0^s)] = 0$. В этом случае дивергенция $\mathbf{F}$ входит отдельно от касательной компоненты его ротора. Если вектор $\mathbf{F}$ поперечный (т. е. вектор $\mathbf{Q}$ поперечный, а $\operatorname{div} \mathbf{F}$ равна нулю на S), то в граничных условиях должны быть заданы лишь две касательные компоненты ротора $\mathbf{F}$.

Общие неоднородные граничные условия для векторных решений состоят в задании значений линейной комбинации нормальной компоненты $\mathbf{F}$ и его дивергенции

$$[\operatorname{div} \mathbf{F} + \alpha(\mathbf{n} \cdot \mathbf{F})]\,|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}^s} = H(\mathbf{r}^s)$$

и линейной комбинации касательных компонент самого вектора и его ротора

$$[\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{F}] + \beta\,[\mathbf{n} \times \mathbf{F}]\,|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}^s} = \mathbf{K}(\mathbf{r}^s) \times \mathbf{n},$$

где α и β могут быть функциями от $\mathbf{r}^s$. Этот случай соответствует формуле (7.2.11). При этом следует выбрать функцию $\mathfrak{G}$, удовлетворяющую граничным условиям

$$\nabla\cdot\mathfrak{G}+\alpha(\mathbf{n}\cdot\mathfrak{G})=0 \text{ и } \mathbf{n}\times[\nabla\times\mathfrak{G}-\beta\mathfrak{G}]=0.$$

Тогда

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=\iiint\mathfrak{G}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)\cdot\mathbf{Q}(\mathbf{r}_0)\,dv_0+ \\ +\frac{1}{4\pi}\oint\{H(\mathbf{r}_0^s)(\mathfrak{G}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0^s)\cdot\mathbf{n})+\mathfrak{G}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0^s)\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{K}(\mathbf{r}_0^s)]\}\,dA_0, \quad (13.1.13)$$

что является векторным аналогом формулы (7.2.12).

Векторные собственные функции. Прежде чем перейти к вычислению аффинорных функций Грина для различных случаев, полезно сделать некоторые замечания о собственных функциях векторного уравнения Гельмгольца (как примера векторного уравнения). Разобранным выше методом их можно получать из собственных функций соответствующего скалярного уравнения. Проще всего искать их либо в виде

$$\mathbf{F}=\mathbf{i}U+\mathbf{j}V+\mathbf{k}W,$$

либо в виде

$$\mathbf{F}=\mathbf{L}+\mathbf{M}+\mathbf{N},$$

где

$$\mathbf{L}=\operatorname{grad}\varphi,\quad \mathbf{M}=\operatorname{rot}(\mathbf{a}_1 w\,\psi),\quad \mathbf{N}=\frac{1}{k}\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\mathbf{a}_1 w\chi), \qquad (13.1.14)$$

а U, V, W или φ, ψ, χ — собственные функции скалярных уравнений вида $\nabla^2\varphi+k^2\varphi=0$ и т. д. Задача заключается в выборе k и соответствующих функций U, V, W или φ, ψ и χ таким образом, чтобы удовлетворялись все заданные граничные условия.

Это делается сравнительно просто, если граничным условиям можно удовлетворить, используя лишь одну из функций, например U или ψ, без использования функций V, W или φ, χ. Если такое упрощение невозможно, то определение допустимых значений k достаточно сложно. Нетрудно показать, что указанное упрощение возможно лишь при определенной геометрии границы области и что такое ограничение равносильно дополнительным требованиям на координатную систему, которые накладывались введенным ранее понятием разделимости векторного решения. Ниже будут даны практические примеры использования указанных положений.

Обычными однородными граничными условиями для векторной собственной функции являются или условия Дирихле $\mathbf{F}=0$, или условия Неймана $\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{F}=0$ и $\operatorname{div}\mathbf{F}=0$. Можно также требовать, чтобы на границе вектор $\mathbf{F}$ являлся поперечным ($\operatorname{div}\mathbf{F}=0$ на границе) и в то же время удовлетворял условиям Дирихле; в этом случае правильным граничным условием является $\mathbf{n}\times\mathbf{F}=0$ (задание и F_n переопределяет задачу в случае дополнительного требования на границе $\operatorname{div}\mathbf{F}=0$). Оказывается, что требование равенства $\operatorname{div}\mathbf{F}$ нулю на границе обычно эквивалентно требованию поперечности $\mathbf{F}$ внутри области. Действительно, взяв дивергенцию от $\nabla^2\mathbf{F}+k^2\mathbf{F}=0$, легко видеть, что скалярная функция $\operatorname{div}\mathbf{F}$ является решением скалярного уравнения Гельмгольца. Лишь для дискретного множества значений k существуют отличные от нуля решения скалярного уравнения $\nabla^2 f+k^2 f=0$, обращающиеся в нуль на границе замкнутой области. Поэтому, если только собственные значения векторного уравнения Гельмгольца не совпадают с собственными значениями скалярного уравнения при граничном условии $f=0$, то из условия $\operatorname{div}\mathbf{F}=0$ на границе вытекает, что $\operatorname{div}\mathbf{F}=0$ тождественно внутри всей области, т. е. вектор $\mathbf{F}$ поперечный.

Разберем теперь несколько примеров простых векторных собственных функций; это поможет почувствовать связанные с ними усложнения и поможет научиться их преодолевать. Простейший случай — прямоугольная область со сторонами l_x, l_y, l_z, в одном из углов которой находится начало координат. Если заданы условия Дирихле, то собственные функции можно записать в виде

$$\mathbf{F} = (\mathbf{i}, \mathbf{j} \text{ или } \mathbf{k}) \left[\sin\left(\frac{\pi n_x x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n_y y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi n_z z}{l_z}\right) \right], \tag{13.1.15}$$

$$k^2 = \pi^2 \left[\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2 \right];$$

$$n_x,\ n_y,\ n_z = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ \mathbf{F} = 0 \text{ на границе.}$$

Таким образом, для каждой тройки значений n_x, n_y, n_z имеются три взаимно ортогональные векторные функции. Ни один из этих векторов не является ни продольным, ни поперечным, причем из каждой тройки полученных решений нельзя составить такие комбинации, которые давали бы продольную и две поперечные собственные функции. Как было указано ранее, решения, удовлетворяющие граничным условиям, задающим на границе все три компоненты решения, вообще говоря, не являются ни продольными, ни поперечными (т.е. ни их дивергенция, ни ротор не равны нулю). Отметим то очевидное обстоятельство, что система (13.1.15) является полной системой векторных собственных функций, при помощи которой внутри области может быть представлено любое кусочно-гладкое векторное поле.

Ослабим теперь слегка наши требования, оставив лишь условие равенства нулю на границе касательных компонент $\mathbf{F}$. Этому условию, конечно, удовлетворяет система (13.1.15), а также любая линейная комбинация этих векторов вида $\mathbf{F} = \mathbf{U}$, или $\mathbf{V}$, или $\mathbf{W}$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{i} \cos\left(\frac{n_x\pi}{l_x} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n_y\pi}{l_y} \cdot y\right) \sin\left(\frac{n_z\pi}{l_z} \cdot z\right), \\ \mathbf{V} &= \mathbf{j} \sin\left(\frac{n_x\pi}{l_x} \cdot x\right) \cos\left(\frac{n_y\pi}{l_y} \cdot y\right) \sin\left(\frac{n_z\pi}{l_z} \cdot z\right), \\ \mathbf{W} &= \mathbf{k} \sin\left(\frac{n_x\pi}{l_x} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n_y\pi}{l_y} \cdot y\right) \cos\left(\frac{n_z\pi}{l_z} \cdot z\right), \end{aligned} \tag{13.1.16}$$

которые соответствуют тем же собственным значениям k, что и система (13.1.15). Система векторов (13.1.16) также является полной системой собственных функций. (Соответствующая каждой компоненте система скалярных собственных функций является полной для данной области.) Следовательно, двух систем (13.1.15) и (13.1.16) слишком много; нужно еще одно граничное условие для выбора наших собственных функций. Таким условием может быть требование равенства нулю нормальной компоненты $\mathbf{F}$ на границе, которому удовлетворяет лишь система (13.1.15). Другим условием может быть требование равенства нулю на границе $\operatorname{div} \mathbf{F}$; в этом случае мы используем лишь систему (13.1.16). Однако эта система не является поперечной, так как для рассматриваемой области собственные значения скалярного уравнения для $\operatorname{div} \mathbf{F}$ при нулевых условиях на границе совпадают с собственными значениями векторного уравнения. В действительности в каждый из векторов системы (13.1.16) оказалась непреднамеренно включенной некоторая продольная часть.

Однако в рассматриваемом случае с граничными условиями равенства нулю на границе касательной составляющей $\mathbf{F}$ и дивергенции $\mathbf{F}$ можно составить из системы (13.1.16) такие тройки линейных комбинаций, что один вектор окажется продольным, а два других поперечными, с равными нулю дивергенциями во всей области, чего нельзя сделать в случае системы (13.1.15). Такими комбинациями будут

$$\mathbf{L}=\frac{n_x\pi}{l_x}\mathbf{U}+\frac{n_y\pi}{l_y}\mathbf{V}+\frac{n_z\pi}{l_z}\mathbf{W}=\operatorname{grad}\left[\sin\left(\frac{n_x\pi}{l_x}x\right)\sin\left(\frac{n_y\pi}{l_y}y\right)\sin\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right)\right],$$

$$\mathbf{M}=-\frac{n_z\pi}{l_z}\mathbf{V}+\frac{n_y\pi}{l_y}\mathbf{W}=\operatorname{rot}\left[\mathbf{i}\sin\left(\frac{n_x\pi}{l_x}x\right)\cos\left(\frac{n_y\pi}{l_y}y\right)\cos\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right)\right]=$$

$$=-\mathbf{i}\times\operatorname{grad}\left[\sin\left(\frac{n_x\pi}{l_x}x\right)\cos\left(\frac{n_y\pi}{l_y}y\right)\cos\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right)\right],$$

$$\mathbf{N}=\frac{\pi^2}{k}\left[\left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2+\left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2\right]\mathbf{U}-\frac{\pi^2}{k}\left(\frac{n_xn_y}{l_xl_y}\right)\mathbf{V}-\frac{\pi^2}{k}\left(\frac{n_xn_z}{l_xl_z}\right)\mathbf{W}=$$

$$=\frac{1}{k}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left[\mathbf{i}\cos\left(\frac{n_x\pi}{l_x}x\right)\sin\left(\frac{n_y\pi}{l_y}y\right)\sin\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right)\right],\qquad(13.1.17)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=0,\quad \mathbf{n}\times\mathbf{F}=0 \text{ на границе,}$$

где $\mathbf{L}$ — продольный вектор, а $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — поперечные.

Отметим некоторые интересные моменты в полученном результате. Во-первых, функции φ, ψ, χ, через которые $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ выражаются согласно (13.1.14), являются различными и удовлетворяют различным граничным условиям. На границе равны нулю φ, нормальная компонента $\mathbf{i}\psi$ и касательная компонента $\mathbf{i}\chi$. Каждая из них определяет полную систему скалярных собственных функций, соответствующих одним и тем же собственным значениям. Наконец, для заданной тройки чисел n_x, n_y, n_z векторы $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ взаимно ортогональны. Оказывается, что это свойство векторов $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, определенных формулами (13.1.14), выполняется почти всегда при «разумных» граничных условиях.

Рассмотрим теперь другую граничную задачу. Найдем решения, у которых касательные составляющие ротора равны нулю на границе. Нетрудно указать три таких решения, имеющих вид $\mathbf{i}U$, $\mathbf{j}V$, $\mathbf{k}W$:

$$\mathbf{u}=\mathbf{i}\sin\left(\frac{n_x\pi}{l_x}x\right)\cdot\cos\left(\frac{n_y\pi}{l_y}y\right)\cdot\cos\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right),$$

$$\mathbf{v}=\mathbf{j}\cos\left(\frac{n_x\pi}{l_x}x\right)\cdot\sin\left(\frac{n_y\pi}{l_y}y\right)\cdot\cos\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right),\qquad(13.1.18)$$

$$\mathbf{w}=\mathbf{k}\cos\left(\frac{n_x\pi}{l_x}x\right)\cdot\cos\left(\frac{n_y\pi}{l_y}y\right)\cdot\sin\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right).$$

Кроме того, ротор функции $\mathbf{L}$ (13.1.17) (или вообще градиента любого решения скалярного уравнения Гельмгольца) равен нулю на границе, так что мы получаем больше, чем требуется. Но этого и следовало ожидать, так как полным граничным условием Неймана является требование равенства нулю не только касательной составляющей ротора, но и дивергенции. Комбинирование различных компонент дает искомую систему в виде:

$$\mathbf{L}=\operatorname{grad}\left[\sin\left(\frac{n_x\pi}{l_x}x\right)\sin\left(\frac{n_y\pi}{l_y}y\right)\sin\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right)\right],$$

$$\mathbf{M}=\frac{n_z\pi}{l_z}\mathbf{v}-\frac{n_y\pi}{l_y}\mathbf{w}=\operatorname{rot}\left[\mathbf{i}\cos\left(\frac{n_x\pi}{l_x}x\right)\sin\left(\frac{n_y\pi}{l_y}y\right)\sin\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right)\right],$$

$$\mathbf{N}=\frac{\pi^2}{k}\left[\left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2+\left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2\right]\mathbf{u}-\frac{\pi^2}{k}\frac{n_xn_y}{l_xl_y}\mathbf{v}-\frac{\pi^2}{k}\frac{n_xn_z}{l_xl_z}\mathbf{w}=$$

$$=\frac{1}{k}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\left[\mathbf{i}\sin\left(\frac{n_x\pi}{l_x}x\right)\cos\left(\frac{n_y\pi}{l_y}y\right)\cos\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right)\right],$$

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=0 \text{ и } [\mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{F}]=0 \text{ на границе.}\qquad(13.1.19)$$

Как и раньше, $\mathbf{L}$ — продольный, а $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — поперечные векторы. Опять соответствующие φ, ψ и χ являются различными скалярными функциями, причем каждая определяет полную систему собственных функций.

Наконец, построим тройную последовательность собственных векторов с равными нулю на границе нормальной компонентой и касательной компонентой ротора (четвертая возможная комбинация однородных граничных условий). Такой системой как раз является система (13.1.18). Из троек этих векторов можно составить один продольный и два поперечных вектора, взяв

$$\mathbf{L}=\frac{n_x\pi}{l_x}\mathbf{u}+\frac{n_y\pi}{l_y}\mathbf{v}+\frac{n_z\pi}{l_z}\mathbf{w}=-\operatorname{grad}\left[\cos\left(\frac{n_x\pi}{l_x}x\right)\cos\left(\frac{n_y\pi}{l_y}y\right)\cos\left(\frac{n_z\pi}{l_z}z\right)\right], \tag{13.1.20}$$

$\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — такими же, как в (13.1.19),

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{F}=0 \quad \text{и} \quad \mathbf{n}\times\operatorname{rot}\mathbf{F}=0 \text{ на границе.}$$

Таким образом, построены системы векторных собственных функций для любой из четырех возможных комбинаций однородных граничных условий. Нетрудно видеть, как удовлетворить и более общим граничным условиям, использованным в формуле (13.1.13).

Другие системы собственных функций в различных координатах будут рассмотрены ниже. Проведенных рассмотрений все же достаточно, чтобы разобраться в сути дела. Если граничное условие заключается в равенстве нулю вектора $\mathbf{F}$, то наиболее простым решением является разложение $\mathbf{F}$ на его прямоугольные компоненты U, V и W, которые являются решениями скалярных уравнений с однородными граничными условиями Дирихле. Естественно, собственные значения для U, V и W совпадают, так что любое собственное колебание имеет три степени свободы в соответствии с трехкратным вырождением, имеющим место в этом случае.

Если граничное условие является одним из остальных трех однородных граничных условий или какой-либо их комбинацией, то обычно лучше всего разложить $\mathbf{F}$ на продольный собственный вектор $\mathbf{L}$ и два поперечных собственных вектора $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$. Они также являются взаимно ортогональными. Для простого уравнения Гельмгольца в случае прямоугольных границ собственные значения для всех трех систем собственных векторов одни и те же, что опять соответствует трехкратному вырождению. В некоторых других случаях это не имеет места и допустимые частоты для волн различного типа оказываются различными.

Примером может служить уравнение колебаний изотропной упругой среды

$$(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F}-\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F}+\rho\omega^2\mathbf{F}=0.$$

Если граничное условие таково, что перемещение можно разложить на продольную и поперечную части [так же, как в формулах (13.1.17), (13.1.19) и (13.1.20)], то уравнение разделяется и собственные функции определяются указанными выражениями, хотя собственные частоты продольных колебаний отличаются от частот поперечных колебаний множителем $\sqrt{\mu/(\lambda+2\mu)}$, что легко видно из приведенного выше уравнения. С другой стороны, для граничного условия $\mathbf{F}=0$, при котором решение нельзя разложить на продольную и поперечную части, уравнение не разделяется даже в прямоугольных координатах. Трудность при этом граничном условии состоит в том, что продольная волна при отражении дает и поперечные волны и наоборот. Так как эти колебания распространяются с различной скоростью, то нелегко составить комбинацию, дающую периодическое движение, и этого нельзя достичь, пользуясь только несколькими произведениями синусов и косинусов.

Однако если граничные условия допускают разделение, то каждому собственному вектору $\mathbf{F}_n(\mathbf{r})$ можно приписать четыре числа, обозначенных здесь условно через n. Первое из этих чисел показывает, какой из трех систем $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ (или, если это более удобно, $\mathbf{i}U$, $\mathbf{j}V$, $\mathbf{k}W$) принадлежит вектор; три остальных являются номерами производящих скалярных собственных функций φ, ψ или χ (или U, V и W). Можно показать, что $\mathbf{F}_n$ для всех возможных значений n образуют полную ортогональную систему функций, т. е.

$$\iiint \overline{\mathbf{F}}_n \cdot \mathbf{F}_m \, dv = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \Lambda_n & \text{при } m = n, \end{cases} \tag{13.1.21}$$

где интегрирование производится по всей области внутри границы. Поэтому кусочно-гладкая векторная функция $\mathbf{E}$, удовлетворяющая тем же граничным условиям, может быть представлена в этой области рядом

$$\mathbf{E} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbf{F}_n; \qquad a_n = \frac{1}{\Lambda_n} \iiint \overline{\mathbf{F}}_n \cdot \mathbf{E} \, dv. \tag{13.1.22}$$

Способ доказательства этого утверждения полностью аналогичен примененному в § 6.3 для скалярных собственных функций. В гл. 3 было показано, что все рассматриваемые нами векторные уравнения являются уравнениями Лагранжа—Эйлера, соответствующими такому распределению плотности лагранжиана в данной области, что каждое из решений $\mathbf{F}_n$ доставляет стационарное значению интегралу от плотности лагранжиана по полному объему данной области. Отсюда нетрудно доказать ортогональность и полноту этой системы функций методом, намеченным в § 6.3.

Функция Грина для векторного уравнения Гельмгольца. Продолжая наше рассмотрение аналогично проведенному ранее рассмотрению для скалярных собственных функций, нетрудно показать, что аффинорную функцию Грина можно разложить по собственным векторам замкнутой области. Функция Грина уравнения Гельмгольца должна удовлетворять уравнению (13.1.8). Используя операцию аффинорного умножения двух векторов [см. (1.6.7)], легко убедиться, что

$$\mathfrak{G}(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0) = 4\pi \sum_n \frac{\overline{\mathbf{F}}_n(\mathbf{r}) \mathbf{F}_n(\mathbf{r}_0)}{\Lambda_n (k_n^2 - k^2)}, \tag{13.1.23}$$

где $\mathbf{F}_n$ — собственная функция уравнения $\nabla^2 \mathbf{F}_n + k_n^2 \mathbf{F}_n = 0$, удовлетворяющая тем же однородным граничным условиям, что и $\mathfrak{G}$, k_n^2 — соответствующее собственное значение. Если $\mathbf{F}_n$ — комплексный вектор, то в разложение входит и сопряженный ему вектор, так что $\mathfrak{G}$ является эрмитовым аффинором. Также очевидно, что $\mathfrak{G}$ — симметричный аффинор и обладает симметрией в отношении $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$. Аффинорное произведение двух векторов $\overline{\mathbf{F}}_n$ и $\mathbf{F}_n$ (а не скалярное или векторное произведение) дает в результате аффинор [см. формулу (1.6.7)].

Отметим, что аффинор $\mathfrak{G}$, рассматриваемый как функция от k, имеет полюсы во всех собственных значениях k_n, причем вычет в n-м полюсе равен $-2\pi \overline{\mathbf{F}}_n(\mathbf{r}) \mathbf{F}_n(\mathbf{r}_0)/\Lambda_n k_n$. Это соответствует бесконечной амплитуде колебаний при резонансной частоте вынуждающей силы (если отсутствует затухание). Заметим, что в этом случае $\mathfrak{G}$ можно сделать поперечным аффинором, опуская при суммировании продольные собственные векторы $\mathbf{L}$. Сумма одних только $\mathbf{L}$ дает продольную функцию Грина.

Для внешних граничных задач, когда область определения решения неограничена, спектр собственных значений непрерывен. Соответствующую функцию Грина можно получить, заменяя ряд (13.1.23) на интеграл и выбирая путь интегрирования так, чтобы получить расходящиеся волны, как это сделано в формуле (7.2.42). Можно также ряд разбить на ряды по «угловым координатам», умноженным на разрывные функции «радиальной» координаты, как было сделано для скалярного случая в формулах (7.2.51) и (7.2.63). Это будет проведено позже для некоторых координатных систем.

Функцию Грина для неограниченной области, так же как и в скалярном случае, можно получить в замкнутой форме. Однако здесь имеет место новое положение, когда для того, чтобы получить векторное решение задачи, надо найти аффинорное решение неоднородного уравнения для функции Грина. При этом надо быть осторожным в употреблении нашего векторно-аффинорного символизма, в частности по отношению к δ-функции. Однако, поскольку в случае неограниченной области мы ищем лишь простейшее радиальное аффинорное решение, будем смело действовать, выражая результаты в прямоугольных компонентах для того, чтобы наш символизм выглядел как можно проще. Для сокращения, где это возможно, написания формул сделаем (*только для этого раздела*) следующую замену:

$$x = x_1; \ y = x_2; \ z = x_3; \ \mathbf{i} = \mathbf{e}_1; \ \mathbf{j} = \mathbf{e}_2; \ \mathbf{k} = \mathbf{e}_3.$$

Оказывается, что вычисления для векторного уравнения Гельмгольца проводятся проще, чем для векторного уравнения Лапласа, поэтому начнем с первого.

Аффинорная функция Грина для уравнения Гельмгольца должна удовлетворять уравнению

$$\sum_{n,\,m=1}^{3} \mathbf{e}_m\mathbf{e}_n \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] G_{mn} + k^2 G_{mn} \right\} = -4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \sum_{n=1}^{3} \mathbf{e}_n\mathbf{e}_n, \quad (13.1.24)$$

где [1]) $\mathfrak{G} = \sum\limits_{m,n} \mathbf{e}_m\mathbf{e}_n G_{mn}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0\,|\,k)$; $\omega = kc$, G_{mn} — компоненты $\mathfrak{G}$ вдоль прямоугольных осей. Это дает девять скалярных уравнений для девяти компонент, и, обращаясь к уравнению (7.2.17), мы находим, что решение (13.1.24) в неограниченной области, ведущее себя на бесконечности как расходящаяся волна, должно иметь вид

$$\mathfrak{G}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0\,|\,k) = \sum_{n=1}^{3} \mathbf{e}_n\mathbf{e}_n \frac{e^{ikR}}{R} = \frac{e^{ikR}}{R}\,\mathfrak{J}. \quad (13.1.25)$$

Соответствующей функцией для двух измерений (если она нужна) является

$$\mathfrak{G} = \sum_{n=1}^{2} \mathbf{e}_n\mathbf{e}_n i\pi H_0(kR).$$

Для одного измерения соответствующая функция будет скалярной; векторы и аффиноры не отличаются от скаляров в случае одного измерения.

Если все встречающиеся уравнения были бы просто уравнениями Гельмгольца, то к сказанному нужно было бы добавить немного. Осталось бы только дать еще выражение $\mathfrak{G}$ в различных системах координат.

---

[1]) Напомним, что здесь $\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n$ означает аффинорное произведение векторов; например, $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$. — *Прим. перев.*

Однако большинство векторных решений значительно сложнее. Во многих физических приложениях дивергенция результирующего векторного поля равна нулю: например, для поля скоростей вязкой несжимаемой жидкости, а также для электромагнитного векторного потенциала при калибровке $\varphi = 0$ в случае отсутствия свободных зарядов ρ. Уравнение простых гармонических колебаний упругой изотропной среды имеет вид

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{s} + \rho\omega^2\mathbf{s} = 0, \qquad (13.1.26)$$

откуда следует, что скорость распространения продольных волн отличается от скорости распространения поперечных, как было отмечено в гл. 2. В этом случае опять надо разделить продольную и поперечную части $\mathbf{s}$, искать их независимо друг от друга, а затем взять их линейную комбинацию с коэффициентами, зависящими от λ и μ. В этих более сложных случаях необходимо разделить аффинорную функцию Грина, определяемую формулой (13.1.25), на продольную и поперечную части.

Продольные и поперечные аффинорные функции Грина. Задача заключается в определении одного аффинорного поля, ротор которого равен нулю, и другого, с равной нулю дивергенцией, — таких, что их сумма дает аффинор, удовлетворяющий уравнению (13.1.24). По-видимому, задачу можно решить прямо «в лоб», но, как это часто бывает, легче угадать решение, а затем проверить, что это действительно есть решение. Конечно, такой способ не доказывает единственности найденного решения, но в гл. 1 уже была доказана единственность разделения вектора на продольную и поперечную части.

Естественно ожидать, что продольная часть окажется градиентом некоторой функции, зависящей от $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$. Требуемая условиями взаимности симметрия функции Грина означает, что если эта функция является градиентом по координатам $\mathbf{r}$, то она должна быть градиентом и по координатам $\mathbf{r}_0$ (иногда $\mathbf{r}_0$ мы будем заменять на $\mathbf{r}'$). Таким образом, простейшей формой этой функции является

$$\mathfrak{L}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k) = \frac{1}{k^2}\sum \mathbf{e}_m\mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x'_n}\, g(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k) = \frac{1}{k^2}\,\nabla g(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k)\,\nabla', \qquad (13.1.27)$$

где $g(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k)$ — обычная скалярная функция Грина e^{ikR}/R для неограниченного пространства, а $R^2 = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2$. Легко видеть, что $\partial g/\partial x_m = -\partial g/\partial x'_m$. Множитель $1/k^2$ введен для того, чтобы размерность у $\mathfrak{L}$ была той же, что и у g, например, длиной в степени -1.

Как показывает символическая запись $\nabla g \nabla'$ этой функции, и $\mathrm{rot}\,\mathfrak{L}$ и $\mathrm{rot}'\mathfrak{L}$ равны нулю; отсюда видно, что произведение аффинора $\mathfrak{L}$ на любой вектор дает продольный вектор. Для построения решения надо некоторую векторную функцию $\mathbf{F}$ от $\mathbf{r}'$ умножить на аффинорную функцию Грина и затем проинтегрировать полученное выражение по $\mathbf{r}'$. Умножив $\mathbf{F}$ на аффинор $\nabla g \nabla'$, найдем, что надо взять интеграл от вектора

$$F_x(\mathbf{r}')\,\mathrm{grad}\frac{\partial g}{\partial x'} + F_y(\mathbf{r}')\,\mathrm{grad}\frac{\partial g}{\partial y'} + F_z(\mathbf{r}')\,\mathrm{grad}\frac{\partial g}{\partial z'}$$

по $\mathbf{r}'$. Ротор полученного выражения по координатам без штрихов равен нулю при любой зависимости компонент F_x, F_y и F_z от $\mathbf{r}'$.

Перейдем к построению поперечной части аффинорной функции Грина для свободного пространства. Естественно предположить, что аффинор, соответствующий поперечным волнам, связан с ротором некоторой векторной функции от скалярной функции Грина g. Требование симметрии подсказывает выбор простейшей функции такого вида, которую мы символически записываем в форме $\nabla \times (\mathfrak{J}g) \times \nabla'$. Положим поэтому

$$\mathfrak{T}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k) = -\frac{1}{k^2}\nabla \times [\mathfrak{J}g(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k)] \times \nabla' =$$

$$= \frac{1}{k^2}\,\nabla \times \left[\mathbf{i}\frac{\partial g}{\partial z'}\mathbf{j} - \mathbf{i}\frac{\partial g}{\partial y'}\mathbf{k} - \mathbf{j}\frac{\partial g}{\partial z'}\mathbf{i} + \mathbf{j}\frac{\partial g}{\partial x'}\mathbf{k} + \mathbf{k}\frac{\partial g}{\partial y'}\mathbf{i} - \mathbf{k}\frac{\partial g}{\partial x'}\mathbf{j}\right] =$$

$$= \frac{1}{k^2}\left\{\mathbf{ii}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial y'} + \frac{\partial^2 g}{\partial z\,\partial z'}\right] - \mathbf{ij}\frac{\partial^2 g}{\partial y\,\partial x'} - \mathbf{ik}\frac{\partial^2 g}{\partial z\,\partial x'} + \ldots\right\}. \quad (13.1.28)$$

Поскольку $\partial g/\partial x' = -\partial g/\partial x$ и т. д., первый член в последнем выражении может быть переписан в виде

$$-\mathbf{ii}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right]\frac{1}{k^2} = -\frac{\mathbf{ii}}{k^2}\left[\nabla^2 g - \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial x'}\right],$$

а второй член заменен на $-(\mathbf{ij}/k^2)(\partial^2 g/\partial x\,\partial y')$ и т. д. Следовательно,

$$\mathfrak{T}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k) = -\frac{\mathfrak{J}}{k^2}\nabla^2 g - \frac{1}{k^2}\sum_{m,\,n}\mathbf{e}_m\mathbf{e}_n\frac{\partial^2 g}{\partial x_m\,\partial x_n'}.$$

Но $\nabla^2 g = -k^2 g - 4\pi\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$, так что окончательно

$$\mathfrak{J}g(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k) = \mathfrak{J}\frac{e^{ikR}}{R} = \mathfrak{L}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k) + \mathfrak{T}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k) - \frac{4\pi}{k^2}\mathfrak{J}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \quad (13.1.29)$$

Однако это разложение аффинорной функции Грина для свободного пространства не является наиболее удобным, так как в полученное выражение входит δ-функция, имеющая как продольную, так и поперечную части. Хотя мы получили разложение функции $\mathfrak{J}e^{ikR}/R$ на продольную и поперечную части всюду, за исключением точки $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$, в этой точке все же остается δ-функция. Из выражения (13.1.23) следует, что $\mathfrak{J}e^{ikR}/R$ можно разложить в сходящийся ряд по собственным функциям бесконечной области, в то время как разложение δ-функции

$$\mathfrak{J}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{\mathbf{F}}_n(\mathbf{r})\,\mathbf{F}_n(\mathbf{r}')}{\Lambda_n}$$

дается очень плохо сходящимся рядом; следовательно, разложения для $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{T}$ также будут плохо сходящимися. Очевидно, надо объединить «продольную часть» δ-функции с $\mathfrak{L}$, а «поперечную часть» с $\mathfrak{T}$, тогда функция $\mathfrak{J}g(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k)$ выразится просто как сумма продольного и поперечного аффиноров.

Получить явное выражение для продольной и поперечной частей сингулярного аффинора $\mathfrak{J}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ не просто, но легко можно определить их интегральные свойства и найти разложения по собственным векторам. Определим аффинорную функцию $\mathfrak{D}_l(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ как функцию, которая после умножения на любой вектор $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$ и интегрирования по $\mathbf{r}'$ дает именно *продольную часть* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Аналогично определим $\mathfrak{D}_t(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$: интегрируя по $\mathbf{r}'$ произведение $\mathfrak{D}_t(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ на вектор $\mathbf{F}(\mathbf{r}')$, получим *поперечную часть* $\mathbf{F}(\mathbf{r})$. Если для заданной области получены системы продольных собственных векторов $\mathbf{L}_n(\mathbf{r})$ [см. формулу (13.1.14)] и поперечных собственных векторов $\mathbf{M}_n(\mathbf{r})$ и $\mathbf{N}_n(\mathbf{r})$ данного уравнения, то

$$\mathfrak{D}_l(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \sum_n\frac{1}{\Lambda_n}\overline{\mathbf{L}}_n(\mathbf{r})\,\mathbf{L}_n(\mathbf{r}') \quad (13.1.30)$$

и

$$\mathfrak{D}_t(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \sum_n \left[\frac{1}{\Lambda_n'} \overline{\mathbf{M}}_n(\mathbf{r})\mathbf{M}_n(\mathbf{r}') + \frac{1}{\Lambda_n''} \overline{\mathbf{N}}_n(\mathbf{r})\mathbf{N}_n(\mathbf{r}') \right],$$

где n означает тройку индексов, принадлежащих скалярным собственным функциям φ_n, ψ_n и χ_n, а нормирующие коэффициенты для $\mathbf{L}_n$, $\mathbf{M}_n$ и $\mathbf{N}_n$ различаются при помощи одного и двух штрихов у Λ_n.

Мы можем поэтому определить две функции Грина, продольную $\mathfrak{G}_l$ и поперечную $\mathfrak{G}_t$, для неограниченного пространства так, что

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{G}_l(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k) = \frac{1}{k^2}[\nabla g(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k)\,\nabla' - 4\pi\mathfrak{D}_l(\mathbf{r}-\mathbf{r}')],\\
&\mathfrak{G}_t(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k) = \frac{1}{k^2}[-\nabla\times\mathfrak{J}g(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k)\times\nabla' - 4\pi\mathfrak{D}_t(\mathbf{r}-\mathbf{r}')],\\
&\mathfrak{J}g(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k) = \mathfrak{G}_l(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k) + \mathfrak{G}_t(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k),\\
&\mathfrak{J}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \mathfrak{D}_l(\mathbf{r}-\mathbf{r}') + \mathfrak{D}_t(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),
\end{aligned} \tag{13.1.31}$$

где $g(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k) = e^{ikR}/R$ — функция Грина трехмерного скалярного уравнения Гельмгольца для неограниченного пространства. Всюду, за исключением точки $\mathbf{r}=\mathbf{r}'$, $\mathfrak{G}_l$ совпадает с $\mathfrak{L}$, а $\mathfrak{G}_t$ с $\mathfrak{T}$, так что они могут быть подсчитаны в замкнутой форме. Например, для $g = e^{ikR}/R$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L} = \left[\mathfrak{J}\frac{1-ikR}{k^2R^2} - \frac{\mathbf{RR}}{R^2}\frac{3-ikR-k^2R^2}{k^2R^2}\right]\frac{e^{ikR}}{R},\\
&\mathfrak{T} - \frac{4\pi}{k^2}\mathfrak{J}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \left[-\mathfrak{J}\frac{1-ikR-k^2R^2}{k^2R^2} + \right.\\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\mathbf{RR}}{R^2}\frac{3-ikR-k^2R^2}{k^2R^2}\right]\frac{e^{ikR}}{R}.
\end{aligned} \tag{13.1.32}$$

Однако разложения по собственным функциям для $\mathfrak{G}_l$ и $\mathfrak{G}_t$ сходятся лучше по сравнению с разложениями для $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{T}$, так как сингулярность при $\mathbf{R}=0$ у функций $\mathfrak{G}$ значительно более простая, чем у $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{T}$. Например, разложение по собственным векторам $\mathbf{L}_n$, $\mathbf{M}_n$ и $\mathbf{N}_n$ для неограниченной области будет иметь вид

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{G}_l(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k) = 4\pi\sum_n \frac{\overline{\mathbf{L}}_n(\mathbf{r})\mathbf{L}_n(\mathbf{r}')}{\Lambda_n(k_n^2-k^2)},\\
&\mathfrak{G}_t(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k) = 4\pi\sum_n \left\{\frac{\overline{\mathbf{M}}_n(\mathbf{r})\mathbf{M}_n(\mathbf{r}')}{\Lambda_n'(k_n^2-k^2)} + \frac{\overline{\mathbf{N}}_n(\mathbf{r})\mathbf{N}_n(\mathbf{r}')}{\Lambda_n''(k_n^2-k^2)}\right\}.
\end{aligned} \tag{13.1.33}$$

Итак, функция Грина окончательно разложена на продольную и поперечную части, для которых получены достаточно хорошо сходящиеся разложения. Как будет показано ниже, можно получить подобные разложения и в случае внешних краевых задач в виде, аналогичном формулам (7.2.51) и (7.2.63).

Для того чтобы с помощью теоремы Грина можно было находить продольные и поперечные решения граничных задач, важно знать неоднородные уравнения, которым удовлетворяют продольные и поперечные функции Грина. Поскольку $\operatorname{rot}\mathfrak{G}_l = 0$, имеем

$$\begin{aligned}
(\operatorname{grad}\operatorname{div} + k^2)\,\mathfrak{G}_l(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k) = \frac{1}{k^2}\sum_{m,n} \mathbf{e}_m\mathbf{e}_n \frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_n'}(\nabla^2+k^2)\,g - \\
-\frac{4\pi}{k^2}\operatorname{grad}\operatorname{div}[\mathfrak{J}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] - 4\pi\mathfrak{D}_l(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -4\pi\mathfrak{D}_l(\mathbf{r}-\mathbf{r}');
\end{aligned}$$

вычитая этот результат из уравнения (13.1.24) для $\mathfrak{G}$, получим

$$(-\operatorname{rot}\operatorname{rot}+k^2)\,\mathfrak{G}_t(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k)=-4\pi\mathfrak{D}_t(\mathbf{r}-\mathbf{r}'), \tag{13.1.34}$$

так как $\operatorname{div}\mathfrak{G}_t=0$.

Следовательно, решение $\mathbf{F}_l$ уравнения

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F}_l+k^2\mathbf{F}_l=-4\pi\mathbf{Q}_l,$$

где $\mathbf{Q}_l$ — продольное поле, также будет продольным. Из формулы (13.1.7) следует, что это решение имеет вид

$$\mathbf{F}_l(\mathbf{r})=\iiint \mathfrak{G}_l(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|k)\cdot\mathbf{Q}_l(\mathbf{r}')\,dv'+\\+\frac{1}{4\pi}\oint[(\operatorname{div}'\mathbf{F})(\mathfrak{G}_l\cdot\mathbf{n})-(\operatorname{div}'\mathfrak{G}_l)(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})]\,dA'. \tag{13.1.35}$$

Наоборот, решение $\mathbf{F}_t$ уравнения

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F}_t+k^2\mathbf{F}_t=-4\pi\mathbf{Q}_t,$$

где $\operatorname{div}\mathbf{Q}_t=0$, является поперечным вектором. Оно имеет вид

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{r})=\iiint \mathfrak{G}_t(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k)\cdot\mathbf{Q}_t(\mathbf{r}')\,dv'-\\-\frac{1}{4\pi}\oint[\mathfrak{G}_t\cdot[\mathbf{n}\times\operatorname{rot}'\mathbf{F}]+(\operatorname{rot}'\mathfrak{G}_t)\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{F}]]\,dA'. \tag{13.1.36}$$

Обе эти формулы справедливы как внутри, так и на границе S.

Если в уравнении

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F}+k^2\mathbf{F}=-4\pi\mathbf{Q}$$

Q не является поперечным вектором, то **F** также не является полностью поперечным. В качестве функции Грина возьмем

$$\mathfrak{G}_c=\mathfrak{G}_t-\frac{4\pi}{k^2}\mathfrak{D}_l=\mathfrak{J}g(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k)-\mathfrak{L}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,k).$$

В этом случае легко показать, что поперечная часть функции **F** выражается формулой (13.1.36), в которой $\mathfrak{G}_t$ надо заменить на $\mathfrak{G}_c$ и использовать лишь поперечную часть $\mathbf{Q}_t$ вектора **Q**. Продольной частью **F** будет просто

$$\mathbf{F}_l=-\frac{4\pi}{k^2}\mathbf{Q}_l, \tag{13.1.37}$$

где $\mathbf{Q}_l$ — продольная часть **Q**. Это можно проверить непосредственной подстановкой в уравнение для **F**. В этом случае формула, выражающая $\mathbf{F}_t$ через $\mathfrak{G}_c$, верна внутри области, но не имеет места на границе, так как в поверхностный интеграл войдет дополнительно δ-функция.

Аффинорные функции Грина для упругих колебаний. Уравнение упругих колебаний изотропной среды можно записать в виде

$$c_l^2\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F}-c_t^2\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F}+\omega^2\mathbf{F}=-4\pi\mathbf{Q}, \tag{13.1.38}$$

где $c_l=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ — скорость распространения продольных, а $c_t=\sqrt{\mu/\rho}$ — скорость распространения поперечных волн, ρ — плотность среды; $\mathbf{Q}=\mathbf{f}/\rho$, где $\mathbf{f}$ — плотность объемных сил, и $\omega/2\pi$ — частота вынужденных колебаний.

Функция Грина для этого случая имеет вид

$$\mathfrak{G}_e(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,\omega)=\frac{1}{c_l^2}\mathfrak{G}_l\left(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,\frac{\omega}{c_l}\right)+\frac{1}{c_t^2}\mathfrak{G}_t\left(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,\frac{\omega}{c_t}\right), \qquad (13.1.39)$$

где $\mathfrak{G}_l$ и $\mathfrak{G}_t$ — аффиноры, определенные формулами (13.1.31). Отметим, что для двух частей аффинорной функции Грина исходные скалярные функции Грина g различны, что соответствует различным скоростям распространения двух типов волн. Они совпадают при $R\to 0$ и оказываются в разных фазах для больших R. Решение уравнения (13.1.38) в таком случае можно представить в форме

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=\iiint \mathfrak{G}_e(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}'\,|\,\omega)\cdot\mathbf{Q}(\mathbf{r}')\,dv'+$$
$$+\frac{1}{4\pi}c_l^2\oint[(\mathfrak{G}_e\cdot\mathbf{n})(\operatorname{div}'\mathbf{F})-(\operatorname{div}'\mathfrak{G}_e)(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})]\,dA'-$$
$$-\frac{1}{4\pi}c_t^2\oint[\mathfrak{G}_e\cdot(\mathbf{n}\times\operatorname{rot}'\mathbf{F})+(\operatorname{rot}'\mathfrak{G}_e)\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{F})]\,dA', \qquad (13.1.40)$$

где $\operatorname{div}\mathfrak{G}_e=(1/c_l^2)\operatorname{div}\mathfrak{G}_l$ и $\operatorname{rot}\mathfrak{G}_e=(1/c_t^2)\operatorname{rot}\mathfrak{G}_t$ взяты для значений $\mathbf{r}'$ на границе S.

Подчеркнем еще раз, что для определения решений неоднородного уравнения Гельмгольца нет необходимости в сложных построениях этого раздела; для этого достаточно простой аффинорной функции Грина, например, определенной формулой (13.1.25). Если поле источников $\mathbf{Q}$ является поперечным, то решение [выражаемое формулами (13.1.10), (13.1.11), (13.1.12) или (13.1.13)] автоматически окажется поперечным; для продольного поля $\mathbf{Q}$ решение соответственно будет продольным. Лишь при решении уравнения

$$a\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F}-b\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F}+k^2\mathbf{F}=-4\pi\mathbf{Q}$$

для $a\neq b$ приходится разлагать функцию Грина на продольную и поперечную части, как было сделано в настоящем разделе.

Наконец, полезно отметить поведение аффиноров $\mathfrak{G}_l$ и $\mathfrak{G}_t$ для больших и малых, но отличных от нуля, значений kR. Это будет показано на примере векторного поля, получающегося применением каждого из операторов $\mathfrak{G}$ к единичному вектору $\mathbf{i}=\mathbf{e}_1$ (результаты применения операторов к векторам $\mathbf{j}$ или $\mathbf{k}$ полностью аналогичны, поскольку аффиноры являются сферически симметричными относительно $R=0$). Для сравнения приведены результаты для простого аффинора $\mathfrak{G}=\mathfrak{I}g$. При $kR\to\infty$ имеем

$$\begin{gathered}\mathfrak{G}\cdot\mathbf{i}\to\mathbf{i}\,\frac{e^{ikR}}{R}; \qquad \mathfrak{G}_l\cdot\mathbf{i}\to\mathbf{a}_R\cos\vartheta\,\frac{e^{ikR}}{R},\\ \mathfrak{G}_t\cdot\mathbf{i}\to(\mathbf{i}-\mathbf{a}_R\cos\vartheta)\frac{e^{ikR}}{R}=\mathbf{a}_\vartheta\sin\vartheta\,\frac{e^{ikR}}{R},\end{gathered} \qquad (13.1.41)$$

где $\mathbf{a}_R$ — единичный вектор, направленный из точки источника $\mathbf{r}'$ к точке наблюдения $\mathbf{r}$, ϑ — угол между $\mathbf{a}_R$ и осью x ($\cos\vartheta=\mathbf{i}\cdot\mathbf{a}_R$), а $\mathbf{a}_\vartheta$ — единичный вектор, перпендикулярный $\mathbf{a}_R$, компланарный с $\mathbf{i}$ и $\mathbf{a}_R$ и составляющий острый угол с осью x. Из этих формул следует, что $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_t+\mathfrak{G}_l$, а также видно, почему $\mathfrak{G}_l$ названа продольной, а $\mathfrak{G}_t$ — поперечной функцией.

Для $1 \gg kR > 0$ имеем

$$\mathfrak{G}\cdot\mathbf{i} \simeq \mathbf{i}\cdot\frac{1}{R},$$

$$\mathfrak{G}_l\cdot\mathbf{i} \simeq -\mathfrak{G}_t\cdot\mathbf{i} \simeq (\mathbf{a}_\vartheta \sin\vartheta - 2\mathbf{a}_R\cos\vartheta)\frac{1}{k^2R^3} =$$

$$= -[2\mathbf{i}P_2(\cos\vartheta) + P_2^1(\cos\vartheta)(\mathbf{j}\cos\varphi + \mathbf{k}\sin\varphi)]\frac{1}{k^2R^3},$$

где φ — угол между плоскостью ($\mathbf{i}$, $\mathbf{a}_R$) и плоскостью (x, y). Отметим, что для этого интервала значений kR величины $\mathfrak{G}_l$ и $\mathfrak{G}_t$ значительно больше $\mathfrak{G}$, но противоположны по знаку, так что они почти полностью компенсируют друг друга, оставляя лишь $\mathfrak{G}$. Из первого выражения для $\mathfrak{G}_l\cdot\mathbf{i}$ следует, что для $\mathbf{a}_R$, совпадающего с осью x, вектор $\mathfrak{G}_l\cdot\mathbf{i}$ составляет с осью x тупой угол, в то время как для $\mathbf{a}_R$, перпендикулярного оси x, этот вектор составляет острый угол с осью x. Для промежуточных направлений рассматриваемый вектор всегда лежит в плоскости ($\mathbf{i}$, $\mathbf{a}_R$) и составляет угол $\pi + \operatorname{arc\,ctg}((1/3)\operatorname{cosec} 2\vartheta + \operatorname{ctg} 2\vartheta)$ с осью x. Из второго выражения для $\mathfrak{G}_l\cdot\mathbf{i}$ следует, что, проинтегрировав эти весьма большие значения величины поля для малых kR по всем направлениям, мы получим нуль (надо помножить на $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ и интегрировать по ϑ и φ при постоянном значении kR). Движение среды в окрестности $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ аналогично «дымовому кольцу» или вихревому кольцу с осью кольца, совпадающей с осью x (или направлением любого другого постоянного вектора, на который действуют операторы $\mathfrak{G}$).

Решения векторного уравнения Лапласа. В пределе при $k \to 0$ некоторые части решений расходятся или обращаются в нуль. Если это допускается граничными условиями, то выражение $\mathbf{i}U + \mathbf{j}V + \mathbf{k}W$ и в этом случае определяет искомые решения. При этом решение векторного уравнения сводится к решению трех скалярных уравнений типа, рассмотренного в гл. 10. Но при попытке разложить решение на систему продольных и две системы поперечных полей [определяемых формулами (13.1.6)] возникают затруднения. Эти затруднения связаны с продольным решением, хотя на первый взгляд кажется, что все дело во втором поперечном решении $\mathbf{N}$, содержащем множитель $1/k$. Чтобы получить конечный результат при $k \to 0$, умножим $\mathbf{N}$ на k. Однако легко видеть, что $k\mathbf{N}$ при $k \to 0$ стремится к *продольному* вектору, так как это выражение переходит в $\operatorname{grad}[\partial(w\chi)/\partial\xi_1]$, где χ — решение уравнения Лапласа.

Дальнейшее исследование показывает, что в пределе при $k \to 0$ система решений $\mathbf{N}$ оказывается линейной комбинацией системы решений $\mathbf{L}$, определенных в (13.1.6). Эти функции уже не являются независимыми, и тем самым потеряна одна из искомых систем решений в разложении общего решения на продольное и два поперечных. Обращаясь к $\mathbf{L}$, нетрудно видеть, что в пределе при $k \to 0$ система $\mathbf{L}$ (а следовательно, и $\mathbf{N}$, так как эти системы эквивалентны) либо является *и* продольной *и* поперечной, либо не является *ни* продольной, *ни* поперечной, в зависимости от точки зрения. Действительно, в пределе φ является решением скалярного уравнения Лапласа, так что $\operatorname{div}(\operatorname{grad}\varphi) = \operatorname{div}\mathbf{L} = 0$; *и* $\operatorname{div}\mathbf{L}$ *и* $\operatorname{rot}\mathbf{L}$ равны нулю (аналогично и для $\mathbf{N}$).

Итак, получены две системы решений, $\mathbf{N}$ (или $\mathbf{L}$) и $\mathbf{M}$, у одной из которых, $\mathbf{M}$, дивергенция равна нулю, а ротор отличен от нуля, а у другой, $\mathbf{N}$, и дивергенция и ротор равны нулю. Этого достаточно, если рассматриваются только поперечные решения, например, для определения векторных потенциалов. В окончательном ответе при вычислении ротора векторного потенциала будет использоваться лишь система $\mathbf{M}$. Однако система $\mathbf{N}$ может понадобиться для удовлетворения граничным условиям.

Особые трудности возникают при определении чисто продольных решений *векторного* уравнения Лапласа, т. е. векторного поля $\mathbf{F}$, удовлетворяющего уравнению $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{F}=0$, у которого ротор равен нулю, а дивергенция *отлична от нуля*. Если ротор вектора $\mathbf{F}$ равен нулю, то его можно представить в виде градиента некоторого скаляра χ, и $\operatorname{grad}\operatorname{div}\operatorname{grad}\chi = \operatorname{grad}\nabla^2\chi=0$. Следовательно, если выбрать в качестве χ решение уравнения $\nabla^2\chi=0$, то дивергенция вектора $\mathbf{F}=\operatorname{grad}\chi$ будет равна нулю; можно взять в качестве χ решение уравнения $\nabla^2\chi=\mathrm{const}$, но при таком выборе χ мы не получим полной системы продольных полей.

Однако векторное поле $\mathbf{a}_1\chi$, где χ — решение уравнения $\nabla^2\chi=0$, а $\mathbf{a}_1$ — единичный вектор вдоль оси x, y или z, является решением векторного уравнения Лапласа, дивергенция которого, вообще говоря, отлична от нуля. Но это поле не является продольным, так как его ротор, вообще говоря, отличен от нуля. Можно попытаться выделить из $\mathbf{a}_1\chi$ продольную часть при помощи соотношения (1.5.16):

$$F_l=\operatorname{grad}\left\{\iiint\frac{\partial\chi/\partial\xi_1}{R}\,dv'\right\}.$$

Исследование различных возможных решений χ скалярного уравнения Лапласа показывает, что если интеграл в фигурных скобках отличен от постоянной, то он *расходится*. Поэтому не существует чисто продольных решений векторного уравнения Лапласа, дивергенция которых отлична от нуля. При рассмотрении решений с отличной от нуля дивергенцией надо использовать либо систему $\mathbf{i}U+\mathbf{j}V+\mathbf{k}W$, либо смешанную систему $\mathbf{a}_1\chi+\mathbf{M}+\mathbf{N}$.

Задача оказывается еще более сложной в случае статического смещения изотропной упругой среды, так как при этом выражение $\mathbf{a}_1\chi$ обычно не является решением соответствующего уравнения. Кроме того, поперечные части решения, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, в задачах статической теории упругости оказываются несущественными по сравнению с продольной частью; они описывают неизбежное скручивание среды, необходимое, чтобы удовлетворить граничным условиям для смещений. Продольная же часть играет главную роль по отношению к внутренним напряжениям и массовым силам, таким, как сила тяжести.

Уравнение, которое нужно решить, имеет вид

$$\nabla\cdot\mathfrak{T}=(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{s}-\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{s}=(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{s}+\mu\nabla^2\mathbf{s}=-\mathbf{F},$$

где $\mathbf{s}$ — смещение среды, $\mathfrak{T}$ — аффинор напряжений, $\mathbf{F}$ — массовая сила. В уравнении отсутствует член $k^2\mathbf{s}$, и дивергенция $\mathfrak{T}$, если она отлична от нуля, будет продольным вектором, так как в случаях, представляющих практический интерес, вектор $\mathbf{F}$, являющийся градиентом потенциальной энергии ($\mathbf{F}=-\operatorname{grad}V$), оказывается продольным. Следовательно, часть дивергенции $\mathfrak{T}$, определяемая поперечной компонентой вектора $\mathbf{s}$, в точности равна нулю, а тем самым поперечная составляющая $\mathbf{s}$ не участвует в уравновешивании массовых сил. Независимо от вида $\mathbf{F}$ (до тех пор пока $\mathbf{F}$ является консервативным полем) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}$ от частей смещения $\mathbf{s}$, определяемых векторами $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$, должен равняться нулю.

Однако требуемое уравнение для продольной части $\mathbf{s}$ можно получить из приведенного выше уравнения. Положив $\mathbf{s}=\mathbf{L}=\operatorname{grad}\varphi$, получим

$$(\lambda+\mu)\operatorname{grad}(\nabla^2\varphi)+\mu\nabla^2(\operatorname{grad}\varphi)=(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}(\nabla^2\varphi)=\operatorname{grad}V, \qquad (13.1.42)$$

и чтобы быть уверенным, что в это выражение не вошли поперечные решения, возьмем дивергенцию полученного выражения. Это даст

$$\nabla^4\varphi=\operatorname{div}\operatorname{grad}(\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi)=\frac{1}{\lambda+2\mu}\nabla^2V. \qquad (13.1.43)$$

Если потенциал массовых сил удовлетворяет уравнению Лапласа, то функция φ должна быть решением *бигармонического уравнения* $\nabla^4\varphi = 0$. Отсюда получим продольную часть смещения. Конечно, надо так выбрать решение уравнения (13.1.43), чтобы выполнялось и уравнение (13.1.42), а затем достаточно добавить поперечное решение для удовлетворения граничным условиям.

Во многих случаях определение смещения не является настолько полезным, чтобы отыскивать его первым. Из-за наличия сравнительно несущественных частей $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ решение оказывается загроможденным ненужными подробностями. Кроме того, в практических задачах на границе области часто задаются напряжения, а не смещения. Поэтому в статическом случае часто рекомендуется считать основным полем поле напряжений, а не смещений. В силу симметрии аффинора напряжений его можно выразить через симметричные дифференциальные операции над скалярной *функцией напряжений* Ω:

$$\mathfrak{T} = \nabla\Omega\nabla, \quad \nabla^4\Omega = \nabla^2 V,$$

где Ω выбрана так, что $\nabla\cdot\mathfrak{T} = \mathrm{grad}(\nabla^2\Omega) = \mathrm{grad}\, V$. (Три соотношения для трех компонент этого выражения часто называются *уравнениями совместности*.) Таким образом, функция напряжений Ω удовлетворяет тому же уравнению, что и φ. Скалярная функция Ω связана со смещением $\mathbf{s}$ уравнением

$$\nabla\Omega\nabla = \lambda\mathfrak{J}\,\mathrm{div}\,\mathbf{s} + \mu(\nabla\mathbf{s} + \mathbf{s}\nabla).$$

Если Ω известна, то $\mathbf{s}$ можно определить, интегрируя это уравнение.

При использовании метода функции Грина для определения решения возникают те же затруднения, что и раньше. Пока не надо разделять продольную и поперечную части решения, задача решается несложно. Можно пользоваться формулой (13.1.10), где аффинорная функция Грина для неограниченного пространства имеет вид

$$\mathfrak{G}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0) = \mathfrak{J}/R. \tag{13.1.44}$$

При этом не появляется никаких расходимостей. Затруднения возникают, если нужно разделить влияние продольной и поперечной частей, что, например, важно в случае равновесия упругого твердого тела. Уравнения для $\mathfrak{G}$ имеют вид

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{G} = -\frac{\mathfrak{J}}{R^3} + 3\frac{\mathbf{RR}}{R^5},$$
$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{G} = 4\pi\mathfrak{J}\delta + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{G},$$

так что $\mathfrak{G}$ не является решением статического уравнения упругости

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{G}_e - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{G}_e = -4\pi\mathfrak{J}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{13.1.45}$$

Хотя не всегда можно разложить векторное решение уравнения Лапласа на конечные продольную и поперечную части, оказывается, что это можно сделать для аффинора $\mathfrak{G}$. Применим формулу

$$\nabla\times\mathfrak{J}f(R)\times\nabla' = -\mathfrak{J}\nabla^2 f - \nabla f\nabla'$$

и выберем f так, чтобы $\nabla^2 f = 1/R$. Для неограниченного пространства надо взять $f(R) = R/2$. Поэтому положим

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}\nabla R\nabla' = -\mathfrak{G}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}') - \frac{1}{2}\nabla\times\mathfrak{J}R\times\nabla' = -\frac{1}{2}\mathfrak{G} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{RR}}{R^3}, \tag{13.1.46}$$
$$\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E} = -\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{G}.$$

Решение уравнения (13.1.45) можно получить в виде линейной комбинации $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{E}$. Подставляя эту комбинацию в уравнение (13.1.45) и используя для определения коэффициентов соотношение (13.1.46), найдем, что в неограниченном пространстве

$$\mathfrak{G}_e(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}') = \frac{1}{\mu}\mathfrak{G} + \frac{\lambda+\mu}{\mu(\lambda+2\mu)}\mathfrak{E} = \frac{\lambda+3\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\frac{\mathfrak{J}}{R} + \frac{\lambda+\mu}{2\mu(\lambda+2\mu)}\frac{\mathbf{RR}}{R^3}, \quad (13.1.47)$$

и решение уравнения

$$(\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{F} - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = -4\pi\mathbf{Q}$$

имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \iiint \mathfrak{G}_e(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}')\cdot\mathbf{Q}(\mathbf{r}')\,dv' &+ \\ +\frac{\lambda+2\mu}{4\pi}\oint [(\mathrm{div}'\,\mathbf{F})(\mathfrak{G}_e\cdot\mathbf{n}) - (\mathrm{div}'\,\mathfrak{G}_e)(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})]\,dA' &- \\ -\frac{\mu}{4\pi}\oint [\mathfrak{G}_e\cdot(\mathbf{n}\times\mathrm{rot}'\,\mathbf{F}) + (\mathrm{rot}'\,\mathfrak{G}_e)\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{F})]\,dA' & \quad (13.1.48)\end{aligned}$$

внутри и на граничной поверхности, по которой берутся два последних интеграла.

Для ограниченных областей функцию $\mathfrak{G}_e$ следует преобразовать, прибавив решение однородного уравнения, аналитическое внутри граничной поверхности. При этом получим соответствующую аффинорную функцию Грина, удовлетворяющую одному из четырех однородных граничных условий, рассмотренных в этом разделе ранее. Аналогичный метод для скалярного случая был разобран в гл. 7; ниже он будет еще раз проиллюстрирован на примерах. Как мы увидим ниже, в некоторых случаях выгоднее определять напряжения, а не смещения.

Последним интересным случаем является решение неоднородного уравнения

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = 4\pi\mathbf{Q}, \quad (13.1.49)$$

где $\mathbf{Q}$—поперечный вектор. Это, например, имеет место в случае электромагнитного поля при отсутствии свободных зарядов q и неизменной во времени плотности тока $\mathbf{J}$ (для того, чтобы выполнялось $\mathrm{div}\,\mathbf{J}=0$). Положим $\mathbf{Q}=\mathbf{J}/c$; $\mathbf{F}=\mathbf{A}$ — векторный потенциал, напряженность магнитного поля $\mathbf{H}=(1/\mu)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$. Тогда $\mathbf{A}$ связан с $\mathbf{J}$ соотношением (13.1.49).

Так как представляют интерес лишь поперечные части векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{J}$ и в особенности $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, то можно непосредственно искать вектор $\mathrm{rot}\,\mathbf{F}$. Это исключит неприятную продольную часть и упростит вычисления. В качестве функции Грина возьмем $\mathfrak{C}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}') = \mathrm{rot}\,\mathfrak{G}(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}')$, а не саму функцию $\mathfrak{G}$. Эта функция обладает большей частью свойств функции Грина, однако меняет знак при замене $\mathbf{r}$ на $\mathbf{r}'$. Она должна удовлетворять уравнению

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{C} = 4\pi\,\mathrm{rot}\,[\mathfrak{J}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]. \quad (13.1.50)$$

Комбинируя это уравнение с (13.1.49), получаем

$$\begin{aligned}\iiint \{(\mathrm{rot}'\mathrm{rot}'\mathfrak{C})\cdot\mathbf{F} - \mathfrak{C}\cdot(\mathrm{rot}'\,\mathrm{rot}'\mathbf{F})\}\,dv' &= \\ = 4\pi\iiint \{\mathbf{F}\cdot\mathrm{rot}'\,[\mathfrak{J}\,\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')] - \mathfrak{C}\cdot\mathbf{Q}(\mathbf{r}')\}\,dv' &= \\ = -\oint \{\mathfrak{C}\cdot[\mathbf{n}\times\mathrm{rot}'\,\mathbf{F}] + (\mathrm{rot}'\,\mathfrak{C})\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{F}]\}\,dA'&.\end{aligned}$$

Но

$$\iiint \operatorname{div}' [\mathbf{F} \times \mathfrak{J}\delta]\, dv' = \oint [\mathbf{F} \times \mathbf{n}]\, \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\, dA' =$$
$$= \iiint \{\delta\mathfrak{J} \cdot (\operatorname{rot}' \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}' (\mathfrak{J}\delta)\}\, dv',$$

или

$$-\iiint \mathbf{F} \cdot \operatorname{rot}' (\mathfrak{J}\delta)\, dv' = -\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) +$$
$$+ \begin{cases} 0 & \text{для } \mathbf{r} \text{ внутри } S, \\ [\mathbf{F} \times \mathbf{n}] & \text{для } \mathbf{r} \text{ на } S, \end{cases}$$

так что окончательно

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \iiint \mathfrak{C} \cdot \mathbf{Q}\, dv' -$$
$$- \frac{1}{4\pi} \oint [\mathfrak{C} \cdot (\mathbf{n} \times \operatorname{rot}' \mathbf{F}) + (\operatorname{rot}' \mathfrak{C}) \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{F})]\, dA' \quad \text{для } \mathbf{r} \text{ внутри } S. \qquad (13.1.51)$$

Однако так как $\mathfrak{C}$ является ротором аффинорной функции Грина $\mathfrak{G}$, удовлетворяющей уравнению $\nabla^2\mathfrak{G} = -4\pi\mathfrak{J}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, то можно проинтегрировать уравнение (13.1.51), чтобы получить выражение векторного потенциала через обычную аффинорную функцию Грина.

В результат может войти произвольное продольное поле, но это не существенно при вычислении ротора $\mathbf{F}$, определяющего напряженность магнитного поля (или поля скоростей в задаче о течении несжимаемой вязкой жидкости). Итак, формула

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \iiint \mathfrak{G} \cdot \mathbf{Q}(\mathbf{r}')\, dv' -$$
$$- \frac{1}{4\pi} \oint \{\mathfrak{G} \cdot [\mathbf{n} \times \operatorname{rot}' \mathbf{F}] + (\operatorname{rot}' \mathfrak{G}) \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{F}]\}\, dA' \qquad (13.1.52)$$

дает выражение для вычисления векторного потенциала, причем нас интересует только его ротор.

Функции Грина волнового уравнения. Решение волнового уравнения можно искать либо непосредственно методом, которым получены выражения (7.3.5) и (7.3.8), либо при помощи преобразования Лапласа. Например, чтобы из решения уравнения Гельмгольца для заданной частоты $\omega = ip$ получить решение для мгновенного импульса, приложенного в момент $t = t_0$, надо решение уравнения Гельмгольца умножить на $e^{-i\omega(t-t_0)}(d\omega/2\pi)$ и проинтегрировать результат по ω от $-\infty + i\varepsilon$ до $+\infty + i\varepsilon$. С другой стороны, можно в таблице преобразований Лапласа, приведенной в конце гл. 11, найти функцию $f(t)$, которая, будучи умножена на e^{-pt} и проинтегрирована по t от 0 до ∞, дает нужное решение уравнения Гельмгольца как функцию от $p = -i\omega$.

Будем искать аффинорную функцию Грина для единичного импульса, приложенного в точке $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Для бесконечного пространства этот аффинор удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2\mathfrak{G} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathfrak{G} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,\delta(t - t_0)\,\mathfrak{J}.$$

Так как правая часть этого уравнения представляет преобразование Лапласа для функции $-4\pi\mathfrak{J}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$, то искомый аффинор является преобразованием Лапласа определяемой выражением (13.1.25) аффинорной функции Грина уравнения Гельмгольца для неограниченного пространства:

$$\mathfrak{G}_0(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = \mathfrak{J}\frac{1}{R}\delta\left[t - t_0 - \frac{R}{c}\right]. \qquad (13.1.53)$$

Если область определения решения ограничена и функция Грина уравнения Гельмгольца имеет вид $\mathfrak{G}_0(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0 \mid ip/c) + \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — некоторый аналитический внутри области аффинор, добавляемый для того, чтобы удовлетворялись граничные условия, то соответствующая функция Грина, зависящая от времени, определяется формулой

$$\mathfrak{G}(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) = \mathfrak{G}_0(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0) + \mathfrak{F}_0(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0),$$

где

$$\int_0^\infty e^{-pt}\mathfrak{F}_0(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, 0)\,dt = \mathfrak{F}\left(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0 \mid \frac{ip}{c}\right),$$

т. е. $\mathfrak{F}$ — преобразование Лапласа для $\mathfrak{F}_0$.

Этих функций достаточно, чтобы получить формулы, соответствующие формулам (13.1.10) и (13.1.12). Выражение, аналогичное (7.3.5), имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = &\int_0^{t+} dt_0 \iiint \mathfrak{G}(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0)\cdot\mathbf{Q}(\mathbf{r}_0, t_0)\,dv_0 + \\
&+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{t+} dt_0 \oint \{(\operatorname{div}_0\mathbf{F})(\mathfrak{G}\cdot\mathbf{n}) - (\operatorname{div}_0\mathfrak{G})(\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}) - \\
&- \mathfrak{G}\cdot[\mathbf{n}\times\operatorname{rot}_0\mathbf{F}] - (\operatorname{rot}_0\mathfrak{G})\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{F}]\}\,dA_0 - \\
&- \frac{1}{c^2}\iiint\left[\left(\frac{\partial}{\partial t_0}\mathfrak{G}\right)\cdot\mathbf{F} - \mathfrak{G}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t_0}\mathbf{F}\right)\right]_{t_0=0} dv_0;
\end{aligned} \qquad (13.1.54)$$

последний интеграл берется от начальных значений $\mathbf{F}$ и скорости их изменения в начальный момент.

Если рассматриваются продольные или поперечные колебания, то надо воспользоваться преобразованием Лапласа функций Грина, определенных выражениями (13.1.31):

$$\begin{aligned}
\mathfrak{G}_l(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0 \mid c) = &-\frac{\mathfrak{J}}{R}\left[\left(\frac{c}{R}\right)^2 v(z) + \frac{c}{R}u(z)\right] + \\
&+ \frac{\mathbf{RR}}{R^3}\left[3\left(\frac{c}{R}\right)^2 v(z) + \frac{c}{R}u(z) + \delta(z)\right] - 4\pi\mathfrak{D}_l(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,v(z); \\
\mathfrak{G}_t(\mathbf{r}, t \mid \mathbf{r}_0, t_0 \mid c) = &\frac{\mathfrak{J}}{R}\left[\left(\frac{c}{R}\right)^2 v(z) + \frac{c}{R}u(z) + \delta(z)\right] - \\
&- \frac{\mathbf{RR}}{R^3}\left[3\left(\frac{c}{R}\right)^2 v(z) + \frac{c}{R}u(z) + \delta(z)\right] + 4\pi\mathfrak{D}_t(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\,v(z).
\end{aligned} \qquad (13.1.55)$$

где $z = t - t_0 - (R/c)$, а $u(z)$ и $v(z)$ являются последовательными интегралами от δ-функции:

$$u(z) = \int_{-\infty}^{z}\delta(x)\,dx = \begin{cases} 0 \text{ при } z < 0, \\ 1 \text{ при } z > 0, \end{cases} \quad v(z) = \int_{-\infty}^{z} u(x)\,dx = \begin{cases} 0 \text{ при } z < 0, \\ z \text{ при } z > 0. \end{cases}$$

На больших расстояниях заметен только импульс, продольные и поперечные колебания взаимно ортогональны, их сумма равна $(\mathfrak{J}/R)\delta(z)$. На малых расстояниях ($R \ll ct$) заметно, как, начиная с момента $t = 0$, постепенно возникает вихревое кольцо, описанное выше на стр. 724; его временна́я зависимость выражается функцией $v[t - t_0 - R/c]$.

Используя эти импульсные продольную и поперечную волны, можно распространить формулы (13.1.35), (13.1.36) и (13.1.40) на случай временной зависимости, интегрируя объемные и поверхностные интегралы в этих формулах по t_0 от 0 до $t+\varepsilon$ и добавляя дополнительный объемный интеграл от начальных значений функции **F** и ее производной по времени, аналогичный последнему члену в формуле (13.1.54). Например, аффинор смещений изотропной упругой среды является комбинацией продольного аффинора со скоростью распространения волн $c_l=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ и поперечного аффинора со скоростью распространения волн $c_t=\sqrt{\mu/\rho}$; эта комбинация подобна выражению (13.1.39). Приложения многих из этих формул будут даны в последующих параграфах.

13.2. Статические и стационарные решения

Статические и стационарные векторные поля приходится рассматривать в трех случаях, представляющих физический интерес: магнитных полей, обусловленных постоянным током, статических деформаций упругой среды и стационарного потока вязкой жидкости. Для каждых двух из этих трех случаев решение и граничные условия несколько различаются. Другие физически интересные случаи, как, например, статическое электрическое поле или поток идеальной жидкости, можно получить из скалярного поля методом, рассмотренным в гл. 10; поэтому здесь их рассматривать излишне. Основное внимание в этой главе будет сосредоточено на векторных полях, которые нельзя выразить через одну скалярную функцию.

В случае магнитного поля **H** будем искать векторный потенциал **A**, связанный с **H** соотношением $\mathbf{H}=\operatorname{rot}\mathbf{A}$. При наличии тока **J** имеет место уравнение

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}=\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{J}. \qquad (13.2.1)$$

Магнитная проницаемость μ обычно равна единице, за исключением ферромагнитных материалов. В первом приближении можно принять, что магнитная проницаемость железа бесконечно велика; в этом случае вектор **H** должен быть нормален к поверхности железного образца. Поэтому нормальная компонента **A** равна нулю на этой поверхности, так же как и нормальная составляющая градиента касательной компоненты **A**.

Поскольку для статического случая $\operatorname{div}\mathbf{J}=0$, мы можем считать, что **A** является решением векторного уравнения Пуассона

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{J}. \qquad (13.2.2)$$

При этом обычно **A** полезно считать имеющим и продольную часть, что облегчает вычисления. Наличие продольной части **A** не влияет на распределение магнитного поля, которое зависит только от поперечной части **A**.

Смещение **s** изотропной упругой среды под действием объемной силы $4\pi\mathbf{F}$ *дин/см*^{3} определяется уравнением

$$(\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{s}-\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{s}=(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{s}+\mu\nabla^2\mathbf{s}=-4\pi\mathbf{F}. \qquad (13.2.3)$$

Как было отмечено выше, точно удовлетворить граничным условиям, разделяя переменные в уравнении, можно лишь в случае полярных (плоских) и сферических координат; в других системах координат были получены лишь приближенные решения. Здесь также удобно, хотя и не всегда, разложить поле на продольную и поперечную части. Граничные условия задают либо смещения, либо напряжения на границе. Если граничная поверхность нормальна оси z, то вектор напряжения **T** зависит от степени изменения **s**