

Используя эти импульсные продольную и поперечную волны, можно распространить формулы (13.1.35), (13.1.36) и (13.1.40) на случай временной зависимости, интегрируя объемные и поверхностные интегралы в этих формулах по t_0 от 0 до $t + \varepsilon$ и добавляя дополнительный объемный интеграл от начальных значений функции F и ее производной по времени, аналогичный последнему члену в формуле (13.1.54). Например, аффинов смещений изотропной упругой среды является комбинацией продольного аффинора со скоростью распространения волн $c_l = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ и поперечного аффинора со скоростью распространения волн $c_t = \sqrt{\mu/\rho}$; эта комбинация подобна выражению (13.1.39). Приложения многих из этих формул будут даны в последующих параграфах.

13.2. Статические и стационарные решения

Статические и стационарные векторные поля приходится рассматривать в трех случаях, представляющих физический интерес: магнитных полей, обусловленных постоянным током, статических деформаций упругой среды и стационарного потока вязкой жидкости. Для каждого из этих трех случаев решение и граничные условия несколько различаются. Другие физически интересные случаи, как, например, статическое электрическое поле или поток идеальной жидкости, можно получить из скалярного поля методом, рассмотренным в гл. 10; поэтому здесь их рассматривать излишне. Основное внимание в этой главе будет сосредоточено на векторных полях, которые нельзя выразить через одну скалярную функцию.

В случае магнитного поля \mathbf{H} будем искать векторный потенциал \mathbf{A} , связанный с \mathbf{H} соотношением $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$. При наличии тока \mathbf{J} имеет место уравнение

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{J}. \quad (13.2.1)$$

Магнитная проницаемость μ обычно равна единице, за исключением ферромагнитных материалов. В первом приближении можно принять, что магнитная проницаемость железа бесконечно велика; в этом случае вектор \mathbf{H} должен быть нормален к поверхности железного образца. Поэтому нормальная компонента \mathbf{A} равна нулю на этой поверхности, так же как и нормальная составляющая градиента касательной компоненты \mathbf{A} .

Поскольку для статического случая $\text{div } \mathbf{J} = 0$, мы можем считать, что \mathbf{A} является решением векторного уравнения Пуассона

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{J}. \quad (13.2.2)$$

При этом обычно \mathbf{A} полезно считать имеющим и продольную часть, что облегчает вычисления. Наличие продольной части \mathbf{A} не влияет на распределение магнитного поля, которое зависит только от поперечной части \mathbf{A} .

Смещение s изотропной упругой среды под действием объемной силы $4\pi F$ *дин/см³* определяется уравнением

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } s - \mu \text{rot rot } s = (\lambda + \mu) \text{grad div } s + \mu \nabla^2 s = -4\pi F. \quad (13.2.3)$$

Как было отмечено выше, точно удовлетворить граничным условиям, разделяя переменные в уравнении, можно лишь в случае полярных (плоских) и сферических координат; в других системах координат были получены лишь приближенные решения. Здесь также удобно, хотя и не всегда, разложить поле на продольную и поперечную части. Граничные условия задают либо смещения, либо напряжения на границе. Если граничная поверхность нормальна оси z , то вектор напряжения \mathbf{T} зависит от степени изменения s

у границы по закону

$$\mathbf{T} = \mathfrak{L} \cdot \mathbf{k} = \lambda \mathbf{k} \operatorname{div} \mathbf{s} + \mu \operatorname{grad} s_z + \mu \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z}; \quad (13.2.4)$$

Применение этих граничных условий будет рассмотрено несколько позднее. Как было показано [соотношение (13.1.42)], решение \mathbf{s} может быть представлено в виде $\mathbf{s} = \operatorname{grad} \varphi + \mathbf{M} + \mathbf{N}$, где \mathbf{M} и \mathbf{N} — поперечные решения векторного уравнения Лапласа, а φ — скалярное решение уравнения $\nabla^4 \varphi = 0$, удовлетворяющее условиям совместности.

Наконец, соотношение между давлением и скоростью в стационарном потоке несжимаемой жидкости имеет вид [см. формулу (2.3.14)]

$$\operatorname{grad} P + \eta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \rho \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v};$$

здесь \mathbf{v} — скорость потока, ρ — плотность, η — коэффициент вязкости, P — «динамическое давление», входящее в уравнение Бернулли

$$P = p + \frac{1}{2} \rho v^2 + V,$$

где p — истинное давление, а V — потенциал объемных сил, например силы тяжести. (Сила, действующая на единицу объема, равна градиенту потенциала с обратным знаком.) Граничные условия обычно заключаются в равенстве нулю скорости на границе, и, конечно, предполагается, что $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ во всей области решения.

Приведенное уравнение не является линейным, и поэтому метод этой главы непосредственно к нему не применим. Однако при малых \mathbf{v} , пренебрегая нелинейным членом $\rho \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}$, мы получим линейное уравнение

$$-\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla^2 \mathbf{v} = -4\pi \mathbf{Q}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (13.2.5)$$

где $\mathbf{Q} = -(1/4\pi\eta) \operatorname{grad} P$ — продольный вектор и, в первом приближении по \mathbf{v} , $P \simeq p + V$. С другой стороны, если скорость потока близка к постоянному вектору \mathbf{U} , так что $\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}$, где \mathbf{u} достаточно мало, то можно использовать другую форму уравнения стационарного потока:

$$\operatorname{grad} (p + V) + \rho \mathbf{v} \cdot (\nabla \mathbf{v}) + \eta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

Если постоянный вектор \mathbf{U} направлен по оси z , то с точностью до членов первого порядка относительно малой величины \mathbf{u} получим

$$-\eta \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \eta \nabla^2 \mathbf{u} = \operatorname{grad} (p + V) + \rho U \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}. \quad (13.2.6)$$

Это уравнение опять является линеаризованным.

Нашей задачей является развитие методов решения этих уравнений в различных координатных системах и для различных граничных условий.

Плоские задачи. В случае двух переменных не нужно всей сложной техники, развитой в этом параграфе; в самом деле, некоторые случаи были уже разобраны в гл. 10. Решение этих задач бывает двух типов: вектор, направленный по оси z , величина которого зависит только от x и y , и вектор, лежащий в плоскости (x, y) , направление и величина которого не зависят от z . Рассмотрим несколько простых случаев, чтобы напомнить общие методы решения и подготовиться к решению более сложных задач.

В случае магнитного поля, создаваемого током, направленным параллельно оси z , направление векторного потенциала \mathbf{A} также совпадает с осью z , а его величина является решением двумерного уравнения Пуассона в переменных x и y , причем плотность тока играет роль плотности источников. Например, в случае, указанном на рис. 13.1, провод, по которому течет ток I , проходит через точку $x = a$, $y = 0$ внутри щели в массе железа.

Щель занимает область $x > 0$, $|y| < h/2$. Все, что здесь требуется, — это преобразовать двумерную функцию Грина $-2\ln R$ так, чтобы нормальная производная A_z на поверхности железа равнялась нулю. Для этого достаточно воспользоваться разложением функции Грина в ряд Фурье по y или конформным преобразованием, определяемым выражением (4.7.7).

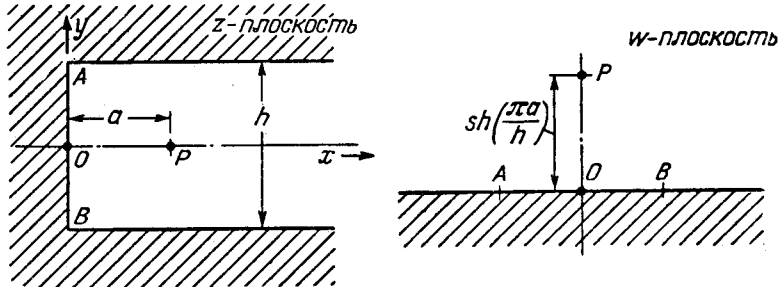


Рис. 13.1. Конформное преобразование для магнитного поля провода в щели.

Конформным преобразованием на w -плоскости будет

$$w = -\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{h}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{h}y\right) + i\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{h}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{h}y\right).$$

Точка $P(x=a, y=0)$ переходит в $w = i\operatorname{sh}(\pi a/h)$. Помещенный в эту точку источник при соответствующих граничных условиях на действительной оси w имеет вид

$$A_z = -2I \ln \left| \left[w - i\operatorname{sh}\left(\frac{\pi a}{h}\right) \right] \left[w + i\operatorname{sh}\left(\frac{\pi a}{h}\right) \right] \right|.$$

При обратном переходе к переменным (x, y) получим

$$A_z = -I \ln \left\{ \left[\operatorname{ch}\left(\frac{2\pi a}{h}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{2\pi x}{h}\right)\cos\left(\frac{2\pi y}{h}\right) \right]^2 + \right. \\ \left. + \operatorname{sh}^2\left(\frac{2\pi x}{h}\right)\sin^2\left(\frac{2\pi y}{h}\right) \right\} + 2I \ln 2.$$

Поэтому магнитное поле выражается формулами

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{4\pi I}{h} \cdot \frac{(\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \xi - \cos \eta) \sin \eta}{(\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} \xi \cos \eta)^2 + \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \eta}, \\ H_y &= -\frac{4\pi I}{h} \cdot \frac{(\operatorname{ch} \alpha \cos \eta - \operatorname{ch} \xi) \operatorname{sh} \xi}{(\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} \xi \cos \eta)^2 + \operatorname{sh}^2 \xi \sin^2 \eta}, \end{aligned} \quad (13.2.7)$$

где $\alpha = 2\pi a/h$, $\xi = 2\pi x/h$, $\eta = 2\pi y/h$. Это выражение, конечно, можно разложить в ряд Фурье по y . Для ξ , значительно больших, чем η ,

$$\begin{aligned} H_x &\simeq -\frac{4\pi I}{h} \cdot \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{ch} \xi} \rightarrow 0, \\ H_y &\simeq +\frac{4\pi I}{h} \operatorname{th} \xi \rightarrow \frac{4\pi I}{h}, \end{aligned}$$

т. е. мы получаем однородное магнитное поле между верхней и нижней сторонами щели.

В качестве простого примера для случая вязкой жидкости рассмотрим поток в прямоугольной трубе ширины l_x и высоты l_y , ось которой параллельна оси z . Примем, что давление равномерно падает по трубе:

$$P = -Fz,$$

где F — падение давления на единицу длины вдоль трубы. Используя (13.2.5), получаем

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -\frac{F}{\eta} \mathbf{k}$$

с граничными условиями $\mathbf{v} = 0$ при $x = 0, l_x$ и $y = 0, l_y$. Очевидно, скорость потока направлена по оси z , так что амплитуда v_z должна удовлетворять уравнению Пуассона с постоянной плотностью F/η . Решение выражается рядом

$$\mathbf{v} = \frac{16F}{\pi^4 \eta} \mathbf{k} \sum_{m, n} \frac{\sin[(\pi x/l_x)(2m+1)] \sin[(\pi y/l_y)(2n+1)]}{\{[(2m+1)/l_x]^2 + [(2n+1)/l_y]^2\} (2m+1)(2n+1)}, \quad (13.2.8)$$

а полный поток вдоль трубы равен

$$Q = \frac{64Fl_x l_y}{\pi^6 \eta} \sum_{m, n} \frac{1}{\{[(2m+1)/l_x]^2 + [(2n+1)/l_y]^2\} (2m+1)^2 (2n+1)^2}.$$

Эта формула остается справедливой, пока безразмерное отношение $v_{z,p} \sqrt{l_x l_y} / \eta$ меньше некоторой универсальной постоянной, называемой *критическим числом Рейнольдса*. Если падение давления достигает значений, при которых это отношение превосходит предельное значение, то в потоке возникают разрывы; появляется турбулентность, падение давления для данного потока значительно возрастает и распределение скоростей существенно отличается от выражения (13.2.8). Очевидно, это связано с тем, что нелинейные члены достигли значительной величины, в результате чего возник турбулентный поток. Отметим, что чем меньше η , тем *меньше* предельная скорость, при которой возникает турбулентность.

На стр. 735 приведен другой пример потока через щель ширины a в плоскости (x, z) . В эллиптических координатах μ и ϑ скорость, давление и вихрь $\mathbf{w} = (1/2) \text{rot } \mathbf{v}$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= a_\mu \frac{4Q}{\pi a} \frac{\sin^2 \vartheta}{\sqrt{\text{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta}}, \\ p &= \frac{16\eta Q}{\pi a^2} \frac{\sin^2 \vartheta - e^{-\mu} \text{sh } \mu}{\text{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta}, \\ |\mathbf{w}| &= \frac{4Q}{\pi a^2} \frac{\sin 2\vartheta}{\text{sh}^2 \mu + \sin^2 \vartheta}, \end{aligned} \quad (13.2.9)$$

где Q — объемный поток через единицу длины щели в направлении оси z .

Выражение, аналогичное (13.2.8), получается при решении задачи теории упругости для вертикальной прямоугольной трубы, заполненной, например, резиной, оседающей под действием силы тяжести $\rho g \mathbf{k}$. В этом случае смещение направлено по оси z и является чистой деформацией сдвига. Надо решить уравнение

$$\mu \nabla^2 s_z = -\rho g$$

с условиями обращения s_z в нуль при $x = 0, l_x$ и $y = 0, l_y$. Выражение для \mathbf{s} то же самое, что и для \mathbf{v} в (13.2.8), только F/η надо заменить на $\rho g/\mu$.

Полярные координаты. Простым примером двумерного решения в координатах r, θ, z является задача о потоке вязкой жидкости в трубе круглого поперечного сечения радиуса a . Опять падение давления обозначим через F , так что $P = -Fz$. Из (13.2.5) получим

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -\frac{F}{\eta} \mathbf{k}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = -\frac{F}{\eta}$$

при условии, что \mathbf{v} направлена по z , а величина ее зависит лишь от r . Решение, обращающееся в нуль при $r = a$, имеет вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{k} \frac{F}{4\eta} (a^2 - r^2), \quad (13.2.10)$$

а полный поток, равный $\pi F a^4 / 8\eta$, выражается через падение давления, радиус и коэффициент вязкости в случае достаточно медленного потока, при котором не возникает турбулентность.

В качестве примера из теории упругости рассмотрим длинную трубу с внутренним радиусом a и внешним радиусом b с различными давлениями на внутренней и внешней сторонах. Положим $\mathbf{s} = \text{grad } \varphi$, где φ — решение уравнения $\nabla^4 \varphi = 0$, зависящее лишь от r :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) \right] \right\} = 0. \quad (13.2.11)$$

Следовательно,

$$\varphi = C_1 r^2 + C_2 \ln r + C_3 + C_4 r^2 \ln r,$$

где постоянные выбираются так, чтобы удовлетворялись граничные условия и уравнения совместности. Очевидно, можно сразу положить $C_4 = 0$, так как $r^2 \ln r$ не обращает в нуль соответствующий член в выражении для $\text{grad}(\nabla^2 \varphi)$, которое является частью уравнения совместности $\nabla \cdot \mathfrak{X} = 0$. Тогда смещение \mathbf{s} и тензор напряжений \mathfrak{X} равны

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{a}_r \frac{d\varphi}{dr} = \mathbf{a}_r \left[2C_1 r + \frac{C_2}{r} \right], \\ \mathfrak{X} &= \lambda \mathfrak{S} \text{div } \mathbf{s} + \mu (\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla) = \\ &= \mathbf{a}_r \mathbf{a}_r \left[4C_1 (\lambda + \mu) - 2\mu \frac{C_2}{r^2} \right] + \mathbf{a}_\theta \mathbf{a}_\theta \left[4C_1 (\lambda + \mu) + 2\mu \frac{C_2}{r^2} \right]. \end{aligned}$$

Если давление внутри цилиндра равно P , а вне цилиндра — нулю, то $\mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r$ равно $-\mathbf{a}_r P$ при $r = a$ и нулю при $r = b$. Поэтому мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \mathbf{a}_r \frac{Pa^2}{2(b^2 - a^2)} \frac{b}{(\lambda + \mu)} \left[\frac{r}{b} + \frac{(\lambda + \mu)b}{\mu r} \right], \\ \mathfrak{X} &= \frac{Pa^2}{b^2 - a^2} \left[\mathbf{a}_r \mathbf{a}_r \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) + \mathbf{a}_\theta \mathbf{a}_\theta \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (13.2.12)$$

Радиальное напряжение является сжимающим (отрицательным) для $a < r < b$, а касательное напряжение — закручивающим с максимальной величиной $P(b^2 + a^2)/(b^2 - a^2)$ при $r = a$. Независимо от того, насколько b больше a , это закручивающее усилие не может быть меньше, чем P . Поэтому, если P больше напряжения на разрыв, то цилиндр сломается, как бы ни была толста стенка. Заметим, что напряжение расширения $|\mathfrak{X}| = 2Pa^2/(b^2 - a^2)$ не зависит от r , а радиальное расширение внешней поверхности цилиндра равно $Pa^2 b (\lambda + 2\mu) / 2(b^2 - a^2)(\lambda + \mu)\mu$. Это выражение тем больше, чем меньше модуль сдвига μ по сравнению с модулем λ . В этом случае вектор смещения не имеет поперечной части, поскольку все движение является радиальным и вращение элементов среды отсутствует.

Круговые цилиндрические координаты. Три системы решений векторного уравнения Лапласа в круговых цилиндрических координатах опре-

деляются выражениями

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{skm}(r, \theta, z) &= \frac{1}{k} \operatorname{rot} \left[\mathbf{a}_z \frac{\cos(m\theta)}{\sin(m\theta)} e^{kz} J_m(kr) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_r \frac{-\sin(m\theta)}{\cos(m\theta)} e^{kz} [J_{m-1}(kr) + J_{m+1}(kr)] - \\
 &\quad - \frac{1}{2} \mathbf{a}_\theta \frac{\cos(m\theta)}{\sin(m\theta)} e^{kz} [J_{m-1}(kr) - J_{m+1}(kr)]; \\
 \mathbf{N}_{skm}(r, \theta, z) &= \frac{1}{k} \operatorname{grad} \left[\frac{\cos(m\theta)}{\sin(m\theta)} e^{kz} J_m(kr) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_r \frac{\cos(m\theta)}{\sin(m\theta)} e^{kz} [J_{m-1}(kr) - J_{m+1}(kr)] + \mathbf{a}_z \frac{\cos(m\theta)}{\sin(m\theta)} e^{kz} J_m(kr) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{a}_\theta \frac{-\sin(m\theta)}{\cos(m\theta)} e^{kz} [J_{m-1}(kr) + J_{m+1}(kr)]; \\
 \mathbf{G}_{skm}(r, \theta, z) &= 2\mathbf{a}_z \frac{\cos(m\theta)}{\sin(m\theta)} e^{kz} J_m(kr) - \mathbf{N}_{skm}(r, \theta, z).
 \end{aligned} \tag{13.2.13}$$

В последнем выражении вектора \mathbf{G}_{skm} добавлен вектор $-\mathbf{N}$, благодаря чему $\iint \mathbf{N} \cdot \mathbf{G} r dr d\theta = 0$. Индекс s надо заменить на e , когда используется верхняя система тригонометрических функций, и на o , когда используется нижняя система. Дивергенции функций \mathbf{M} и \mathbf{N} равны нулю, так же как и ротор \mathbf{N} . Дивергенция и ротор \mathbf{G} отличны от нуля. Дифференциальные соотношения между функциями для одноименных индексов имеют вид

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \mathbf{G} &= 2k\mathbf{M}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{M} = k\mathbf{N}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{N} = 0, \\
 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{G} &= 2k^2\mathbf{N} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{G}, \quad \operatorname{div} \mathbf{M} = \operatorname{div} \mathbf{N} = 0.
 \end{aligned}$$

Обращаясь к соотношению (10.3.22), легко видеть, что указанные решения можно выразить через двумерные векторные решения в плоскости,



Рис. 13.2. Углы и координаты при повороте комплексной плоскости на угол u вокруг оси z .

составляющей угол u с плоскостью z, x , проинтегрированные по u . Пользуясь рис. 13.2, определим вектор

$$\mathbf{a}_u = -\mathbf{i} \sin u + \mathbf{j} \cos u,$$

нормальный к плоскости u , и ортогональные единичные векторы

$$\mathbf{a}_v = \mathbf{i} \cos u + \mathbf{j} \sin u, \quad \mathbf{a}_z = \mathbf{k},$$

лежащие в этой плоскости. Через эти единичные векторы наши решения

запишутся в виде

$$\begin{aligned} M_{skm} &= \frac{1}{2\pi i^{m+1}} \int_0^{2\pi} \mathbf{a}_u e^{kX} \frac{\cos}{\sin}(mu) du, \\ N_{skm} &= \frac{1}{2\pi i^{m+1}} \int_0^{2\pi} (i\mathbf{a}_z - \mathbf{a}_v) e^{kX} \frac{\cos}{\sin}(mu) du, \\ G_{skm} &= \frac{1}{2\pi i^{m+1}} \int_0^{2\pi} (i\mathbf{a}_z + \mathbf{a}_v) e^{kX} \frac{\cos}{\sin}(mu) du, \end{aligned} \quad (13.2.14)$$

где

$$X = z + i(x \cos u + y \sin u) = z + ir \cos(\theta - u).$$

Аффинорная функция Грина для этого случая, получаемая из формулы (10.3.23), имеет вид

$$\mathfrak{G} = \frac{\mathfrak{J}}{R} = \mathfrak{J} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos[m(\theta - \theta_0)] \int_0^{\infty} J_m(kr) J_m(kr_0) e^{-k|z - z_0|} dk.$$

Это выражение можно переписать в виде интегралов от M , N , G по k . Тогда векторный потенциал, создаваемый током I , текущим по одиночной круговой петле тонкой проволоки ($r = a$, $z = 0$, $0 < \theta < 2\pi$), определяется интегралом от $(I\mathfrak{G} \cdot \mathbf{a}_{\theta_0}) \delta(r_0 - a) \delta(z_0)$ по r_0 , θ_0 , z_0 , где

$$\mathbf{a}_{\theta_0} = \mathbf{a}_r \sin(\theta - \theta_0) + \mathbf{a}_\theta \cos(\theta - \theta_0).$$

Поэтому векторный потенциал, создаваемый одиночной петлей тока, равен

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= 2\pi I a \mathbf{a}_\theta \int_0^{\infty} e^{-k|z|} J_1(kr) J_1(ka) dk = \\ &= I a \int_0^{\infty} dk \int_0^{\infty} M_{e_{k0}}(r, \theta, z) [\mathbf{a}_{\theta_0} \cdot \mathbf{M}_{e_{k0}}(a, \theta_0, 0)] d\theta_0, \quad z < 0, \end{aligned}$$

где интегрирование по полному контуру дает комбинацию только поперечных решений M (см. стр. 730). Результирующее магнитное поле имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} &= 2\pi I a \left[\mathbf{a}_r \int_0^{\infty} e^{-k|z|} J_1(kr) J_1(ka) k dk + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{a}_z \int_0^{\infty} e^{-k|z|} J_0(kr) J_1(ka) k dk \right]. \end{aligned} \quad (13.2.15)$$

Преобразуя контурный интеграл, получим

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_\theta \frac{\pi I a^2 r}{(a^2 + r^2 + z^2)^{3/2}} F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4} \mid 2 \mid \frac{4a^2 r^2}{(a^2 + r^2 + z^2)^2}\right).$$

Для $(a^2 + r^2 + z^2) \gg 2ar$ гипергеометрическая функция F становится равной единице, и формулы упрощаются. Например, для r и $z \gg a$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\simeq \mathbf{a}_\theta \pi I a^2 \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \\ \mathbf{H} &\simeq \frac{\pi I a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} [3r z \mathbf{a}_r + (2z^2 - r^2) \mathbf{a}_z] = -\pi I a^2 \text{grad} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

что аналогично магнитному полю, создаваемому находящимся в начале координат магнитным диполем с моментом $\pi a^2 I$, ориентированным по оси z .

Сферические координаты. В сферической системе координат можно получить довольно общие решения всех трех основных векторных уравнений эллиптического типа (магнитного поля, потока вязкой жидкости, упругого смещения). Решение можно выразить через постоянные векторы (\mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} или их комбинации), умноженные на сферические гармоники и функции от радиуса r (r^n или r^{-n-1} для уравнения Лапласа). Но, как было показано, при этом трудно удовлетворить граничным условиям на сферической поверхности и приходится пользоваться методом, уже изложенным в этой главе. Например, для векторного уравнения Лапласа возьмем ротор от \mathbf{r} , умноженного на решение скалярного уравнения Лапласа $r^n Y_n^m(\vartheta, \varphi)$ (где Y — сферическая функция n -го порядка) или $r^{-n-1} Y_n^m(\vartheta, \varphi)$. Это даст поперечное решение \mathbf{M} . Для решений \mathbf{N} , ротор и дивергенция которых равны нулю, можно использовать градиент $r^n Y_n^m$ или $r^{-n-1} Y_n^m$.

Эти решения можно выразить через взаимно ортогональные векторные сферические функции \mathbf{P} , \mathbf{B} и \mathbf{C} , рассмотренные в § 13.3, таблица которых приведена в конце этой главы. Отметим, что эти три вектора при заданных значениях m , n и s (четных или нечетных) взаимно ортогональны для всех значений ϑ и φ ; их интегральные свойства указаны в таблице.

Проще всего получить развернутые выражения для \mathbf{M} и \mathbf{N} через \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , используя соотношения (10.3.34). Пользуясь комплексной формой сферических гармоник,

$$X_n^m(\vartheta, \varphi) = e^{im\varphi} P_n^m(\cos \vartheta) = Y_{mn}^e(\vartheta, \varphi) + i Y_{mn}^o(\vartheta, \varphi), \quad (13.2.16)$$

где $m > 0$, можно упростить вспомогательные вычисления. Введем также обозначение для комплексно сопряженных величин

$$\bar{X}_n^m(\vartheta, \varphi) = e^{-im\varphi} P_n^m(\cos \vartheta) = X_n^{-m}(\vartheta, \varphi).$$

Тогда формулы принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{mn}^1(r, \vartheta, \varphi) &= \text{rot}[r^n X_n^m(\vartheta, \varphi)] = -\mathbf{r} \times \text{grad}[r^n X_n^m(\vartheta, \varphi)] = \\ &= r^n \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{i} [(1 + \delta_{0m}) i X_n^{m+1} + (n+m)(n-m+1)(1 - \delta_{0m}) i X_n^{m-1}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{j} [(1 + \delta_{0m}) X_n^{m+1} - (n+m)(n-m+1)(1 - \delta_{0m}) X_n^{m-1}] - k m i X_n^m \right\}, \\ \mathbf{N}_{mn}^1(r, \vartheta, \varphi) &= \text{grad}[r^{n+1} X_{n+1}^m(\vartheta, \varphi)] = \\ &= r^n \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{i} [-(1 + \delta_{0m}) X_n^{m+1} + (n+m)(n+m+1)(1 - \delta_{0m}) X_n^{m-1}] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathbf{j} [(1 + \delta_{0m}) i X_n^{m+1} + (n+m)(n+m+1)(1 - \delta_{0m}) i X_n^{m-1}] + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{k} (n+m+1) X_n^m \right\}, \quad (13.2.17) \end{aligned}$$

где для $m=0$ используется лишь действительная часть \mathbf{M} и \mathbf{N} . Действительная часть \mathbf{M}_{mn}^1 есть \mathbf{M}_{emn}^1 , а его мнимая часть равна \mathbf{M}_{omn}^1 . Заметим, что для \mathbf{M}^1 индекс m изменяется от 0 до n , а для \mathbf{N}^1 — от 0 до $n+1$.

Обращаясь к таблицам в конце этой главы, мы видим, что $\mathbf{M}_{smn}^1 = \sqrt{n(n+1)} r^n \mathbf{C}_{mn}^s(\vartheta, \varphi)$, где s может быть или e (четным) или o (нечетным). Существуют также решения, стремящиеся к нулю на бесконечности, но

расходящиеся при $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{smn}^2(r, \vartheta, \varphi) &= -\mathbf{r} \times \text{grad} [r^{-n-1} Y_{mn}^s(\vartheta, \varphi)] = \\ &= \sqrt{n(n+1)} r^{-n-1} \mathbf{C}_{mn}^s(\vartheta, \varphi). \end{aligned} \quad (13.2.18)$$

Соответствующие решения с нулевыми ротором и дивергенцией являются действительной и мнимой частью от

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{mn}^2(r, \vartheta, \varphi) &= \text{grad} [r^{-n} X_{n-1}^m(\vartheta, \varphi)] = \\ &= r^{-n-1} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{i} [-(1 + \delta_{0m}) X_n^{m+1} + (n-m)(n-m+1)(1 - \delta_{0m}) X_n^{m-1}] + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{j} [(1 + \delta_{0m}) i X_n^{m+1} + (n-m)(n-m+1)(1 - \delta_{0m}) i X_n^{m-1}] - \\ &\left. - \mathbf{k} (n-m) X_n^m \right\}. \end{aligned} \quad (13.2.19)$$

Здесь опять для \mathbf{M}^2 индекс m изменяется от 0 до n , а для \mathbf{N}^2 от 0 до $n-1$; при этом n не может равняться нулю, а для $m=0$ используется лишь действительная часть соответствующих выражений.

Угловую зависимость \mathbf{N}^1 и \mathbf{N}^2 можно выразить через векторные гармоники \mathbf{P} и \mathbf{B} , выражения которых приведены в конце главы. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{smn}^1 &= \sqrt{n+1} r^n [\sqrt{n+2} \mathbf{B}_{m, n+1}^s(\vartheta, \varphi) + \sqrt{n+1} \mathbf{P}_{m, n+1}^s(\vartheta, \varphi)], \\ \mathbf{N}_{smn}^2 &= \sqrt{n} r^{-n-1} [\sqrt{n-1} \mathbf{B}_{m, n-1}^s(\vartheta, \varphi) - \sqrt{n} \mathbf{P}_{m, n-1}^s(\vartheta, \varphi)], \end{aligned} \quad (13.2.20)$$

откуда следует их ортогональность к системам \mathbf{M}^1 и \mathbf{M}^2 .

Нужны еще системы векторных решений, ортогональных \mathbf{M}^1 и \mathbf{N}^1 или \mathbf{M}^2 и \mathbf{N}^2 . Их можно получить, меняя угловую зависимость \mathbf{N}^1 и \mathbf{N}^2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{smn}^1(r, \vartheta, \varphi) &= \sqrt{n} r^n [\sqrt{n-1} \mathbf{B}_{m, n-1}^s(\vartheta, \varphi) - \sqrt{n} \mathbf{P}_{m, n-1}^s(\vartheta, \varphi)]; \\ \mathbf{G}_{mn}^1 &= r^n \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{i} [-(1 + \delta_{0m}) X_n^{m+1} + (n-m)(n-m+1)(1 - \delta_{0m}) X_n^{m-1}] + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{j} [(1 + \delta_{0m}) i X_n^{m+1} + (n-m)(n-m+1)(1 - \delta_{0m}) i X_n^{m-1}] - \\ &\left. - \mathbf{k} (n-m) X_n^m \right\}; \end{aligned} \quad (13.2.21)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots; m = 0, 1, 2, \dots, n-1; s = e, o.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{smn}^2(r, \vartheta, \varphi) &= \sqrt{n+1} r^{-n-1} [\sqrt{n+2} \mathbf{B}_{m, n+1}^s(\vartheta, \varphi) + \sqrt{n+1} \mathbf{P}_{m, n+1}^s(\vartheta, \varphi)]; \\ \mathbf{G}_{mn}^2 &= r^{-n-1} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{i} [-(1 + \delta_{0m}) X_n^{m+1} + (n+m)(n+m+1)(1 - \delta_{0m}) X_n^{m-1}] + \right. \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{j} [(1 + \delta_{0m}) i X_n^{m+1} + (n+m)(n+m+1)(1 - \delta_{0m}) i X_n^{m-1}] + \\ &\left. + \mathbf{k} (n+m+1) X_n^m \right\}; \end{aligned}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; m = 0, 1, 2, \dots, n+1; s = e, o.$$

У этой системы решений ни ротор, ни дивергенция не обращаются в нуль. Дифференциальные соотношения между этими тремя функциями имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{N}_{smn}^1 &= \operatorname{rot} \mathbf{N}_{smn}^2 = 0 = \operatorname{div} \mathbf{N}_{smn}^1 = \operatorname{div} \mathbf{N}_{smn}^2; \\ \operatorname{div} \mathbf{M}_{smn}^1 &= \operatorname{div} \mathbf{M}_{smn}^2 = 0; \operatorname{rot} \mathbf{M}_{smn}^1 = (n+1) \mathbf{N}_{sm, n-1}^1; \\ \operatorname{rot} \mathbf{M}_{smn}^2 &= -n \mathbf{N}_{sm, n+1}^2; \operatorname{div} \mathbf{G}_{smn}^1 = -n(2n+1) r^{n-1} Y_{m, n-1}^s(\vartheta, \varphi); \\ \operatorname{div} \mathbf{G}_{smn}^2 &= -(n+1)(2n+1) r^{-n-2} Y_{m, n+1}^s(\vartheta, \varphi); \\ \operatorname{rot} \mathbf{G}_{smn}^1 &= -(2n+1) \mathbf{M}_{sm, n-1}^1; \operatorname{rot} \mathbf{G}_{smn}^2 = (2n+1) \mathbf{M}_{sm, n+1}^2. \end{aligned} \quad (13.2.22)$$

Для $m=0$ функции имеют простой вид, остаются лишь четные функции ($s=e$) и

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{e0n}^1 &= \mathbf{M}_n^1 = r^n [-i \sin \varphi + j \cos \varphi] P_n^1(\cos \vartheta) = a_\varphi r^n P_n^1; \\ \mathbf{M}_{e0n}^2 &= \mathbf{M}_n^2 = a_\varphi r^{-n-1} P_n^1(\cos \vartheta); \\ \mathbf{N}_{e0n}^1 &= \mathbf{N}_n^1 = r^n [-(i \cos \varphi + j \sin \varphi) P_n^1 + k(n+1) P_n] = \\ &= r^n [(n+1) a_r P_{n+1} - a_\vartheta P_{n+1}^1] = -r^n (a_r T_{n-1}^1 - k T_n^1); \\ \mathbf{N}_{e0n}^2 &= \mathbf{N}_n^2 = r^{-n-1} [-(i \cos \varphi + j \sin \varphi) P_n^1 - kn P_n] = \\ &= -r^{-n-1} [n a_r P_{n-1} + a_\vartheta P_{n-1}^1] = -r^{-n-1} (a_r T_{n-1}^1 - k T_{n-2}^1); \\ \mathbf{G}_{e0n}^1 &= \mathbf{G}_n^1 = -r^n [n a_r P_{n-1} + a_\vartheta P_{n-1}^1] = -r^n (a_r T_{n-1}^1 - k T_{n-2}^1); \\ \mathbf{G}_{e0n}^2 &= \mathbf{G}_n^2 = r^{-n-1} [(n+1) a_r P_{n+1} - a_\vartheta P_{n+1}^1] = -r^{-n-1} (a_r T_{n-1}^1 - k T_n^1). \end{aligned} \quad (13.2.23)$$

Наконец, для $n=0$ \mathbf{M}^1 , \mathbf{M}^2 , \mathbf{N}^2 и \mathbf{G}^1 равны нулю, и две системы трех элементарных решений имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{e00}^1 &= \mathbf{k}, \quad \mathbf{N}_{e10}^1 = \mathbf{i}, \quad \mathbf{N}_{o10}^1 = \mathbf{j}, \\ \mathbf{G}_{e00}^2 &= \mathbf{k}/r, \quad \mathbf{G}_{e10}^2 = \mathbf{i}/r, \quad \mathbf{G}_{o10}^2 = \mathbf{j}/r. \end{aligned}$$

Используя формулы в конце главы, можно выразить обычные сферические функции, умноженные на постоянные векторы, через функции \mathbf{M} , \mathbf{N} и \mathbf{G} . Например, при $m=0$

$$\begin{aligned} k r^n P_n(\cos \vartheta) &= \frac{1}{2n+1} [\mathbf{N}_n^1 - \mathbf{G}_n^1]; \quad k \frac{P_n}{r^{n+1}} = \frac{-1}{2n+1} [\mathbf{N}_n^2 - \mathbf{G}_n^2]; \\ i r^n P_n &= \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} [(2n+1) \mathbf{M}_{o1n}^1 + n \mathbf{N}_{e1n}^1 + (n+1) \mathbf{G}_{e1n}^1]; \\ i \frac{P_n}{r^{n+1}} &= \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} [(2n+1) \mathbf{M}_{o1n}^2 + (n+1) \mathbf{N}_{e1n}^2 + n \mathbf{G}_{e1n}^2]; \\ j r^n P_n &= \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} [-(2n+1) \mathbf{M}_{e1n}^1 + n \mathbf{N}_{o1n}^1 + (n+1) \mathbf{G}_{o1n}^1]; \\ j \frac{P_n}{r^{n+1}} &= \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} [-(2n+1) \mathbf{M}_{e1n}^2 + (n+1) \mathbf{N}_{o1n}^2 + n \mathbf{G}_{o1n}^2]. \end{aligned} \quad (13.2.24)$$

Аффинорная функция Грина для векторного уравнения Лапласа. Аффинорная функция Грина, являющаяся решением уравнения

$$\nabla^2 \mathfrak{G} = -\frac{4\pi}{r^2 \sin \vartheta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\vartheta - \vartheta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \mathfrak{I}, \quad (13.2.25)$$

разлагается в ряд по функциям M , N и G . Угловые функции

$$\begin{aligned} D_{mn}^1(\vartheta, \varphi) &= \sqrt{n(n+1)} C_{mn}^e(\vartheta, \varphi), & D_{mn}^2 &= \sqrt{n(n+1)} C_{mn}^o, \\ D_{mn}^3 &= \sqrt{n+1} [\sqrt{n+2} B_{m, n+1}^e + \sqrt{n+1} P_{m, n+1}^e], \\ D_{mn}^4 &= \sqrt{n+1} [\sqrt{n+2} B_{m, n+1}^o + \sqrt{n+1} P_{m, n+1}^o], \\ D_{mn}^5 &= \sqrt{n} [\sqrt{n-1} B_{m, n-1}^e - \sqrt{n} P_{m, n-1}^e], \\ D_{mn}^6 &= \sqrt{n} [\sqrt{n-1} B_{m, n-1}^o - \sqrt{n} P_{m, n-1}^o] \end{aligned} \quad (13.2.26)$$

образуют полную ортогональную систему векторных функций, зависящих от углов ϑ и φ . По ним можно разложить аффиноор \mathcal{G} :

$$\mathcal{G} = \sum_{\sigma\mu\nu} F_{\mu\nu}^\sigma(r; r_0, \vartheta_0, \varphi_0) D_{\mu\nu}^\sigma(\vartheta, \varphi), \quad (13.2.27)$$

где функции F определяются методом, изложенным при получении выражения (7.2.63). Применение векторного оператора Лапласа дает

$$\nabla^2 \mathcal{G} = \sum_{\sigma\mu\nu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} F_{\mu\nu}^\sigma \right) - \frac{\mu(\mu+1)}{r^2} F_{\mu\nu}^\sigma \right] D_{\mu\nu}^\sigma(\vartheta, \varphi).$$

Подставляя это выражение в (13.2.25), умножая обе части на $D_{mn}^1(\vartheta, \varphi) \cdot \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ и интегрируя по ϑ и φ , получаем уравнение для F_{mn}^1

$$\begin{aligned} n(n+1) \frac{4\pi/\varepsilon_m (n+m)!}{2n+1 (n-m)!} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} F_{mn}^1 \right) - \frac{n(n+1)}{r^2} F_{mn}^1 \right] = \\ = -\frac{4\pi}{r^2} D_{mn}^1 \delta(r - r_0). \end{aligned}$$

Решение этого уравнения, конечное при $r=0$ и $r=\infty$, имеет вид

$$F_{mn}^1 = \frac{\varepsilon_m (n-m)!}{n(n+1)(n+m)!} D_{mn}^1(\vartheta_0, \varphi_0) \begin{cases} r^n/r_0^{n+1} & \text{при } r < r_0, \\ r_0^n/r^{n+1} & \text{при } r > r_0. \end{cases}$$

Аналогично получаются решения для F при других значениях индекса s . Например, умножив на $D_{mn}^3(\vartheta, \varphi)$ и проинтегрировав по ϑ и φ , получим

$$F_{mn}^3 = \frac{\varepsilon_m}{(n+1)(2n+1)} \frac{(n-m+1)!}{(n+m+1)!} D_{mn}^3 \begin{cases} r^n/r_0^{n+1} & \text{при } r < r_0, \\ r_0^n/r^{n+1} & \text{при } r > r_0. \end{cases}$$

Наконец, учитывая соотношение между функциями D и функциями M , N и G , получим разложение аффиноорной функции Грина

$$\begin{aligned} \mathcal{G} = \frac{\mathfrak{G}}{R} = \sum_{smn} \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ \frac{1}{n(n+1)} M_{smn}^1(r, \vartheta, \varphi) M_{smn}^2(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \frac{n-m+1}{n+m+1} N_{smn}^1(r, \vartheta, \varphi) G_{smn}^2(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) + \right. \\ \left. + \frac{1}{n(2n+1)} \frac{n+m}{n-m} G_{smn}^1(r, \vartheta, \varphi) N_{smn}^2(r_0, \vartheta_0, \varphi_0) \right\}, \quad (13.2.28) \end{aligned}$$

где $s=e, o$, $m=0, 1, 2, \dots, n$, $n=0, 1, 2, \dots$ и $r < r_0$. Для $r > r_0$ надо поменять местами r, ϑ, φ и $r_0, \vartheta_0, \varphi_0$.

Это разложение имеет несколько интересных свойств. Оно, конечно, удовлетворяет требованию взаимности $\mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = \mathcal{G}(\mathbf{r}_0|\mathbf{r})$. В нем автоматически отделяются поперечные части, M^1, M^2 , от остальных. Но здесь также проявляется и любопытное переплетение функций N и G ; естественно было ожидать, что два последних члена будут $N^1 N^2$ и $G^1 G^2$.

но это не так. Это последнее свойство тесно связано с особым поведением функции Грина уравнения Лапласа по сравнению с функцией Грина векторного уравнения Гельмгольца (т. е. при $k \rightarrow 0$), что было рассмотрено на стр. 724. Функции M и N являются пределами соответствующих решений для $k \neq 0$, а функция G не является. В результате наличия произведений вида $N^1 G^2$ и т. д. поперечная по r часть \mathcal{G} не является поперечной по r_0 , что, по-видимому, связано с отмеченным выше особым поведением функции Грина.

Решения в случае магнитного поля. Использование аффинорной функции Грина (13.2.28) для магнитного поля, создаваемого распределением токов, показывает, что при стационарном распределении токов с равной нулю дивергенцией векторный потенциал A является поперечным, что было отмечено на стр. 727. Первым, наиболее простым примером является поле, возникающее при вращении равномерно заряженной сферы радиуса a вокруг оси z с угловой скоростью ω . Полный заряд сферы равен Q . Тогда поверхностная плотность тока равна

$$\mathbf{J} = \frac{\omega Q}{4\pi a} \mathbf{a}_\varphi \sin \vartheta = \frac{\omega Q}{4\pi a} \mathbf{a}_\varphi P_1^1(\cos \vartheta)$$

и созданный ею векторный потенциал (для $\mu = 1$) есть

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{n(n+1)} \frac{\omega Q a}{4\pi c} \int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^\pi \mathcal{G} \cdot C_{01}(\vartheta_0, \varphi_0) \sin \vartheta_0 d\vartheta_0 = \\ &= \frac{\omega Q a}{3c} \begin{cases} (1/a^2) M_1^1 & \text{при } r < a \\ a M_1^2 & \text{при } r > a \end{cases} = \frac{\omega Q}{3c} \mathbf{a}_\varphi \sin \vartheta \begin{cases} r/a & \text{при } r < a, \\ a^2/r^2 & \text{при } r > a. \end{cases} \end{aligned} \quad (13.2.29)$$

Магнитное поле получается отсюда при помощи (13.2.22):

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{\omega Q}{3c} \begin{cases} (2/a) N_0^1 & \text{при } r < a, \\ -a^2 N_2^2 & \text{при } r > a \end{cases} = \\ &= \frac{\omega Q}{3c} \begin{cases} (2/a) \mathbf{k} & \text{при } r < a, \\ (a^2/r^3) (3\mathbf{a}_r \cos \vartheta - 2\mathbf{k}) & \text{при } r > a. \end{cases} \end{aligned} \quad (13.2.30)$$

Это поле однородно внутри сферы и имеет характер поля диполя вне сферы.

Другим, несколько более сложным примером является поле лежащей в плоскости xy петли тока с $r = a$, $\vartheta = \pi/2$. Сила текущего по петле тока равна J . В этом случае плотность тока есть

$$\mathbf{J} = \frac{J}{a} \delta(r-a) \delta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{a}_\varphi,$$

а векторный потенциал при $\mu = 1$ равен

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi J}{c} \mathbf{a}_\varphi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n! (n+1)!} P_{2n+1}^1(\cos \vartheta) \begin{cases} (a/r)^{2n+2} & \text{при } r > a, \\ (r/a)^{2n+1} & \text{при } r < a \end{cases} = \\ &= \frac{\pi J}{c} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n! (n+1)!} \begin{cases} a^{2n+2} M_{2n+1}^2 & \text{при } r > a, \\ a^{-2n-1} M_{2n+1}^1 & \text{при } r < a, \end{cases} \end{aligned}$$

и магнитное поле

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{\pi J}{ac} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n! (n+1)!} \times \\ &\quad \times \begin{cases} (2n+2) (r/a)^{2n} [\mathbf{k} T_{2n}^1 - \mathbf{a}_r T_{2n-1}^1] & \text{при } r < a, \\ (2n+1) (a/r)^{2n+3} [\mathbf{a}_r T_{2n+1}^1 - \mathbf{k} T_{2n}^1] & \text{при } r > a, \end{cases} \end{aligned} \quad (13.2.31)$$

где T_{2n}^1 — многочлен Гегенбауера от $\cos \vartheta$, определенный в таблице в конце гл. 6. Эти ряды сходятся всюду, за исключением $r = a$.

Если внутри петли помещен железный шар радиуса $b < a$, концентрический с петлей, то поле изменяется так, что нормальная производная касательной составляющей \mathbf{A} становится равной нулю при $r = b$. Поскольку все векторы \mathbf{M} являются касательными, достаточно добавить лишь поле, исчезающее на бесконечности и имеющее нормальную составляющую градиента, обратную по величине соответствующему выражению для \mathbf{A} при $r = b$. Это дает

$$\mathbf{A} = \frac{\pi J}{c} \mathbf{a}_\varphi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n} n! (n+1)!} P_{2n+1}^1(\cos \vartheta) \times$$

$$\times \begin{cases} \left(\frac{r}{a} \right)^{2n+1} + \frac{2n+1}{2n+2} \left(\frac{b^2}{ar} \right)^{2n+2} \frac{a}{b} & \text{при } r < a, \\ \left(\frac{a}{r} \right)^{2n+2} \left[1 + \frac{2n+1}{2n+2} \left(\frac{b}{a} \right)^{4n+3} \right] & \text{при } r > a. \end{cases}$$

Соответствующее выражение получается и для \mathbf{H} . Железный шар увеличивает значение n -го члена в выражении (13.2.31) для $r > a$ в

$$1 + \frac{2n+1}{2n+2} \left(\frac{b}{a} \right)^{4n+3}$$

раз. На больших расстояниях от петли поле переходит в поле диполя

$$\mathbf{H} \simeq \frac{\pi J}{ac} \left(\frac{a}{r} \right)^3 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^3 \right] [3a_r \cos \vartheta - \mathbf{k}] \text{ при } r \gg a.$$

Таким образом, железный шар увеличил напряженность поля в $1 + (b/a)^3/2$ раз.

Поток вязкой жидкости, обтекающей сферу. Расчет потока вязкой несжимаемой жидкости у сферической границы также можно провести с помощью аффинорной функции Грина. До тех пор, пока отсутствует градиент давления, соотношения (13.2.5) означают, что уравнение для \mathbf{v} является однородным. Поле скоростей получается как комбинация решений с нулевой дивергенцией \mathbf{M}_{smn}^1 , \mathbf{M}_{smn}^2 , \mathbf{N}_{smn}^1 и \mathbf{N}_{smn}^2 , удовлетворяющая граничным условиям. Например, для поля между двумя концентрическими сферами радиусов a и b ($a < b$), из которых внутренняя неподвижная, а внешняя вращается с угловой скоростью ω вокруг оси z , выберем линейную комбинацию \mathbf{M}_1^1 и \mathbf{M}_1^2 , соответствующую нулевой скорости при $r = a$ и скорости $\mathbf{a}_\varphi b \omega \sin \vartheta$ при $r = b$. Получим

$$\mathbf{v} = \frac{b^3 \omega}{b^3 - a^3} [\mathbf{M}_1^1 - a^3 \mathbf{M}_1^2] = \frac{b^3 \omega (r^3 - a^3)}{r^2 (b^3 - a^3)} \mathbf{a}_\varphi \sin \vartheta. \quad (13.2.32)$$

Из выражения (2.3.10), используя формулы для векторных операторов в конце гл. 1, получим, что аффинор напряжений в потоке при нулевом давлении имеет вид

$$\mathfrak{T} = \eta (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) = \frac{3\eta b^3 \omega}{b^3 - a^3} \cdot \frac{a^3}{r^3} (\mathbf{a}_r \mathbf{a}_\varphi + \mathbf{a}_\varphi \mathbf{a}_r) \sin \vartheta.$$

Окончательно вращающий момент для внутренней сферы равен

$$T = 2\pi a^3 \int_0^\pi |\mathfrak{T} \cdot \mathbf{a}_\varphi| \sin^2 \vartheta d\vartheta = 8\pi \frac{\eta a^3 b^3 \omega}{b^3 - a^3}.$$

С другой стороны, когда движение жидкости вызывает перепад давлений в потоке, уравнение для скорости оказывается неоднородным (13.2.5). Ротор вектора $\mathbf{Q} = -(1/4\pi\eta)\text{grad } P$ равен нулю, а для несжимаемой жидкости дивергенция \mathbf{Q} также равна нулю; следовательно, этот вектор является линейной комбинацией решений \mathbf{N} . В качестве примера такого решения возьмем распределение давления в виде $p_n = A_n r^{-n} P_{n-1}(\cos \vartheta)$. При этом вне сферы радиуса $r = a$

$$\text{grad } p_n = A_n \mathbf{N}_n^2(r, \vartheta, \varphi) = A_n r^{-n-1} [\mathbf{k} T_{n-2}^1(\cos \vartheta) - \mathbf{a}_r T_{n-1}^2(\cos \vartheta)].$$

Тогда распределение скоростей дается решением неоднородного уравнения (13.2.5), к которому достаточно добавить решение однородного уравнения, чтобы удовлетворить граничным условиям.

Частное решение для такого распределения давления имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i &= -\frac{1}{4\pi\eta} \iiint \mathcal{G} \cdot \text{grad } p_n \, dv = \\ &= -\frac{A_n}{4\pi\eta n(2n+1)} \mathbf{D}_{0n}^3(\vartheta, \varphi) \iint [D_{0n}^3(\vartheta_0, \varphi_0)]^2 \sin \vartheta_0 \, d\vartheta_0 \, d\varphi_0 \times \\ &\quad \times \left\{ r^{-n-1} \int_a^r r \, dr + r^n \int_r^\infty r^{-2n} \, dr \right\} = \\ &= \frac{A_n}{\eta(2n-1)(2n+1)} \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) a^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right) r^2 \right] \mathbf{N}_n^2(r, \vartheta, \varphi) = \\ &= \frac{A_n}{2\eta} \left[\frac{a^2 r^{-n-1}}{2n+1} - \frac{r^{-n+1}}{2n-1} \right] \sqrt{n} [\sqrt{n-1} \mathbf{B}_{0, n-1} - \sqrt{n} \mathbf{P}_{0, n-1}]. \end{aligned}$$

Однако дивергенция этого выражения отлична от нуля; как можно показать, используя таблицу в конце этой главы, она равна $[nA_n/r^n \eta(2n-1)] P_{n-1}(\cos \vartheta)$. Поэтому надо добавить решение однородного уравнения, чтобы дивергенция полного решения была равна нулю. Согласно (13.2.22), единственным решением, имеющим требуемое выражение дивергенции, является функция \mathbf{G}_{n-2}^2 ; поэтому функция

$$[nA_n/\eta(n-1)(2n-1)(2n-3)] \mathbf{G}_{n-2}^2$$

имеет дивергенцию, противоположную \mathbf{v}_i . Следовательно, скорость потока вне сферы будет равна

$$\mathbf{v} = \frac{A_n}{2\eta} \left\{ \left[\frac{a^2}{2n+1} - \frac{r^2}{2n-1} \right] \mathbf{N}_n^2(r, \vartheta, \varphi) + \frac{2n}{(n-1)(2n-1)(2n-3)} \mathbf{G}_{n-2}^2(r, \vartheta, \varphi) \right\} + \mathbf{C}(r, \vartheta, \varphi),$$

где \mathbf{C} является комбинацией решений \mathbf{M} и \mathbf{N} , удовлетворяющей граничным условиям.

Если граничные условия заключаются в равенстве \mathbf{v} нулю при $r = a$ и $B_{n-2} \mathbf{N}_{n-2}^1(r, \vartheta, \varphi)$ при r , больших по сравнению с a , то A_n выбирается так, чтобы при $r = a$ член \mathbf{G}^2 взаимно уничтожился с \mathbf{N}^1 . При этом для удовлетворения условия $\mathbf{v} = 0$ при $r = a$ можно добавить член, содержащий \mathbf{N}^2 . Окончательный результат имеет вид

$$\mathbf{v} = B_n \left\{ \mathbf{N}_n^1 - a^{2n+1} \mathbf{G}_n^2 + \frac{1}{2} a^{2n+1} \frac{(n+1)(2n+1)}{n+2} (r^2 - a^2) \mathbf{N}_{n+2}^2 \right\}, \quad (13.2.33)$$

где произведена замена n на $n+2$. Давление равно

$$-\eta [B_n/(n+2)] (n+1)(2n+1)(2n+3) (a^{2n+1}/r^{n+2}) P_{n+1}(\cos \vartheta).$$

Если поведение \mathbf{v} для $r \gg a$ дается рядом $\sum_n B_n N_n^1$, то решение \mathbf{v} , удовлетворяющее граничному условию $\mathbf{v} = 0$ при $r = a$, выражается рядом, составленным из решений (13.2.33).

Наибольший интерес представляет случай стационарного потока, обтекающего неподвижную сферу радиуса a , когда вектор скорости для $r \gg a$ равен $\mathbf{k}U = U N_0^1$, так что $n = 0$ и $B_0 = U$. Тогда выражение для скорости, верное для малых значений U , при которых выполняется уравнение (13.2.5), имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= U \left[N_0^1 - a G_0^2 + \frac{1}{4} a (r^2 - a^2) N_2^2 \right] = \\ &= U \left[\mathbf{k} \left(1 - \frac{a}{r} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{a^3}{r^3} - \frac{a}{r} \right) (2\mathbf{a}_r \cos \vartheta + \mathbf{a}_\theta \sin \vartheta) \right], \quad (13.2.34) \end{aligned}$$

и избыточное давление равно

$$p = -\frac{3}{2} \frac{U\eta a}{r^2} \cos \vartheta.$$

Аффинор напряжений, согласно (2.3.10), имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} &= \frac{3}{2} \frac{U\eta a}{r^2} \mathfrak{F} \cos \vartheta + \eta (\nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla) = \\ &= \frac{3}{2} U \eta \frac{a^3}{r^4} \mathfrak{F} \cos \vartheta + \frac{9}{2} U \eta \mathbf{a}_r \mathbf{a}_r \left(\frac{a}{r^2} - \frac{a^3}{r^4} \right) \cos \vartheta - \frac{3}{2} U \eta (\mathbf{a}_r \mathbf{a}_\theta + \mathbf{a}_\theta \mathbf{a}_r) \frac{a^3}{r^4} \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Ввиду симметрии сила, действующая на сферу ($r = a$), направлена по оси z и по величине равна

$$F = a^2 \iint \mathbf{k} \cdot \mathfrak{F} \cdot \mathbf{a}_r \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{3}{2} a U \eta \iint \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 6\pi a U \eta, \quad (13.2.35)$$

что является выражением закона Стокса для силы сопротивления сферы, медленно движущейся в вязкой жидкости.

Заметим, что компонента по оси z лобового сопротивления одна и та же для любого элемента поверхности сферы. В рассматриваемом приближении лобовое сопротивление пропорционально относительной скорости сферы по отношению к жидкости, а также радиусу сферы. Отметим, наконец, что результаты (13.2.34) и (13.2.35) относятся к случаю стационарных условий, когда относительное движение продолжалось достаточно долго. Искажение поля скоростей захватывает значительную область вокруг сферы, главным образом из-за наличия члена $\mathbf{k}(aU/r)$. Если относительное движение начинается при $t = 0$, требуется определенный промежуток времени для установления стационарного режима.

Упругое деформирование сферы. Однородное уравнение статического деформирования сферы

$$(\lambda + 2\mu) \text{grad div } \mathbf{s} - \mu \text{rot rot } \mathbf{s} = 0$$

имеет в качестве двух систем поперечных решений системы \mathbf{M} и \mathbf{N} , уже определенные выражениями (13.2.17)–(13.2.20). При этом продольная система \mathbf{G} , определенная выражением (13.2.21), не является решением, и надо искать новую комбинацию полиномов от r и угловых функций \mathbf{B} и \mathbf{P} , удовлетворяющую данному уравнению.

Этого можно достичь, используя уравнения, приведенные в конце главы. Например, чтобы найти решение, аналогичное G_{mn} , положим

$$E_{mn}^1 = Ar^n B_{m, n-1} + Br^n P_{m, n-1}$$

и применим к этому выражению дифференциальные операторы

$$\text{grad div } E = [(n+2)B - \sqrt{n(n-1)}A] N_{m, n-2}^1,$$

$$\text{rot rot } E = \sqrt{\frac{n}{n-1}} [\sqrt{n(n-1)}B - (n+1)A] N_{m, n-2}^1,$$

откуда можно определить соотношение между A и B , при котором удовлетворяется уравнение упругости. Таким же образом составим комбинацию E_{mn}^2 из $r^{n-1}B_{m, n+1}$ и $r^{n-1}P_{m, n+1}$. Итак,

$$E_{smn}^1 = r^n \left[\sqrt{n(n-1)} B_{m, n-1}^s + \frac{\lambda(n+2) + \mu(n+4)}{\lambda(n-1) + \mu(n-3)} n P_{m, n-1}^s \right],$$

$$E_{smn}^2 = r^{n-1} \left[\sqrt{(n+1)(n+2)} B_{m, n+1}^s - \frac{\lambda(n+2) + \mu(n+4)}{\lambda(n-1) + \mu(n-3)} (n+1) P_{m, n+1}^s \right]. \quad (13.2.36)$$

Эти выражения переходят в функции G^1 и G^2 из (13.2.21) при $\lambda = -\mu$ (в этом случае и уравнение упругости переходит в векторное уравнение Лапласа). Однако при $\lambda \neq -\mu$ функции, определяющие угловую зависимость E , не ортогональны соответствующим частям M и N . Это осложняет представление аффинорной функции Грина в форме, аналогичной (13.2.28); более удобной оказывается другая форма.

Кроме того, нужно иметь выражение для напряжения на поверхности сферы $(\mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r)_{r=a}$. Для этого надо подсчитать радиальное напряжение

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_r \left[\lambda \text{div } \mathbf{s} + 2\mu \frac{\partial s_r}{\partial r} \right] + \mu \mathbf{a}_\vartheta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial s_r}{\partial \vartheta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{s_\vartheta}{r} \right) \right] + \\ + \mu \mathbf{a}_\varphi \left[\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial s_r}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{s_\varphi}{r} \right) \right] \end{aligned} \quad (13.2.37)$$

для каждой из функций M, N, E при $r=a$. Из формул, приведенных в конце главы, можно получить для аксиально-симметричного случая $m=0$ следующие полезные формулы:

$$\text{Для } \mathbf{s} = r^n \mathbf{C}_{0n} : \mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r = \mu (n-1) r^{n-1} \mathbf{C}_{0n}.$$

$$\begin{aligned} \text{Для } \mathbf{s} = r^n \mathbf{B}_{0, n+1} : \mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r = -\lambda \sqrt{(n+1)(n+2)} r^{n-1} \mathbf{P}_{0, n+1} + \\ + \mu (n-1) r^{n-1} \mathbf{B}_{0, n+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Для } \mathbf{s} = r^n \mathbf{B}_{0, n-1} : \mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r = -\lambda \sqrt{n(n-1)} r^{n-1} \mathbf{P}_{0, n-1} + \\ + \mu (n-1) r^{n-1} \mathbf{B}_{0, n-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Для } \mathbf{s} = r^n \mathbf{P}_{0, n+1} : \mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r = [\lambda(n+2) + 2\mu n] r^{n-1} \mathbf{P}_{0, n+1} + \\ + \mu \sqrt{(n+1)(n+2)} r^{n-1} \mathbf{B}_{0, n+1}. \end{aligned} \quad (13.2.38)$$

$$\begin{aligned} \text{Для } \mathbf{s} = r^n \mathbf{P}_{0, n-1} : \mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r = [\lambda(n+2) + 2\mu n] r^{n-1} \mathbf{P}_{0, n-1} + \\ + \mu \sqrt{n(n-1)} r^{n-1} \mathbf{B}_{0, n-1}. \end{aligned}$$

$$\text{Для } \mathbf{s} = M_n^1 : \mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r = \mu (n-1) \frac{1}{r} M_n^1.$$

$$\text{Для } \mathbf{s} = N_n^1 : \mathfrak{X} \cdot \mathbf{a}_r = 2\mu n \frac{1}{r} N_n^1.$$

Если задано смещение поверхности упругой сферы, то используются системы решений, являющихся взаимно ортогональными функциями углов ϑ и φ при $r = a$. Две из трех необходимых систем имеют вид

$$M_{mn}^1 = \sqrt{n(n+1)} r^n C_{mn}(\vartheta, \varphi),$$

$$N_{mn}^1 = \sqrt{(n+1)(n+2)} r^n B_{m, n+1}(\vartheta, \varphi) + (n+1) r^n P_{m, n+1}(\vartheta, \varphi).$$

Третья система получается как комбинация E_{mn} и $N_{m, n-2}$, ортогональная к N при $r = a$. Такая комбинация при $r = a$ должна иметь вид

$$\sqrt{n(n-1)} a^n B_{m, n-1} - n a^n P_{m, n-1},$$

т. е.

$$H_{mn}^1 = \frac{1}{\lambda(4n-1) + \mu(8n-3)} \{n(2n+1)(\lambda + \mu) a^2 N_{m, n-2}^1 - (2n-1)[\lambda(n-1) + \mu(n-3)] E_{mn}^1\}. \quad (13.2.39)$$

Через эти три системы можно выразить решение, соответствующее любым смещениям граничной поверхности. Пусть, например, часть поверхности сферы утолщается. Смещение поверхности в этом случае

$$s_{r=a} = \begin{cases} -ak(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) & \text{при } 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0, \\ 0 & \text{при } \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi. \end{cases} \quad (13.2.40)$$

Но, как указано в (13.2.24), можно составить функцию

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+1} [N_n^1 - H_n^1] &= \frac{1}{2n+1} [\sqrt{(n+1)(n+2)} B_{n+1} + (n+1) P_{n+1}] + \\ &+ \frac{(r^n/2n+1) \sqrt{n(n-1)}}{\lambda(4n-1) + \mu(8n-3)} \{ (2n-1)[\lambda(n-1) + \mu(n-3)] - \\ &- n(2n+1)(\lambda + \mu) \left(\frac{a}{r}\right)^2 \} B_{n-1} + \\ &+ \frac{nr^n/(2n+1)}{\lambda(4n-1) + \mu(8n-3)} \{ (2n-1)[\lambda(n+2) + \mu(n+4)] - \\ &- n(2n+1)(n-1)(\lambda + \mu) \left(\frac{a}{r}\right)^2 \} P_{n-1} \xrightarrow{r \rightarrow a} ka^n P_n(\cos \vartheta), \end{aligned} \quad (13.2.41)$$

а из таблицы в конце гл. 10 следует, что

$$\begin{aligned} F(\vartheta) &= \begin{cases} -a(\cos \vartheta - \cos \vartheta_0) & \text{при } 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0 \\ 0 & \text{при } \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi \end{cases} = \\ &= -\frac{1}{2} a \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{P_{n+2}(\cos \vartheta_0)}{2n+3} - \frac{2(2n+1)}{(2n+3)(2n-1)} P_n(\cos \vartheta_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{P_{n-2}(\cos \vartheta_0)}{2n-1} \right] P_n(\cos \vartheta), \end{aligned}$$

где положено $P_{-1} = 1$, $P_{-2}(\cos \vartheta) = P_1(\cos \vartheta)$. Из этих двух выражений легко составить функцию смещений, удовлетворяющую граничным усло-

виям (13.2.40) и ограниченную всюду внутри сферы:

$$s = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} a^{1-n} \left[\frac{P_{n+2}(\cos \vartheta_0)}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{2P_n(\cos \vartheta_0)}{(2n+3)(2n-1)} + \frac{P_{n-2}(\cos \vartheta_0)}{(2n+1)(2n-1)} \right] [N_n^1(r, \vartheta, \varphi) - H_n^1(r, \vartheta, \varphi)]; \quad (13.2.42)$$

$$s = -\frac{1}{2} a \left\{ \left[\frac{2}{3} - \cos \vartheta_0 + \frac{1}{3} P_2(\cos \vartheta_0) \right] \mathbf{k} + \left[1 - \frac{6}{5} \cos \vartheta_0 + \frac{1}{5} P_3(\cos \vartheta_0) \right] \frac{r}{a} \mathbf{k} P_1(\cos \vartheta) + \left[\frac{1}{3} - \frac{10}{21} P_2(\cos \vartheta_0) + \frac{1}{7} P_4(\cos \vartheta_0) \right] \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 P_2(\cos \vartheta) - \frac{2(\lambda + \mu)}{7\lambda + 13\mu} \frac{(a^2 - r^2)}{a^2} \right] \mathbf{k} + \dots \right\}.$$

Это и есть искомое решение. Так как члены для $n > 2$ не параллельны оси z , то смещение s не направлено по \mathbf{k} .

Используя (13.2.42), можно подсчитать напряжения в сфере

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} = & - \left[1 - \frac{6}{5} P_1(\cos \vartheta_0) + \frac{1}{5} P_3(\cos \vartheta_0) \right] \left[\frac{1}{2} \lambda \mathfrak{T} + \mu \mathbf{k} \mathbf{k} \right] - \\ & - \frac{1}{a} \left[\frac{1}{3} - \frac{10}{21} P_2(\cos \vartheta_0) + \frac{1}{7} P_4(\cos \vartheta_0) \right] \left\{ 3\lambda z \frac{3\lambda + 5\mu}{7\lambda + 13\mu} \mathfrak{T} + \right. \\ & \left. + 6\mu z \frac{3\lambda + 5\mu}{7\lambda + 13\mu} \mathbf{k} \mathbf{k} - \frac{3}{2} \mu \frac{\lambda + 3\mu}{7\lambda + 13\mu} [x(\mathbf{i} \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{i}) + y(\mathbf{j} \mathbf{k} + \mathbf{k} \mathbf{j})] \right\} - \dots \end{aligned} \quad (13.2.43)$$

Этот ряд сходится абсолютно при $r < a$.

Задание на поверхности вектора напряжения. В некоторых случаях на поверхности сферы задается вектор напряжения, а не смещение, однако искомой величиной по-прежнему остается смещение. Пусть, например, вектор напряжения при $r = a$ имеет вид

$$(\mathfrak{T} \cdot \mathbf{a}_r)_{r=a} = \begin{cases} a a_\varphi \sin \vartheta & \text{при } 0 \leq \vartheta < \vartheta_0, \\ 0 & \text{при } \vartheta_0 < \vartheta < \pi - \vartheta_0, \\ -a a_\varphi \sin \vartheta & \text{при } \pi - \vartheta_0 < \vartheta \leq \pi, \end{cases}$$

что соответствует закручиванию областей у полюсов сферы (до широты $\vartheta = \vartheta_0$) в противоположных направлениях при помощи прикрепленных к ним жестких стержней, к которым приложен вращающий момент T . Постоянная a связана с T соотношением

$$T = \frac{2}{3} \pi a^3 \lambda (1 - \cos \vartheta_0)^2 (2 + \cos \vartheta_0).$$

В этом случае используются только решения $M_n^1(r, \vartheta, \varphi) = a_z r^n P_n^1(\cos \vartheta)$ и притом лишь для четных индексов $n > 0$, так как ищется решение, меняющее знак при замене ϑ на $\pi - \vartheta$. Поэтому положим

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} A_n M_{2n+2}^1, \quad \mathfrak{T} \cdot \mathbf{a}_r = a_\varphi \mu \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n r^{2n+1} P_{2n+2}^1(\cos \vartheta),$$

где P_{2n+2} — присоединенная функция Лежандра, рассмотренная в гл. 10. Для определения постоянных A_n умножим обе части выражения для

$(\mathfrak{L} \cdot \mathbf{a}_r)_{r=a}$ на $P_{2m+2}^1 \sin \vartheta d\vartheta$ и проинтегрируем по ϑ :

$$\begin{aligned} \mu (2n+1) A_n a^{2n+1} \int_{-1}^1 [P_{2n+2}^1(x)]^2 dx &= \\ &= 2\mu \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{4n+5} A_n a^{2n+1} = \\ &= 2\alpha \int_{\cos \vartheta_0}^1 \sqrt{1-x^2} P_{2n+2}^1(x) dx = \\ &= \frac{2\alpha}{(2n+1)(2n+4)} \sin^2 \vartheta_0 P_{2n+2}^2(\cos \vartheta_0); \\ A_n &= \frac{(3T/2\pi\mu) a^{-2n-4}}{(1-\cos \vartheta_0)^2 (2+\cos \vartheta_0)} \cdot \frac{(4n+5)(2n)!}{(2n+1)(2n+4)!} \sin^2 \vartheta_0 P_{2n+2}^2(\cos \vartheta_0). \end{aligned}$$

Следовательно, смещение s части сферы в точке (r, ϑ, φ) равно

$$\begin{aligned} s &= \mathbf{a}_\varphi \frac{3T/2\pi\mu a^2}{(1-\cos \vartheta_0)^2 (2+\cos \vartheta_0)} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+5)(2n)!}{(2n+1)(2n+4)!} \sin^2 \vartheta_0 P_{2n+2}^2(\cos \vartheta_0) \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+2} P_{2n+2}^1(\cos \vartheta) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\vartheta_0 \rightarrow 0} \mathbf{a}_\varphi \frac{T}{4\pi\mu a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+5}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+2} P_{2n+2}^1(\cos \vartheta), \quad (13.2.44) \end{aligned}$$

что означает значительное скручивание в области приложения вращающего момента и уменьшение скручивания при удалении от точек приложения нагрузки. При помощи таблиц в конце гл. 10 получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+5}{2n+1} x^{2n+2} P_{2n+2}^1(z) = 3x \sqrt{1-z^2} \int_0^x \frac{1-x^2}{x} \left[\frac{1}{(1+x^2-2xz)^{5/2}} - \frac{1}{(1+x^2+2xz)^{5/2}} \right] dx,$$

откуда можно получить явное аналитическое выражение для s при $\vartheta_0 \rightarrow 0$.

Можно рассмотреть много других примеров, относящихся к упругой сфере, но при этом не выявятся новые принципы. К функции Грина можно также прийти предельным переходом в решениях задач об упругих колебаниях, но это будет рассмотрено в следующем параграфе.

13.3. Векторные волновые поля

Как было показано в § 13.1, решения векторного уравнения Гельмгольца $\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0$ не имеют таких особенностей, как разобранные в § 13.2 решения векторного уравнения Лапласа, соответствующего $k=0$. Многие волновые решения полностью аналогичны скалярным волновым решениям, рассмотренным в гл. 11. Мы попытаемся выявить их общность, но главным образом будем подчеркивать различающие их свойства.

В основном мы будем рассматривать только электромагнитные поля, упругую среду и движение вязкой жидкости, хотя в природе встречаются векторные поля и другого типа. Уравнения этих полей и граничные условия для них уже были приведены в гл. 2 и повторены в § 13.1. По мере необходимости мы будем их приводить снова.