

$(\mathfrak{L} \cdot \mathbf{a}_r)_{r=a}$ на $P_{2m+2}^1 \sin \vartheta d\vartheta$ и проинтегрируем по ϑ :

$$\begin{aligned} \mu (2n+1) A_n a^{2n+1} \int_{-1}^1 [P_{2n+2}^1(x)]^2 dx &= \\ &= 2\mu \frac{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}{4n+5} A_n a^{2n+1} = \\ &= 2\alpha \int_{\cos \vartheta_0}^1 \sqrt{1-x^2} P_{2n+2}^1(x) dx = \\ &= \frac{2\alpha}{(2n+1)(2n+4)} \sin^2 \vartheta_0 P_{2n+2}^2(\cos \vartheta_0); \end{aligned}$$

$$A_n = \frac{(3T/2\pi\mu) a^{-2n-4}}{(1-\cos \vartheta_0)^2 (2+\cos \vartheta_0)} \cdot \frac{(4n+5)(2n)!}{(2n+1)(2n+4)!} \sin^2 \vartheta_0 P_{2n+2}^2(\cos \vartheta_0).$$

Следовательно, смещение s части сферы в точке (r, ϑ, φ) равно

$$\begin{aligned} s &= a_\varphi \frac{3T/2\pi\mu a^2}{(1-\cos \vartheta_0)^2 (2+\cos \vartheta_0)} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+5)(2n)!}{(2n+1)(2n+4)!} \sin^2 \vartheta_0 P_{2n+2}^2(\cos \vartheta_0) \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+2} P_{2n+2}^1(\cos \vartheta) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\vartheta_0 \rightarrow 0} a_\varphi \frac{T}{4\pi\mu a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+5}{2n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+2} P_{2n+2}^1(\cos \vartheta), \quad (13.2.44) \end{aligned}$$

что означает значительное скручивание в области приложения вращающего момента и уменьшение скручивания при удалении от точек приложения нагрузки. При помощи таблиц в конце гл. 10 получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+5}{2n+1} x^{2n+2} P_{2n+2}^1(z) = 3x \sqrt{1-z^2} \int_0^x \frac{1-x^2}{x} \left[\frac{1}{(1+x^2-2xz)^{5/2}} - \frac{1}{(1+x^2+2xz)^{5/2}} \right] dx,$$

откуда можно получить явное аналитическое выражение для s при $\vartheta_0 \rightarrow 0$.

Можно рассмотреть много других примеров, относящихся к упругой сфере, но при этом не выявятся новые принципы. К функции Грина можно также прийти предельным переходом в решениях задач об упругих колебаниях, но это будет рассмотрено в следующем параграфе.

13.3. Векторные волновые поля

Как было показано в § 13.1, решения векторного уравнения Гельмгольца $\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = 0$ не имеют таких особенностей, как разобранные в § 13.2 решения векторного уравнения Лапласа, соответствующего $k=0$. Многие волновые решения полностью аналогичны скалярным волновым решениям, рассмотренным в гл. 11. Мы попытаемся выявить их общность, но главным образом будем подчеркивать различающие их свойства.

В основном мы будем рассматривать только электромагнитные поля, упругую среду и движение вязкой жидкости, хотя в природе встречаются векторные поля и другого типа. Уравнения этих полей и граничные условия для них уже были приведены в гл. 2 и повторены в § 13.1. По мере необходимости мы будем их приводить снова.

Единственное дополнительное замечание, которое здесь уместно сделать, касается временной зависимости в уравнении для потока вязкой жидкости. При достаточно малой скорости потока (см. стр. 159 в т. I и стр. 731 в настоящем томе) уравнение (2.3.14) переходит в

$$\nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\rho}{\eta} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\eta} \text{grad } P, \quad (13.3.1)$$

где $\text{div } \mathbf{v} = 0$ и $P = p + V$. Это не неоднородное волновое уравнение, а векторное уравнение диффузии, поэтому его решения не имеют волнового характера. Однако решения этого уравнения рассматриваются здесь из-за их векторных свойств, а также и потому, что, отделяя временную зависимость (в виде экспоненциального множителя), мы получим векторное уравнение Гельмгольца для зависящей от пространственных координат части решения. Это уравнение аналогично уравнениям для электромагнитных и упругих колебаний. Таким образом, общие методы решения заставляют рассматривать это уравнение в данном параграфе, а не где-либо в другой части книги.

Отражение плоской волны от плоскости. В вакууме плоская электромагнитная волна частоты $\omega/2\pi = kc/2\pi$, распространяющаяся в направлении, параллельном единичному вектору $\mathbf{a}_i = \mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta$, задается в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{c}{i\omega} E_0 \mathbf{a}_e e^{ik(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r} - ct)}, \quad \varphi = 0, \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = E_0 \mathbf{a}_e e^{ik(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r} - ct)}, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{a}_i \times \mathbf{E} = E_0 \mathbf{a}_h e^{ik(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r} - ct)}, \end{aligned} \quad (13.3.2)$$

где¹⁾ \mathbf{a}_i ,

$$\mathbf{a}_e = -\mathbf{a}_x \sin \theta \sin \phi + \mathbf{a}_y \cos \theta \sin \phi + \mathbf{a}_z \cos \phi = \mathbf{a}_h \times \mathbf{a}_i$$

и

$$\mathbf{a}_h = \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_e = \mathbf{a}_x \sin \theta \cos \phi - \mathbf{a}_y \cos \theta \cos \phi + \mathbf{a}_z \sin \phi$$

образуют правую тройку ортонормированных векторов, составляющих углы Эйлера θ и ϕ с осями x , y и z . Если отражающая плоскость совпадает с плоскостью (y, z) , то угол θ является углом падения и (поскольку направление поляризации волны определяется вектором \mathbf{H}) угол ϕ измеряет угол между направлением поляризации \mathbf{a}_h и плоскостью (x, y) , которая называется *плоскостью падения*. Это показано на рис. 13.3.

Если граничная поверхность при $x=0$ является практически идеальным проводником, то необходимо, чтобы $\mathbf{E} \times \mathbf{a}_x = 0$ при $x=0$, и поэтому $\mathbf{A} \times \mathbf{a}_x = 0$. Поскольку $\text{div } \mathbf{A}$ также равна нулю, этого граничного условия для обеих компонент касательной составляющей \mathbf{A} достаточно для полного определения решения. К падающей волне надо добавить отраженную с направлением распространения $\mathbf{a}'_i = -\mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta$ и с таким углом χ между направлением поляризации и плоскостью падения (и отражения), чтобы касательные составляющие электрического поля падающей и отраженной волны взаимно уничтожались. Для идеального проводника при $x=0$ это имеет место при $\chi = \phi$, и полное поле определяется выражением

¹⁾ В этом параграфе опять употребляются \mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y , \mathbf{a}_z вместо \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , чтобы не спутать их с $i = \sqrt{-1}$ и $k = \omega/c$.

(для $x < 0$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 [\mathbf{a}_e e^{ikhx \cos \theta} - \mathbf{a}'_e e^{-ikhx \cos \theta}] e^{iky \sin \theta - i\omega t} = \\ &= 2E_0 [-\mathbf{a}_x \sin \theta \sin \psi \cos(kx \cos \theta) + \\ &+ (\mathbf{a}_y \cos \theta \sin \psi + \mathbf{a}_z \cos \psi) i \sin(kx \cos \theta)] e^{iky \sin \theta - i\omega t}, \quad (13.3.3) \\ \mathbf{H} &= 2E_0 [\mathbf{a}_x \sin \theta \cos \psi i \sin(kx \cos \theta) - \\ &- (\mathbf{a}_y \cos \theta \cos \psi - \mathbf{a}_z \sin \psi) \cos(kx \cos \theta)] e^{iky \sin \theta - i\omega t}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{a}_e = \mathbf{a}_x \sin \theta \sin \psi + \mathbf{a}_y \cos \theta \sin \psi + \mathbf{a}_z \cos \psi \quad \text{и} \quad \mathbf{a}'_e = \mathbf{a}'_i \times \mathbf{a}'_e.$$

Вектор \mathbf{H} всюду ортогонален к \mathbf{E} .

Отложим рассмотрение более сложных граничных условий для электромагнитного поля, пока не рассмотрено простое отражение упругих волн.

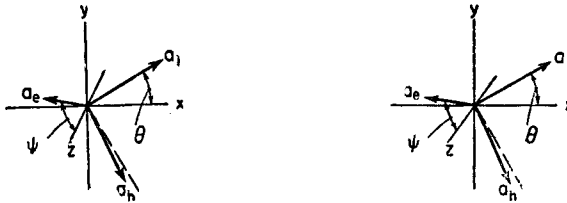


Рис. 13.3. Векторы, используемые при описании отражения поперечной волны от плоскости (y, z).

В случае упругих колебаний имеют место как продольные волны (сжатия), так и поперечные волны (сдвига)

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_c &= S_c \mathbf{a}_i e^{ikhc \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t}, \quad \mathbf{s}_s = S_s \mathbf{a}_h e^{ikhs \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t}, \\ k_c &= \omega/c_c, \quad k_s = \omega/c_s, \end{aligned} \quad (13.3.4)$$

где две различные скорости распространения волн c_c и c_s определяются формулами (2.2.2) и (2.2.3). Соответствующие аффиноры напряжений выражаются формулами (2.2.14) и (2.2.16):

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_c &= ik_c [\lambda \mathfrak{S} + 2\mu \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i] S_c e^{ikhc \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t}, \\ \mathfrak{T}_s &= ik_s \mu [\mathbf{a}_i \mathbf{a}_h + \mathbf{a}_h \mathbf{a}_i] S_s e^{ikhs \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t}. \end{aligned}$$

Если среда занимает пространство $x < 0$ и граница $x = 0$ свободна, то граничное условие имеет вид $\mathfrak{T} \cdot \mathbf{a}_x = 0$. Чтобы ему удовлетворить, надо добавить отраженную волну; при этом даже для чисто продольной падающей волны в отраженную волну будет входить поперечная часть, если только угол падения отличен от нуля. Например, для падающей волны сжатия полное поле имеет вид

$$\mathbf{s} = S_i \mathbf{a}_i e^{ikhc \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t} + S' \mathbf{a}'_i e^{ikhc \mathbf{a}'_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t} + S'' \mathbf{a}''_i \times \mathbf{a}_z e^{ikhs \mathbf{a}''_i \cdot \mathbf{r} - i\omega t}.$$

Здесь направления распространения отраженных поперечной и продольной волн не совпадают, так как $k_c \neq k_s$ и должно выполняться условие $k_c \sin \theta = k_s \sin \theta'$ для того, чтобы при $x = 0$ зависимость всех волн от y была одинакова. Здесь также положено $\psi' = 0$, поскольку задача является симметричной. Поэтому $\mathbf{a}''_i = \mathbf{a}''_i \times \mathbf{a}_z$, где $\mathbf{a}''_i = -\mathbf{a}_x \cos \theta' + \mathbf{a}_y \sin \theta'$. Вектор напряжения на плоскости $x = 0$ равен тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} \cdot \mathbf{a}_x)_0 &= i \{ k_c [\lambda \mathbf{a}_x + 2\mu \mathbf{a}_i \cos \theta] S_i + k_c [\lambda \mathbf{a}_x - 2\mu \mathbf{a}'_i \cos \theta] S' + \\ &+ k_s \mu [\mathbf{a}''_i \sin \theta' - [\mathbf{a}''_i \times \mathbf{a}_z] \cos \theta'] S'' \} e^{iky \sin \theta - i\omega t}. \end{aligned}$$

Соответствующим выбором S' и S'' это выражение надо обратить в нуль. Отсюда вытекает, что $\sin \theta' = c_s/c_c \sin \theta$ и

$$S' = -S_i \frac{\lambda + 2\mu \cos^2 \theta - \mu \sin 2\theta \cdot \operatorname{tg} 2\theta'}{\lambda + 2\mu \cos^2 \theta + \mu \sin 2\theta \cdot \operatorname{tg} 2\theta'}$$

$$S'' = 2S_i \frac{\lambda + 2\mu \cos^2 \theta}{\lambda + 2\mu \cos^2 \theta + \mu \sin 2\theta \cdot \operatorname{tg} 2\theta'} \cdot \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta'}$$

для амплитуд отраженных волн сжатия и сдвига. Угол θ' отраженной волны сдвига меньше $\pi/4$ для $0 \leq \theta \leq \pi/2$, так как $(c_s/c_c)^2 = \mu/(\lambda + 2\mu)$, что всегда меньше $1/2$. Следовательно, $\operatorname{tg}(2\theta')$ никогда не достигает бесконечности. Для нормального падения $S'' = 0$ и отраженная волна является волной чистого сжатия.

Граничный импеданс. Если материал отражающей плоскости не является идеально отражающим, то составление граничных условий оказывается более трудной задачей. Чтобы придать им возможно более удобную форму, используем идею импеданса, развитую в гл. 3.

Начиная с электромагнитного поля, отметим, что поскольку потенциалы выбраны так, что $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, для определения поля достаточно задать лишь два граничных условия. В качестве таковых выберем соотношение между касательными составляющими \mathbf{E} и \mathbf{H} , так как эти компоненты непрерывны при переходе через границу, в то время как нормальные составляющие поля терпят разрыв. При этом из непрерывности касательных составляющих поля автоматически следует и удовлетворение граничных условий для нормальных составляющих, поскольку по обе стороны границы определены дивергенции \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Можно еще больше сузить требования, если вспомнить, что для монохроматической волны в каждой точке пространства можно задать аффино́р, определяющий «отношение» между $c\mathbf{H}$ и $-4\pi\mathbf{E}$, как это следует из выражения (3.4.23). Это «отношение» было названо аффино́ром импеданса волны в данной точке. При этом рассматривается двумерный аффино́р, преобразующий тангенциальные составляющие \mathbf{H} в тангенциальные компоненты \mathbf{E} , а не полный вектор \mathbf{H} в вектор \mathbf{E} . Это не обычный трехмерный аффино́р, поскольку он не инвариантен относительно преобразования поворота осей координат в трехмерном пространстве, но в пространстве двух измерений на граничной поверхности этот аффино́р ведет себя обычным образом (а это все, что в данном случае требуется).

Определим аффино́р \mathfrak{Z}_i , *нормальный импеданс* рассматриваемой граничной поверхности, при помощи соотношения

$$4\pi[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = c\mathfrak{Z}_i \cdot [\mathbf{H} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{H})], \quad (13.3.5)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор внутренней нормали к поверхности [$\mathbf{n} = \mathbf{a}_x$ в примере (13.3.3)], а выражение в квадратных скобках в правой части дает касательную составляющую вектора \mathbf{H} . Двумерный аффино́р \mathfrak{Z}_i выражается через аффино́р импеданса трехмерного поля \mathfrak{Z} , определяемый выражением (3.4.23), сложным образом. Но как вскоре будет показано, это можно сделать для каждого конкретного случая.

Определив компоненты нормального импеданса \mathfrak{Z}_i с внутренней стороны поверхности ($x = +\delta$), надо так выбрать отношение касательных составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} с наружной стороны поверхности ($x = -\delta$), чтобы \mathfrak{Z}_i был *непрерывным при переходе через поверхность*. Если определение поля внутри поверхности не представляет интереса, то *единственным искомым граничным условием* и является это требование непрерывности аффино́ра нормального импеданса.

Чтобы лучше почувствовать излагаемый метод, выведем выражение аффино́ра нормального импеданса с внутренней стороны граничной плоско-

сти $x=0$ для плоской волны, распространяющейся от этой плоскости (x возрастает). Это соответствует появлению преломленной волны, когда падающая волна приходит с внешней стороны поверхности ($x < 0$). Пусть θ' — угол между направлением преломления и нормалью к поверхности i . Позже будет установлена связь между углом θ' и углом падения θ . Характеристики среды — диэлектрическая постоянная ε , магнитная проницаемость μ и проводимость σ — пусть имеют произвольные значения. Уравнение (2.5.19) и последующие мы используем как уравнения движения для \mathbf{A} . Комплексную постоянную n , где

$$n^2 = \mu\varepsilon + \frac{4\pi i\mu\sigma}{\omega},$$

назовем *коэффициентом преломления* среды. Выбирая различные значения амплитуд для случая, когда магнитный вектор параллелен плоскости падения (x, y), и случая, когда \mathbf{H} нормален к ней, получим для $x > 0$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{ik} [E'_\perp (-\mathbf{a}_x \sin \theta' \sin \psi' + \mathbf{a}_y \cos \theta' \sin \psi') + E'_\parallel \mathbf{a}_z \cos \psi'] e^{ikn(x \cos \theta' + y \sin \theta') - i\omega t}$$

и

$$4\pi \mathbf{a}_x \times \mathbf{E} = 4\pi (-\mathbf{a}_y E'_\parallel + \mathbf{a}_z E'_\perp \cos \theta') e^{ikn(x \cos \theta' + y \sin \theta') - i\omega t},$$

$$c[\mathbf{H} - \mathbf{a}_x (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{H})] = \frac{cn}{\mu} (-\mathbf{a}_y E'_\parallel \cos \theta' + \mathbf{a}_z E'_\perp) e^{ikn(x \cos \theta' + y \sin \theta') - i\omega t},$$

$$k = \omega/c.$$

Эти векторы не параллельны, но аффино нормального импеданса имеет достаточно простой вид

$$3\bar{i} = \frac{4\pi\mu}{cn} [\mathbf{a}_y \mathbf{a}_y \sec \theta' + \mathbf{a}_z \mathbf{a}_z \cos \theta'], \quad x > 0, \quad (13.3.6)$$

который не зависит от значений E'_\parallel и E'_\perp и остается постоянным на всей площади поверхности, освещенной падающей волной. Остается лишь так подобрать значения падающей и отраженной волн, чтобы соответствующее значение $\bar{3}$ с внешней стороны поверхности ($x < 0$) было равно этому аффино при $x = 0$.

Отметим, что лишь плоская волна дает такой простой импеданс. Между прочим, отметим также, что если коэффициент преломления n велик (или из-за большого $\mu\varepsilon$, или из-за большого $\mu\sigma/\omega$), то аффино нормального импеданса поверхности мал.

Поле плоской волны единичной амплитуды с углом падения θ и углом поляризации ψ и отраженной волной с неизвестными амплитудами R_\parallel и R_\perp , соответствующих поляризаций, для $x < 0$ дается выражением

$$\mathbf{A} = \frac{1}{ik} \{ [-\mathbf{a}_x \sin \theta \sin \psi + \mathbf{a}_y \cos \theta \sin \psi + \mathbf{a}_z \cos \psi] e^{ikx \cos \theta} + [R_\perp (\mathbf{a}_x \sin \theta + \mathbf{a}_y \cos \theta) + R_\parallel \mathbf{a}_z] e^{-ikx \cos \theta} \} e^{iky \sin \theta - i\omega t},$$

и при $x = 0$

$$4\pi \mathbf{a}_x \times \mathbf{E} = 4\pi [-\mathbf{a}_y (\cos \psi + R_\parallel) + \mathbf{a}_z \cos \theta (\sin \psi + R_\perp)] e^{iky \sin \theta - i\omega t},$$

$$c[\mathbf{H} - \mathbf{a}_x (\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{H})] = c [-\mathbf{a}_y \cos \theta (\cos \psi - R_\parallel) + \mathbf{a}_z (\sin \psi - R_\perp)] e^{iky \sin \theta - i\omega t},$$

так что импеданс при $x = 0$ равен

$$3\bar{i} = \frac{4\pi}{c} \left[\mathbf{a}_y \mathbf{a}_y \sec \theta \frac{\cos \psi + R_\parallel}{\cos \psi - R_\parallel} + \mathbf{a}_z \mathbf{a}_z \cos \theta \frac{\sin \psi + R_\perp}{\sin \psi - R_\perp} \right].$$

Заметим, что этот импеданс для падающей и отраженной волн зависит от x (формула для $x \neq 0$ получается умножением каждого из R в формуле для \mathfrak{Z}_i^- для $x=0$ на $e^{-2ikx \cos \theta}$), в то время как импеданс для единичной плоской волны не зависит ни от x , ни от y , ни от z .

Сначала надо связать угол преломления θ' с углом падения (и отражения) θ . Это можно сделать, заметив, что касательные составляющие полей непрерывны при переходе через границу и поэтому зависимость от y (а также z и t) одинакова с обеих сторон границы. Зависимость от t исключена, от z зависимости нет, а зависимость от y будет требуемой, если угол падения θ и угол преломления θ' удовлетворяют закону Снеллиуса

$$n \sin \theta' = \sin \theta, \quad \cos \theta' = \sqrt{1 - (1/n)^2 \sin^2 \theta}.$$

Далее, для того чтобы \mathfrak{Z}_i^- при $x=0$ равнялось \mathfrak{Z}_i^+ , надо выбрать отраженную амплитуду в виде

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= -\cos \psi \left[\frac{1 - (\mu/n) (\cos \theta / \cos \theta')}{1 + (\mu/n) (\cos \theta / \cos \theta')} \right], \\ R_{\perp} &= -\sin \psi \left[\frac{1 - (\mu/n) (\cos \theta' / \cos \theta)}{1 + (\mu/n) (\cos \theta' / \cos \theta)} \right], \end{aligned} \quad (13.3.7)$$

что дает отраженные амплитуды для обеих поляризаций. Отметим, что при этом способе решения для определения величин R не нужно значение преломленной амплитуды, а нужна лишь величина импеданса. Эти формулы дают хорошо известные выражения для интенсивности при отражении поляризованных лучей.

Если n велико из-за большого значения ϵ_r или $\mu\sigma/\omega$, то угол преломления θ' всегда мал. Так как проводимость σ большинства металлов порядка 10^{17} CGSE, то величина $\mu\sigma/\omega$ велика даже при частотах порядка тысяч мегагерц и значения $\cos \theta'$ и $\sec \theta'$ в (13.3.6) отличаются от единицы меньше, чем на 0,01%. Поэтому аффинор нормального импеданса для металлической поверхности, перпендикулярной оси x , равен $\mathfrak{Z}_i \simeq (4\pi\mu/cn) (\mathbf{a}_y \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \mathbf{a}_z)$. Используя приближенную формулу

$$n \simeq \sqrt{2\pi\mu\sigma/\omega} (1 + i), \quad \mu\sigma \gg \omega,$$

и обобщая форму аффинора для единичной нормали \mathbf{n} к произвольно ориентированной поверхности, получим окончательно для аффинора нормального импеданса металлической поверхности

$$\mathfrak{Z}_i \simeq -\frac{4\pi}{c} \sqrt{\frac{\mu\omega}{4\pi\sigma}} [\mathbf{n} \times \mathfrak{F} \times \mathbf{n}] e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad (13.3.8)$$

где \mathbf{n} — внутренняя нормаль к поверхности (составляющая острый угол с направлением падения). В дальнейшем это выражение будет существенно использовано.

Оно особенно полезно в том случае, когда можно разложить наше решение на векторы \mathbf{M} и \mathbf{N} , определенные в § 13.1, из которых один касателен к поверхности, а другой имеет касательный к поверхности ротор. Решения вида \mathbf{M} соответствуют \mathbf{A} и \mathbf{E} , касательным к поверхности, и $\mathbf{N} = \text{rot } \mathbf{A}$; решения типа \mathbf{N} соответствуют \mathbf{H} , касательным к поверхности. Для решений типа \mathbf{M} можно положить $\mathbf{E} = (i\omega/c) \mathbf{A} = \mathbf{a}_z E(x, y)$, если направление x выбрано по нормали к поверхности, а направление z — по направлению \mathbf{E} , ортогональному \mathbf{a}_x . Поскольку $\text{div } \mathbf{E} = 0$, в рассматриваемой точке производная E по z должна быть равна нулю. Из уравнений (2.5.18) для монохроматического поля в вакууме

$$\mathbf{H} = \frac{c}{i\omega} \left[\mathbf{a}_x \frac{\partial E}{\partial y} - \mathbf{a}_y \frac{\partial E}{\partial x} \right],$$

так что нормальный импеданс равен

$$\mathfrak{Z}_t = \frac{4\pi i \omega}{c^2} \cdot \frac{E}{\partial E / \partial x} \cdot (a_y a_y + a_z a_z).$$

Сравнивая это выражение с (13.3.8), заключаем, что если векторный потенциал A касателен к поверхности, то граничные условия на поверхности металла дают для решений типа M следующее соотношение между граничным значением векторного потенциала и нормальной производной (по внутренней нормали) его величины:

$$A = \frac{1}{ik} \sqrt{\frac{\mu \omega}{4\pi \sigma}} e^{-i\pi/4} \frac{\partial A}{\partial n}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (13.3.9)$$

Величины μ и σ берутся, конечно, для среды вне граничной поверхности ($x > 0$). Соответствующее отношение для решений типа N ($\text{rot } A = \mathbf{H}$ касателен) имеет вид

$$H = \frac{1}{ik} \sqrt{\frac{4\pi \sigma}{\mu \omega}} e^{i\pi/4} \frac{\partial H}{\partial n}.$$

Когда σ очень велико (как для металлов), A очень мало по сравнению с $\partial A / \partial n$, если A и E параллельны поверхности, а $\partial H / \partial n$ должно быть очень мало по сравнению с H , если $\mathbf{H} = \text{rot } A$ параллельно поверхности.

Отражение упругих волн. В случае электромагнитного поля считается, что условие нулевой дивергенции ($\text{div } A = 0$) выполняется не только на границе, но и во всем пространстве. Поэтому надо задать лишь два граничных условия. Были выбраны касательные составляющие поля, что позволило выразить граничное условие через двумерный аффинор \mathfrak{Z}_t . Требования, накладываемые на упругое смещение, не полностью аналогичны, поэтому на граничной поверхности $x = 0$ надо задать три граничных условия. Часть условий выражается через импеданс вида, приведенного на стр. 752, но это не всегда приводит к упрощениям. Столь же удобно пользоваться сопряжением смещений и напряжений на граничной поверхности.

В качестве примера рассмотрим отражение плоской упругой волны от границы раздела двух сред, одна из которых ($x < 0$) характеризуется упругими постоянными λ_- и μ_- , другая ($x > 0$) — постоянными λ_+ и μ_+ . Если направление распространения падающей слева продольной волны (чистого сжатия) параллельно вектору $a_i = i \cos \theta + j \sin \theta$, то угол отражения волны сжатия также равен θ , а угол отражения поперечной волны сдвига равен θ' . Соответствующие углы θ_+ и θ'_+ преломленных волн во второй среде связаны требованием, чтобы зависимость всех волн от y при $x = 0$ удовлетворяла обобщенному закону Снеллиуса

$$(1/c_-) \sin \theta = (1/c'_-) \sin \theta' = (1/c_+) \sin \theta_+ = (1/c'_+) \sin \theta'_+; \\ (c_-)^2 = (\lambda_- + 2\mu_-) / \rho_-; \quad (c'_+)^2 = \mu_+ / \rho_+.$$

Выражения для смещений и напряжений имеют вид

$$\mathbf{s} = \begin{cases} [a_i e^{ik_- r \cdot a_i} + a'_i C e^{ik_- r \cdot a'_i} + [a''_i \times a_z] D e^{ik_- r \cdot a''_i}] e^{-i\omega t} & \text{при } x < 0, \\ [A a_r e^{ik_+ r \cdot a_r} + B [a''_r \times a_z] e^{ik_+ r \cdot a''_r}] e^{-i\omega t} & \text{при } x > 0, \end{cases} \quad (13.3.10)$$

$$\mathfrak{S} = \begin{cases} ik_- \{(\lambda_- \mathfrak{S} + 2\mu_- a_i a_i) e^{ik_- r \cdot a_i} + C(\lambda_- \mathfrak{S} + 2\mu_- a'_i a'_i) e^{ik_- r \cdot a'_i} + \\ + D \mu_- (c_- / c'_+) [a''_i [a''_i \times a_z] + [a''_i \times a_z] a''_i] e^{ik_- r \cdot a''_i}\} e^{-i\omega t} & \text{при } x < 0, \\ ik_+ \{A(\lambda_+ \mathfrak{S} + 2\mu_+ a_r a_r) e^{ik_+ r \cdot a_r} + \\ + B \mu_+ (c'_+ / c_+) [a''_r [a''_r \times a_z] + [a''_r \times a_z] a''_r] e^{ik_+ r \cdot a''_r}\} e^{-i\omega t} & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

для падающей волны сжатия единичной амплитуды, где

$$k_c^- c_c^- = \omega \text{ и т. д.}; \quad \mathbf{a}_i' = -i \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta; \quad \mathbf{a}_i'' = -i \cos \theta' + \mathbf{j} \sin \theta'; \\ \mathbf{a}_r = i \cos \theta_* + \mathbf{j} \sin \theta_*; \quad \mathbf{a}_r'' = i \cos \theta_*' + \mathbf{j} \sin \theta_*'.$$

Приравнявая выражения для x - и y -компонент вектора \mathbf{s} и компонент $\mathbf{a}_x \cdot \mathfrak{T}$, вектора напряжения на поверхности,

$$(1 - C) \cos \theta + D \sin \theta' = A \cos \theta_* + B \sin \theta_*' \text{ и т. д.},$$

получим систему четырех уравнений, которую можно разрешить относительно A, B, C, D — амплитуд двух отраженных и двух преломленных волн, порожденных падающей волной единичной амплитуды.

Волны в волноводе. Следующей по сложности конфигурации границ является внутренность волновода прямоугольного поперечного сечения ширины a (в направлении оси x) и высоты b (в направлении оси y). Приняв вначале, что волновод является бесконечным в направлении z , исследуем волну, распространяющуюся в положительном направлении z .

В случае электромагнитных колебаний, когда среда внутри волновода в отношении распространения эквивалентна вакууму, можно применить граничные условия (13.3.9) и последующие, если волновод имеет металлические стенки. Начнем со случая идеальной проводимости, при котором для касательного вектора \mathbf{E} на границе A_t равно 0, а для касательного вектора \mathbf{H} на границе $\partial H / \partial n$ равно 0. Функция M не может быть касательной ко всей боковой поверхности волновода, но может быть ортогональна оси z , касательна к одной паре стенок волновода и ортогональна к другой. Этого вполне достаточно.

Соответственно назовем решения типа M *поперечно-электрическими волнами*, положив

$$\mathbf{A} = \frac{1}{ik} \mathbf{E} = \frac{1}{ik} \text{rot} [\mathbf{a}_z \psi(x, y) e^{ih_z z - i\omega t}],$$

где ψ — решение двумерного скалярного уравнения Гельмгольца $\nabla^2 \psi + k_z^2 \psi = 0$ и где $c^2 (k_z^2 + k_t^2) = c^2 k^2 = \omega^2$. Граничные условия для ψ таковы, что касательные составляющие \mathbf{A} и \mathbf{E} обращаются в нуль на боковой поверхности. Это имеет место, если $\partial \psi / \partial n = 0$ всюду на боковой поверхности; другими словами, для *поперечно-электрических волн*

$$\mathbf{A} = \frac{1}{ik} \mathbf{E} = \mathbf{M}_{mn} = \frac{1}{ik} \text{rot} \left[\mathbf{a}_z \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) e^{ih_z z - i\omega t} \right] = \\ = \left[i\mathbf{a}_x \frac{n\pi}{bk} \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) - \right. \\ \left. - i\mathbf{a}_y \frac{m\pi}{ak} \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right] e^{ih_z z - i\omega t}; \\ k_z^2 = k^2 - k_{mn}^2; \quad k_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2; \quad k = \frac{\omega}{c};$$

$$\mathbf{H} = \text{rot}(\mathbf{M}_{mn}) = \left\{ -k_z \left[\mathbf{a}_x \frac{m\pi}{ak} \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \mathbf{a}_y \frac{n\pi}{bk} \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right] - \right. \\ \left. - ik\mathbf{a}_z \left[\left(\frac{m\pi}{ak} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{bk} \right)^2 \right] \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right\} e^{ih_z z - i\omega t}. \quad (13.3.11)$$

Для волн, распространяющихся в противоположном направлении оси z , нужно просто изменить знак у k_z .

Имеет место дисперсия этих волн, причем фазовая скорость $c_z = \omega/k_z$ больше c ; в самом деле, если m и n достаточно велики, то c_z мнимое и соответствующая волна затухает по z . Сравнение с выражением (11.3.18) показывает, что для электромагнитных волн граничные условия не допускают чисто продольной волны ($m, n=0$), которая в скалярном (акустическом) случае соответствует распространению плоской волны вдоль оси волновода. В чисто продольной волне касательные составляющие напряженности электрического поля не могут одновременно обращаться в нуль на всех стенках волновода, так что все волны должны содержать определенное количество всевозможных отражений от боковых стенок. Это приводит к возникновению дисперсии. Все волны имеют критическую частоту $\omega_{mn} = ck_{mn}$, ниже которой колебания затухают, а не распространяются.

Отметим также, что, хотя \mathbf{E} ортогонально оси волновода, \mathbf{H} имеет составляющую вдоль оси z . Это не означает, что волна не является поперечной, так как дивергенция ее равна нулю и \mathbf{H} всюду ортогонально \mathbf{E} . Волна является суперпозицией плоских волн, распространяющихся под различными углами к оси z , поэтому нет оснований ожидать, что и \mathbf{E} и \mathbf{H} ортогональны \mathbf{a}_z .

Исследование поля и распределения плотностей токов и зарядов на стенках волновода для наименьшей гармонике $m=0, n=1$ при $b > a$ (отметим, что или m , или n может быть нулем, но оба индекса одновременно в нуль не обращаются) показывает, как распространяется эта волна. Поля имеют вид [берем действительные части в (13.3.11)]:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{a}_x \frac{\pi}{b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(k_z z - \omega t),$$

$$k_z^2 = (\omega/c)^2 - (\pi/b)^2,$$

$$\mathbf{H} = -\mathbf{a}_y \frac{\pi k_z}{kb} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(k_z z - \omega t) + \mathbf{a}_z \frac{\pi^2}{kb^2} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin(k_z z - \omega t)$$

для $\omega > \omega_{01} = \pi c/b$. Это показано на рис. 13.4 для значений $0 \leq k_z z - \omega t \leq \pi/2$, где электрические силовые линии изображены штрихами, а магнитные — сплошными линиями.

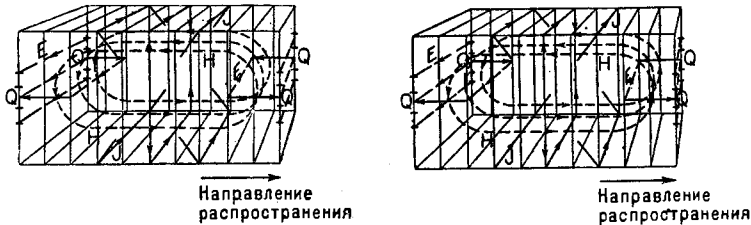


Рис. 13.4. Поля, поверхностные токи и заряды для наименьшей поперечно-электрической волны в прямоугольном волноводе.

Плотность зарядов Q на стенке $x=0$ равна $(1/4\pi) \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{E}|_{x=0}$; аналогичные выражения имеют место и на трех остальных стенках. Согласно рассуждениям, предшествовавшим выводу соотношения (3.4.24), плотность тока на стенке $x=0$ равна $(c/4\pi) [\mathbf{a}_x \times \mathbf{H}|_{x=0}]$. Поэтому при $x=0$ плотности поверхностных зарядов и токов равны

$$Q = -\frac{1}{4b} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(k_z z - \omega t);$$

$$\mathbf{J} = -\mathbf{a}_z \frac{ck_z}{4bk} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos(k_z z - \omega t) - \mathbf{a}_y \frac{c\pi}{4kb^2} \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin(k_z z - \omega t).$$

При $x = a$ знаки Q и \mathbf{J} надо переменить на обратные. На стенках $y = 0$ и $y = b$ мы имеем $Q = 0$, а

$$\mathbf{J} = \mathbf{a}_x \frac{c\pi}{4kb^2} \sin(k_z z - \omega t).$$

При $k_z z - \omega t = 0$ две вертикальные стенки ($x = 0, a$) имеют максимальный заряд и напряженность электрического поля между ними имеет максимальное значение; направление тока на этих стенках совпадает с направлением распространения (осью z), так что вектор \mathbf{H} вертикален. Вектор $\mathbf{S} = (c/4\pi) \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, равный $(\pi/4) \mathbf{a}_z (k_z c/kb^2) \sin^2(\pi y/b)$, имеет максимальное значение, вдвое превосходящее его среднее значение, и направлен по оси z . Заряд равен нулю при $k_z z - \omega t = \pi/2$ (т. е. на четверть длины волны опережает нулевую фазу в пространстве, или на четверть периода по времени). При этом ток на горизонтальных стенках максимален; электрическое поле равно нулю, а магнитное направлено по оси z . Эта волна по существу представляет собой двукратное за период переменение заряда с одной вертикальной стенки на другую, сопровождаемое токами и полями, вызываемыми потоком зарядов (также и вызывающими поток зарядов). Поперечно-электрические волны более высоких номеров соответствуют более сложным колебаниям поверхностных зарядов.

Выражения тока и электрического поля позволяют определить эквивалентный импеданс наименьшей волны. Полный ток, текущий в направлении z по стенке $x = 0$, при $z = 0$ равен

$$I = -\frac{ck_z}{2\pi k} e^{-i\omega t},$$

и средняя разность потенциалов между стенками $x = 0$ и $x = a$ равна

$$V = -2ae^{-i\omega t}.$$

Их отношение можно назвать импедансом наименьшей гармоники, а поделив на a , получим импеданс единицы ширины волновода

$$Z = \frac{4\pi k}{ck_z} = \frac{4\pi\omega}{c\sqrt{\omega^2 - (\pi c/b)^2}}.$$

Тем самым можно измерить импеданс aZ , возбуждая волновод током, заданным на стенках $x = 0$ и $x = a$ при $z = 0$.

Оказывается, что это значение импеданса, определенного просто как отношение падения потенциала (на единицу ширины) к полному току, совпадает с импедансом поля в направлении z , определенного выражением (3.4.28). Вектор $-c[\mathbf{a}_z \times \mathbf{H}] = -\mathbf{a}_x (\pi ck_z/kb) \sin(\pi y/b) e^{-i\omega t}$ эквивалентен току, и вектор $4\pi\mathbf{E}$ эквивалентен напряжению. Их отношение совпадает с приведенным выше. При этом по (3.4.23) импеданс волны (m, n), определенной в (13.3.11), равен

$$Z_{mn} = \frac{4\pi k}{ck_z} = \frac{4\pi\omega}{c\sqrt{\omega^2 - (\pi cm/a)^2 - (\pi cn/b)^2}}. \quad (13.3.12)$$

Если $\omega > \omega_{mn}$, импеданс оказывается активным; при $\omega < \omega_{mn}$ — реактивным, соответствующим индуктивному реактансу.

Волны типа \mathbf{N} можно выразить в виде (используя те же значения для k_{mn} и k_z , что и ранее)

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{ik} \mathbf{E} = \mathbf{N}_{mn} = \frac{1}{k^2} \text{rot rot} \left[\mathbf{a}_z \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) e^{ik_z z - i\omega t} \right] = \\ &= \left\{ \frac{ik_z}{k^2} \left[\frac{m\pi}{a} \mathbf{a}_x \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{n\pi}{b} \mathbf{a}_y \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{k_{mn}^2}{k^2} \mathbf{a}_z \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)\} e^{ik_z z - i\omega t}, \quad (13.3.13)$$

$$\mathbf{H} = \left[\mathbf{a}_x \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right) - \right. \\ \left. - \mathbf{a}_y \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \right] e^{ik_z z - i\omega t};$$

они называются *поперечно-магнитными волнами*. (Здесь также при перемене направления распространения на обратное надо изменить знак у k_z .) Наинизшая волна соответствует $n = m = 1$ (отметим, что для этого типа ни n , ни m не могут равняться нулю), как показано на рис. 13.5. Токи и заряды совершают продольные колебания, вектор \mathbf{E} направлен от кольца положительных зарядов к кольцу отрицательных, а \mathbf{H} образует поперечные петли в областях наибольшего поверхностного тока. Отметим,

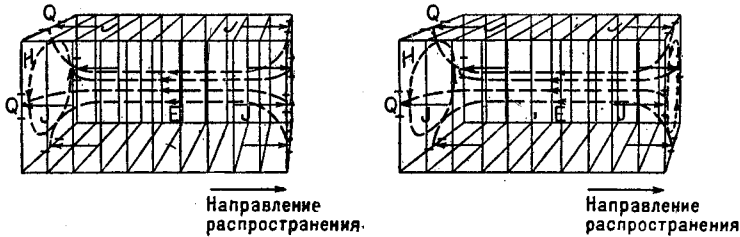


Рис. 13.5. Поля, поверхностные токи и заряды для наинизшей поперечно-магнитной волны в прямоугольном волноводе.

что ни одна из функций системы \mathbf{M} не соответствует функциям системы \mathbf{N} . Кроме того, продольный импеданс этих волн, отношение между $4\pi c [\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}]$ и $-\mathbf{H}$, в точности равен выражению (13.3.12).

Функция Грина. Для решения многих задач, связанных с практическим расчетом волноводов, нужно иметь простое выражение аффинорной функции Грина. Начнем с замечания, что системы \mathbf{M} и \mathbf{N} можно записать в следующем простом виде:

$$\mathbf{M}_{mn} = \frac{1}{ik} \text{rot} [\mathbf{a}_z \psi_{mn} \exp(iz \sqrt{k^2 - k_{mn}^2} - ikct)] = \\ = \mathbf{B}_{mn}(x, y) \exp(iz \sqrt{k^2 - k_{mn}^2} - ikct),$$

$$\mathbf{N}_{mn} = \frac{1}{k^2} \text{rot rot} [\mathbf{a}_z \chi_{mn} \exp(iz \sqrt{k^2 - k_{mn}^2} - ikct)] = \\ = \mathbf{C}_{mn}(x, y) \exp(iz \sqrt{k^2 - k_{mn}^2} - ikct),$$

где

$$\mathbf{B}_{mn} = \frac{i}{k} [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \psi_{mn}], \\ \mathbf{C}_{mn} = \frac{k_{mn}^2}{k^2} \mathbf{a}_z \chi_{mn} + i \frac{\sqrt{k^2 - k_{mn}^2}}{k^2} \text{grad } \chi_{mn}$$

и где ψ_{mn} и χ_{mn} — взаимно ортогональные скалярные собственные функции двумерного уравнения

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + (k_{mn}^e)^2 \psi = 0$$

(собственное значение для χ есть k_{mn}^h , что равно k_{mn}^e в случае прямоугольного волновода, но отлично от k_{mn}^e в других случаях). Для прямоугольного

волновода

$$\psi_{mn} = \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \text{ и } \chi_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

(на проводящей границе $\partial\psi/\partial n = \chi = 0$).

Кроме этого, имеется продольная система

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{mn} &= \frac{1}{ik} \text{grad} [\chi_{mn} \exp(iz\sqrt{k^2 - k_{mn}^2} - ikt)] = \\ &= \mathbf{D}_{mn}(x, y) \exp(iz\sqrt{k^2 - k_{mn}^2} - ikt), \\ \mathbf{D}_{mn} &= \frac{1}{k} \sqrt{k^2 - k_{mn}^2} \mathbf{a}_z \chi_{mn} - \frac{i}{k} \text{grad} \chi_{mn}, \end{aligned}$$

ортогональным системам \mathbf{M} и \mathbf{N} . Заметим, что пространственные части \mathbf{L} и \mathbf{N} содержат различные линейные комбинации двух членов $\mathbf{a}_z \chi_{mn}$ и $\text{grad} \chi_{mn}$. Конечно, если не нужно разлагать решение на продольную и поперечную части, можно использовать $\mathbf{a}_z \chi_{mn}$ и $(1/ik) \text{grad} \chi_{mn}$, ортогональные системе \mathbf{M}_{mn} и друг другу.

Предположим теперь, что надо решить уравнение

$$\nabla^2 \mathcal{G} + k^2 \mathcal{G} = -4\pi \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) e^{-ikt} \mathcal{F}$$

при соответствующих граничных условиях на стенках волновода и на бесконечности. Вначале можно принять, что полное разложение (включая и продольную часть) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) &= \sum_{mn} \{ [\mathbf{a}_z \times \text{grad} \psi_{mn}] \mathbf{F}_{mn}(\mathbf{r}_0, z) + \mathbf{a}_z \chi_{mn} \mathbf{G}_{mn}(\mathbf{r}_0, z) + \\ &+ \text{grad} \chi_{mn} \mathbf{H}_{mn}(\mathbf{r}_0, z) \} e^{-ikt}. \end{aligned}$$

Подставив это разложение в уравнение для \mathcal{G} , умножив поочередно на $[\mathbf{a}_z \times \text{grad} \psi_{mn}]$, $\mathbf{a}_z \chi_{mn}$ и $\text{grad} \chi_{mn}$ и проинтегрировав по x и y , получим выражение для \mathbf{F} , \mathbf{G} и \mathbf{H} . Положим $\iint \chi_{mn}^2 dx dy = \Lambda_{mn}^h$ (для прямоугольного волновода эта величина равна $ab/\varepsilon_m \varepsilon_n$) и, согласно теореме Грина, получим

$$\begin{aligned} \iint |\mathbf{a}_z \times \text{grad} \psi_{mn}|^2 dx dy &= \iint (\text{grad} \psi_{mn}) \cdot (\text{grad} \psi_{mn}) dx dy = \\ &= \oint \psi_{mn} \text{grad}_n \psi_{mn} dA - \iint \psi_{mn} \nabla^2 \psi_{mn} dx dy = k_{mn}^2 \Lambda_{mn}^e, \end{aligned}$$

где $\Lambda_{mn}^e = \iint \psi_{mn}^2 dx dy$ (для прямоугольного волновода это тоже $ab/\varepsilon_m \varepsilon_n$).

Например, мы найдем, что

$$\mathbf{F}_{mn} = \frac{4\pi}{k_{mn}^2 \Lambda_{mn}^e} [\mathbf{a}_z \times \text{grad} \psi_{mn}(x_0, y_0)] f_{mn}(z, z_0) e^{-ikt},$$

где f удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + (k^2 - k_{mn}^2) f = -\delta(z - z_0)$$

и соответствующим граничным условиям. В рассматриваемом случае, когда волны распространяются в обе стороны от источника, получим

$$f_{mn} = \frac{-1}{2i\sqrt{k^2 - k_{mn}^2}} \exp(i|z - z_0|\sqrt{k^2 - k_{mn}^2}).$$

Аналогично

$$\mathbf{G}_{mn} = \frac{4\pi}{\Lambda_{mn}^h} \mathbf{a}_z \chi_{mn}(x_0, y_0) g_{mn}(z, z_0) e^{-ikt},$$

где для уходящих волн g то же самое, что и f . (Если труба ограничена при заданной паре значений z , то g отличается от f , так как \mathbf{G} направлено вдоль трубы, а \mathbf{F} и \mathbf{H} — поперек.)

В конечном счете получим

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\mathbf{r}_0 | \mathbf{r} | k) = & 4\pi \sum_{m,n} \left\{ \frac{\mathbf{a}_z \mathbf{a}_z}{\Lambda_{mn}^h} \chi_{mn}(x_0, y_0) \chi_{mn}(x, y) g_{mn} + \right. \\ & + \frac{1}{k_{mn}^2 \Lambda_{mn}^e} [\mathbf{a}_z \times \text{grad} \psi_{mn}(x_0, y_0)] [\mathbf{a}_z \times \text{grad} \psi_{mn}(x, y)] f_{mn} + \\ & \left. + \frac{1}{k_{mn}^2 \Lambda_{mn}^h} [\text{grad} \chi_{mn}(x_0, y_0)] [\text{grad} \chi_{mn}(x, y)] f_{mn} \right\} e^{-ikct}. \end{aligned} \quad (13.3.14)$$

Эта функция Грина содержит и продольную и поперечную части, которые можно использовать для определения поперечных решений, как указано на стр. 723. Однако если желательно, чтобы \mathfrak{G} содержала только поперечную часть, то надо перейти к векторам \mathbf{B} и \mathbf{C} и опустить члены \mathbf{D} . Для разложения по \mathbf{B} , \mathbf{C} и \mathbf{D} умножим обе части, например, на $\bar{\mathbf{B}}_{mn}$ и проинтегрируем по x и y , что определит соответствующие коэффициенты нового разложения. Окончательно можно записать

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) = & 4\pi \sum_{m,n} \left\{ \frac{(k/k_{mn}^e)^2}{\Lambda_{mn}^e} \bar{\mathbf{B}}_{mn}(x_0, y_0) \mathbf{B}_{mn}(x, y) f_{mn} + \right. \\ & + \frac{(k/k_{mn}^h)^2}{\Lambda_{mn}^h} \left[\left(\frac{k_{mn}^h}{k} \right)^2 \mathbf{a}_z \chi_{mn}(x_0, y_0) g_{mn} - \right. \\ & \left. - \frac{i}{k^2} \sqrt{k^2 - (k_{mn}^h)^2} \text{grad}_0 \chi_{mn}(x_0, y_0) f_{mn} \right] \mathbf{C}_{mn}(x, y) + \\ & + \frac{1}{\Lambda_{mn}^h} \left[\frac{1}{k} \sqrt{k^2 - (k_{mn}^h)^2} \mathbf{a}_z \chi_{mn}(x_0, y_0) g_{mn} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{k} \text{grad}_0 \chi_{mn}(x_0, y_0) f_{mn} \right] \mathbf{D}_{mn}(x, y) \right\} e^{-ikct}. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что это разложение удобно лишь при $f_{mn} = g_{mn}$.

Переходя к частному случаю бесконечного прямоугольного волновода, для которого

$$g_{mn} = f_{mn} = \frac{i}{2\sqrt{k^2 - k_{mn}^2}} \exp(i|z - z_0| \sqrt{k^2 - k_{mn}^2}),$$

$$(k_{mn}^e)^2 = (k_{mn}^h)^2 = k_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2, \quad \Lambda_{mn}^e = \Lambda_{mn}^h = ab/\varepsilon_m \varepsilon_n,$$

и выписывая лишь поперечную часть, получим окончательно

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_t(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) = & \frac{2\pi ik}{ab} \left\{ \sum_{k_{mn} < k} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{k_{mn}^2 \varkappa_{mn}} [\bar{\mathbf{B}}_{mn}(x_0, y_0) \mathbf{B}_{mn}(x, y) + \right. \\ & + \bar{\mathbf{C}}_{mn}(x_0, y_0) \mathbf{C}_{mn}(x, y)] e^{ik\tau_{mn}|z - z_0|} - \\ & - ik \sum_{k_{mn} > k} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{k_{mn}^2 \varkappa_{mn}} [\bar{\mathbf{B}}_{mn}(x_0, y_0) \mathbf{B}_{mn}(x, y) + \\ & \left. + \bar{\mathbf{C}}_{mn}(x_0, y_0) \mathbf{C}_{mn}(x, y)] e^{-\varkappa_{mn}|z - z_0|} \right\} e^{-ikct}, \end{aligned} \quad (13.3.15)$$

где $\varkappa_{mn}^2 = 1 - (k_{mn}/k)^2$ и $\varkappa_{mn}^2 = k_{mn}^2 - k^2$ и где векторы \mathbf{B} и \mathbf{C} являются коэффициентами при $\exp(ik_z z - i\omega t)$ в выражениях для \mathbf{A} в формулах (13.3.11)

и (13.3.13) соответственно. Первый ряд в этом выражении содержит все члены, определяющие волны, распространяющиеся вдоль волновода; второй содержит все волны, быстро затухающие, поскольку они возбуждаются с частотой ниже критической. Как будет показано ниже, первый ряд дает активную часть волнового импеданса, второй ряд — реактивную. Так как \mathcal{G}_t является симметричным аффинором, то можно поменять местами $\bar{\mathbf{V}}$ и \mathbf{V} и т. д. Для других граничных условий на концах волновода обычно лучше пользоваться выражением (13.3.14).

Возбуждение волновода током. Чтобы отчетливо представить себе, как исползуется эта функция Грина для решения практических задач, подсчитаем поле, возникающее в бесконечном прямоугольном волноводе с внутренними размерами a по оси x и b по оси y , возбуждаемом прямолинейным током I , направленным по прямой $z = 0, y = b/2$. Так как ищется только поперечная часть поля, то воспользуемся равенством (13.1.52), где вместо \mathcal{G} , содержащей и продольную часть, взято \mathcal{G}_t . В рассматриваемом случае ($\mu = \varepsilon = 1$) неоднородный вектор \mathbf{Q} равен $\mathbf{Q} = (1/c) \mathbf{a}_x I \delta(y - b/2) \delta(z)$, где опущен временной множитель $e^{-i\omega t}$, поскольку решается уравнение Гельмгольца для пространственной части полного решения.

Единственной сложной частью вычислений является интегрирование по x_0 и y_0 различных векторных функций $\bar{\mathbf{B}}_{mn}(x_0, y_0)$ и $\bar{\mathbf{C}}_{mn}(x_0, y_0)$, умноженных на \mathbf{Q} :

$$\int_0^a dx \int_0^b \bar{\mathbf{B}}_{mn} \cdot \mathbf{Q} dy =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } m > 0 \text{ или } n = 2, 4, 6, \dots, \\ -i \frac{n\pi}{bkc} I (-1)^{(n-1)/2}, & \text{если } m = 0, n = 1, 3, 5, \dots; \end{cases}$$

$$\int_0^a dx \int_0^b \bar{\mathbf{C}}_{mn} \cdot \mathbf{Q} dy = 0 \quad \text{для всех допустимых значений } m \text{ и } n.$$

Однако если предположить, что ток течет по бесконечно тонкому проводу, то электрическое поле на проводе должно быть бесконечным (во всяком случае часть его, вызывающая реактанс). Будем считать, что ток течет по полоске ширины Δ , помещенной в центре волновода. Это соответствует «размазыванию» δ -функции по y . Отличие в интегралах при этом будет заключаться лишь в том, что интегралы от \mathbf{V} для $m = 0$ и $n = 1, 3, 5, \dots$ дадут $-i(2I/\Delta kc)(-1)^{(n-1)/2} \sin(n\pi\Delta/2b)$, сводясь к $-i(n\pi I/bkc)(-1)^{(n-1)/2}$ для малых n . Для достаточно больших n эти интегралы отличаются от последнего выражения, причем так, что ряд сходится.

Теперь можно подсчитать интеграл от $\mathcal{G}_t \cdot \mathbf{Q}$ [поверхностный интеграл в выражении (13.1.52) равен нулю в силу граничных условий]. При частоте возбуждения, большей критической ($n = 1$), но меньшей следующей ($n = 3$), для $z > 0$ получим

$$\mathbf{A} = i \mathbf{a}_x \frac{8\pi I}{abc} \frac{\sin(\pi y/b)}{\sqrt{k^2 - (\pi/b)^2}} \exp \left[i \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} z \right] +$$

$$+ \mathbf{a}_x \frac{16I}{ac} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{\sin[\pi(2n+1)y/b]}{\sqrt{(\pi/b)^2(2n+1)^2 - k^2}} \sin \left[\frac{\pi\Delta}{2b} (2n+1) \right] \times$$

$$\times \exp \left[-z \sqrt{\left[\frac{\pi}{b} (2n+1) \right]^2 - k^2} \right],$$

где влияние конечной ширины Δ полоски включено в сумму ($n > 0$), но не в первый член. Напряженность электрического поля при $y = b/2$, $z = 0$ в центре провода тогда равна

$$E \simeq -a_x \frac{8\pi I \omega / abc}{\sqrt{\omega^2 - (\pi c/b)^2}} + a_x i \omega \frac{16Ib}{\pi a \Delta c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin [(\pi \Delta / 2b)(2n+1)]}{(2n+1) \sqrt{(2n+1)^2 - (kb/\pi)^2}}.$$

Второй ряд сходится плохо, поэтому рекомендуется добавить и вычесть близкий к данному ряд, который можно просуммировать. При помощи аналитического продолжения (взяв вначале комплексное ζ в первой четверти, а затем переходя к малым вещественным значениям ζ) получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\zeta}{(2n+1)^2} &= -\sin \zeta + \operatorname{Re} \left[\int_0^{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\eta(2n+1)} \frac{d\eta}{2n+1} \right] = \\ &= -\sin \zeta - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_0^{\zeta} \ln \left(\frac{1-e^{i\eta}}{1+e^{i\eta}} \right) d\eta \right] \simeq \frac{1}{2} \zeta \ln \left(\frac{2e^2}{\zeta} \right), \quad \zeta \ll 1. \end{aligned}$$

Поэтому падение потенциала вдоль провода — напряжение, которое надо приложить к проводу, чтобы создать ток, возбуждающий поле, — равно

$$V = -aE_x \simeq \frac{8\pi I \omega / bc}{\sqrt{\omega^2 - (\pi c/b)^2}} - i\omega \frac{4I}{c^2} \left[\ln \left(\frac{4b}{\pi e^2 \Delta} \right) + 2 \Sigma \right], \quad (13.3.16)$$

где

$$\Sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{(2n+1)^2 - (kb/\pi)^2}} - \frac{1}{2n+1} \right] \simeq 0,0266 \left(\frac{\omega b}{\pi c} \right)^2, \quad kb \ll 3\pi,$$

является малым поправочным членом в окончательной формуле, дающей логарифмическое приближение ряда.

Отношение V/I представляет входной импеданс провода в волноводе для волн, уходящих в обе стороны в бесконечность, частота которых лежит между ω_{01} и ω_{03} . Если один или оба конца волновода закрыты, так что возникают отраженные волны, то первый член в (13.3.16) существенно изменяется, но реактивный член меняется очень слабо, если только провод не очень близок к концу волновода, так как волны, определяющие этот член, не распространяются далеко от провода. Первый член, деленный на I , конечно, определяет активное сопротивление, а второй член — реактанс, являющийся индуктивным, пока выражение в скобках положительно (т. е. если Δ достаточно мало). Вблизи $\omega = \omega_{01} = \pi c/b$ активное сопротивление велико и стремится к бесконечности при $\omega \rightarrow \omega_{01}$. Для ω , меньших ω_{01} , импеданс является чисто реактивным и действительные волны, распространяющиеся по волноводу, отсутствуют. Отметим также, что активная часть V/I равна импедансу Z_{01} , умноженному на $2/b$, приведенному в (13.3.12) для гармоники (0,1). По первому активному члену R импеданса можно подсчитать энергию, излучаемую проводом, $P = \frac{1}{2} R I^2$.

Потери в стенках волновода. На неидеально проводящих стенках волновода касательная составляющая напряженности электрического поля не полностью обращается в нуль. При этом продольное волновое число k становится комплексным, что соответствует затуханию волн из-за поглощения энергии в стенках. Согласно (13.3.5) и (13.3.8), вектор $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ равен

касательной составляющей вектора \mathbf{H} , умноженной на $-\sqrt{\mu\omega/4\pi\sigma} e^{-i\pi/4}$ (малая величина). Поскольку множители $m\pi/a$ и $n\pi/b$ в \mathbf{M}_{mn} и \mathbf{N}_{mn} выбраны так, что $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ обращается в нуль на границе, их надо теперь так преобразовать, чтобы $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ было малой величиной, но не нулем. Это можно достичь, например, для системы \mathbf{M} , заменяя $m\pi x/a$ на $(\pi x/a)[m - (2\varphi_{mx}/\pi)] + \varphi_{mx} = \Omega_{mx}$, где φ_{mx} мало по сравнению с $\pi/2$. В этом случае множитель $\sin(m\pi x/a)$ в x -компоненте \mathbf{M}_{mn} переходит в $\sin \varphi_{mx}$ при $x=0$ и $(-1)^{m-1} \sin \varphi_{mx}$ при $x=a$. (Мы молчаливо предположили, что проводимость всех стенок одна и та же, так что граничные условия на обеих параллельных стенках одинаковы.)

Тогда в случае поперечно-электрической волны касательная составляющая электрического вектора на стенке $x=0$ равна

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]_{x=0} = -a_z \frac{\pi}{a} \left[m - \frac{2\varphi_{mx}}{\pi} \right] \sin \varphi_{mx} \cos \Omega_{ny}$$

(где учтено, что \mathbf{n} — внешняя нормаль, в этом случае равная $-\mathbf{a}_x$). Однако в решении типа \mathbf{M}_{mn} касательная составляющая магнитного поля имеет не только компоненту по x , но и компоненту по y , тем самым только поперечно-электрическая волна не удовлетворяет новым граничным условиям. Нужно добавить слабое поле типа \mathbf{N}_{mn} . Поэтому положим $\mathbf{A} = \mathbf{M}_{mn} + \alpha_{mn} \mathbf{N}_{mn}$ и определим α , φ_{mx} и φ_{ny} , удовлетворяя граничным условиям на стенках волновода $x=0$ и $y=0$. Например, на стенке $x=0$

$$\begin{aligned} -\mathbf{a}_x \times \mathbf{E} &\simeq -\mathbf{a}_z \left[\frac{m\pi}{a} - \alpha \frac{n\pi}{b} \frac{k_z}{k} \right] \varphi_{mx} \cos \Omega_{ny} + \mathbf{a}_y \alpha \frac{ik_{mn}^2}{k} \varphi_{mx} \sin \Omega_{ny} = \\ &= -iZ \mathbf{H}_t = -\mathbf{a}_z \frac{k_{mn}^2}{k} Z \cos \Omega_{ny} + \mathbf{a}_y i \left[\frac{n\pi}{b} \frac{k_z}{k} + \alpha \frac{m\pi}{a} \right] Z \sin \Omega_{ny}, \end{aligned}$$

где $Z = \sqrt{\mu\omega/4\pi\sigma} e^{\pi i/4}$ и где принято, что φ и Z настолько малы, что можно пренебречь членами φ^2 , φZ и т. д.

Аналогичная система уравнений имеет место и для стенки $y=0$. При помощи этих уравнений можно определить поправочные коэффициенты φ_{mx} , φ_{ny} и α . При этом поля для малых Z не сильно отличаются от полей для $Z=0$, за исключением того, что имеется небольшая остаточная касательная составляющая поля \mathbf{E} на боковой поверхности, пропорциональная \mathbf{H} . Это происходит из-за того, что нули функций $\sin \Omega_{mx}$ и т. д. не лежат точно на стенках волновода. Единственная область, где имеется заметное отличие от выражений для $Z=0$, это область у границ для поля \mathbf{E} . Закончив вычисления, мы найдем, что функции φ пропорциональны малой величине $Z = \sqrt{\mu\omega/8\pi\sigma} (1+i)$ и что постоянная распространения k_z теперь имеет вид

$$\begin{aligned} k_z &= \left[k^2 - \left(\frac{\pi}{a} \right)^2 \left(m - \frac{2}{\pi} \varphi_{mx} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \left(n - \frac{2}{\pi} \varphi_{ny} \right)^2 \right]^{1/2} \simeq \\ &\simeq \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} + i \text{const} \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}}, \end{aligned}$$

где const определяется из решения уравнений для φ . При этом множитель у \mathbf{E} и \mathbf{H} , зависящий от Z , имеет вид $e^{ik_z^0 z - \kappa x}$, где $(k_z^0)^2 = k^2 - k_{mn}^2$ и κ — малая величина, характеризующая затухание волны из-за потерь энергии в стенках и пропорциональная $\sqrt{\mu\omega/4\pi\sigma}$.

Для определения κ в первом приближении можно предложить и более простой метод вместо утомительного решения уравнений для α и φ . Он основан на использовании уравнений (13.3.5), (13.3.8) и том обстоятель-

стве, что при потере энергии в стенках поток энергии вдоль волновода должен затухать. Полный поток энергии вдоль волновода, очевидно, определяется средним по времени значением интеграла от $S = c [\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}]/4\pi$ по поперечному сечению трубы. При потерях энергии в стенках и $\bar{\mathbf{E}}$ и \mathbf{H} должны содержать множители вида $e^{-\alpha z}$, определяющие затухание, так что $S_{\text{ср.}} = S_0 e^{-2\alpha z}$ и потери энергии за секунду в стенках на единице длины волновода равны

$$2\alpha \iint S_{\text{ср.}} dA.$$

С точностью до первого порядка относительно малой величины $\sqrt{\mu\omega/4\pi\sigma}$ потери энергии можно подсчитать следующим образом. Предположим, что значения \mathbf{H} у стенки не меняются существенно при малых потерях энергии в стенках (приведенная выше формула для $-iZ\mathbf{H}_t$ подтверждает это), и тем самым можно пользоваться выражением для \mathbf{H}_t полученным для идеальной проводимости, например выражениями (13.3.11) и (13.3.13). Поверхностный ток, порождающий (или порождаемый) \mathbf{H}_t в таком случае на основании рассуждений, предшествовавших (3.4.23), равен $-c[\mathbf{n} \times \mathbf{H}]/4\pi$, где \mathbf{n} — внешняя нормаль к поверхности, а \mathbf{H} — напряженность магнитного поля на поверхности. Если касательная составляющая электрического поля на поверхности или равна нулю, или находится не в фазе с $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$, то потери энергии в стенках отсутствуют, но если $-c[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot \bar{\mathbf{E}}/4\pi$ имеет действительную часть, то эта действительная часть, проинтегрированная по периметру поперечного сечения волновода, должна быть равна потере энергии. Поскольку

$$-(c/4\pi)[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] \cdot \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{n} (c/4\pi)[\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}],$$

легко видеть, что данное выражение соответствует составляющей потока энергии, направленной в стенку волновода. Поэтому

$$2\alpha \iint S_{\text{ср.}} dA = \text{Re} \oint ds \left[\frac{c}{4\pi} \mathbf{n} \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \right] = \frac{c}{4\pi} \text{Re} \oint ds ([\mathbf{n} \times \mathbf{E}] \cdot \mathbf{H}_t),$$

где интеграл $\oint ds$ берется по периметру поперечного сечения, а интеграл $\iint dA$ — по полной площади поперечного сечения. При подсчете $S_{\text{ср.}}$ и поля \mathbf{H}_t можно пользоваться полями для идеальной проводимости, но при определении $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$ нужно брать поле для конечной проводимости. Однако выражения (13.3.5) и (13.3.8) позволяют выразить это поле через \mathbf{H}_t . На границе имеет место равенство $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = \sqrt{\mu\omega/4\pi\sigma} e^{-i\pi/4} \mathbf{H}_t$, и, следовательно,

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} \frac{\oint ds |\mathbf{H}_t|^2}{|\text{Re} \iint dA \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H})|}. \quad (13.3.17)$$

Это соотношение точное, если поля строго удовлетворяют граничным условиям, и приближенное с точностью до членов первого порядка по $\sqrt{\mu\omega/8\pi\sigma}$, если поля удовлетворяют идеальным граничным условиям.

С помощью этого соотношения подсчитаем теперь затухание электромагнитной волны, распространяющейся в волноводе произвольного поперечного сечения. К специальному случаю прямоугольного поперечного сечения мы вернемся позже. Как было показано ранее, поперечно-электрические волны можно получить из скалярных решений $\psi_{mn}(x, y)$

уравнения $\nabla^2 \phi_{mn} + k_{emn}^2 \phi_{mn} = 0$ при помощи соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{ik} \mathbf{E} = \mathbf{M}_{mn} = \frac{1}{ik} \operatorname{rot} [\mathbf{a}_z \phi_{mn} \exp(iz \sqrt{k^2 - k_{emn}^2} - ikct)] = \\ &= -\frac{1}{ik} [\mathbf{a}_z \times \operatorname{grad} \phi_{mn}] \exp(iz \sqrt{k^2 - k_{emn}^2} - ikct), \end{aligned} \quad (13.3.18)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{ik} [\mathbf{a}_z k_{emn}^2 \phi_{mn} + i \sqrt{k^2 - k_{emn}^2} \operatorname{grad} \phi_{mn}] \exp[iz \sqrt{k^2 - k_{emn}^2} - ikct],$$

где в случае идеальной проводимости $\partial \phi_{mn} / \partial n = 0$ на границе. Действительная часть произведения $\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}$ равна

$$-\frac{1}{k} \sqrt{k^2 - k_{emn}^2} [\mathbf{a}_z \times \operatorname{grad} \phi_{mn}] \times \operatorname{grad} \phi_{mn} = \frac{1}{k} \sqrt{k^2 - k_{emn}^2} \mathbf{a}_z |\operatorname{grad} \phi_{mn}|^2$$

и направлена, как и следовало ожидать, по оси волновода. Используя теорему Грина и граничное условие $\partial \phi / \partial n = 0$, подсчитаем поверхностный интеграл

$$\operatorname{Re} \left[\iint dA \cdot [\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}] \right] = k_{emn}^2 \sqrt{1 - \frac{k_{emn}^2}{k^2}} \Lambda_{mn}^e,$$

где $\Lambda_{mn}^e = \iint |\phi_{mn}|^2 dA$ — нормирующий множитель для скалярных собственных функций ϕ_{mn} .

Квадрат касательной составляющей \mathbf{H} на границе равен

$$|\mathbf{H}_t|^2 = \frac{k_{emn}^4}{k^2} |\phi_{mn}|^2 + \left[1 - \frac{k_{emn}^2}{k^2} \right] \left| \frac{\partial \phi_{mn}}{\partial s} \right|^2,$$

где $\partial \phi / \partial s$ — касательная составляющая градиента ϕ на границе. Поэтому коэффициент затухания для поперечно-электрической волны с номером (m, n) равен

$$\alpha_{emn} \simeq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi\epsilon}} \frac{k_{emn}^2 \oint |\phi_{mn}|^2 ds + \left[\left(\frac{k}{k_{emn}} \right)^2 - 1 \right] \oint \left| \frac{\partial \phi_{mn}}{\partial s} \right|^2 ds}{k \sqrt{k^2 - k_{emn}^2} \Lambda_{mn}^e}. \quad (13.3.19)$$

Если частота возбуждения ниже критической для этой волны ($k < k_{emn}$), то $\sqrt{k^2 - k_{emn}^2} = i \sqrt{k_{emn}^2 - k^2}$; α_{emn} является чисто мнимым и эта формула не имеет места. Однако гармоники с частотой ниже критической вообще не распространяются по волноводу, результат их поглощения в стенках незаметен, если только поглощение невелико.

Поэтому можно считать, что более правильная формула для \mathbf{A} , \mathbf{E} и \mathbf{H} получается при умножении выражения (13.3.18) на $e^{-\alpha_{emn} z}$, что в первом приближении воспроизводит затухание. Для поперечно-электрической волны с номером (m, n) энергия, переносимая вдоль трубы, равна

$$S_{mn}^e = \frac{c}{4\pi} k_{emn}^2 \sqrt{\left(1 - \frac{k_{emn}^2}{k^2} \right)^2} \Lambda_{mn}^e e^{-2\alpha_{emn} z}, \quad (13.3.20)$$

пока k больше чем k_{emn} .

В случае поперечно-магнитной волны используется другое скалярное решение $\chi_{mn}(x, y)$ двумерного уравнения Гельмгольца $\nabla^2 \chi_{mn} + k_{hmn}^2 \chi_{mn} = 0$,

обращающееся в нуль на границе. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{ik} \mathbf{E} = \mathbf{N}_{mn} = \frac{1}{k^2} \text{rot rot} [\mathbf{a}_z \chi_{mn} \exp i(z \sqrt{k^2 - k_{hmn}^2} - kct)] = \\ &= \frac{1}{k^2} [\mathbf{a}_z k_{hmn}^2 \chi_{mn} + i \sqrt{k^2 - k_{hmn}^2} \text{grad } \chi_{mn}] \exp i(z \sqrt{k^2 - k_{hmn}^2} - kct), \\ \mathbf{H} &= -[\mathbf{a}_z \times \text{grad } \chi_{mn}] \exp i(z \sqrt{k^2 - k_{hmn}^2} - kct). \end{aligned}$$

Теми же методами, что и в предыдущих случаях, найдем коэффициент затухания и энергию, переносимую поперечно-магнитной волной:

$$\begin{aligned} x_{hmn} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu\omega}{4\pi\sigma}} \frac{\oint \left| \frac{\partial \chi_{mn}}{\partial n} \right|^2 ds}{k_{hmn} \sqrt{1 - (k_{hmn}/k)^2} \Lambda_{mn}^h}, \\ S_{mn}^h &= \frac{c}{4\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{k_{hmn}}{k}\right)^2} \Lambda_{mn}^h e^{-2x_{hmn}z}, \end{aligned} \quad (13.3.21)$$

где Λ_{mn}^h — нормирующий множитель для χ_{mn} , $\partial \chi_{mn} / \partial n$ — нормальная компонента градиента χ_{mn} на границе. Обе эти формулы справедливы лишь при $k > k_{hmn}$. Отметим, что для обеих волн затухание особенно велико при частотах, близких к критической, затем падает до минимума, а потом, при очень больших частотах, опять возрастает пропорционально квадратному корню из частоты. Это возрастание происходит из-за наличия множителя $\sqrt{\omega}$ в выражении для импеданса проводящей поверхности. Если σ само изменяется с частотой, то коэффициент затухания при больших частотах зависит от частоты, как $\sqrt{\omega/\sigma}$.

Применяя эти формулы к волнам в прямоугольном волноводе, определенным в (13.3.11) и (13.3.13), где

$$\psi_{mn} = \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right), \quad \chi_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right),$$

для поперечно-электрической волны получим

$$x_{emn} = \frac{\sqrt{\mu\omega/4\pi\sigma}}{k \sqrt{k^2 - k_{hmn}^2}} \left\{ \frac{\varepsilon_m}{a} \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi k}{bk_{mn}}\right)^2 \right] + \frac{\varepsilon_n}{b} \left[\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi k}{ak_{mn}}\right)^2 \right] \right\},$$

а для поперечно-магнитной волны

$$x_{hmn} = \frac{2\sqrt{\mu\omega/4\pi\sigma}}{k \sqrt{k^2 - k_{hmn}^2}} \left\{ \frac{1}{a} \left(\frac{m\pi k}{ak_{mn}}\right)^2 + \frac{1}{b} \left(\frac{n\pi k}{bk_{mn}}\right)^2 \right\},$$

где

$$k_{emn}^2 = k_{hmn}^2 = k_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2.$$

Отражение волн от конца волновода. Расчет отражения электромагнитных волн от преграды в конце волновода легче всего провести, используя понятие импеданса. Пусть преграда находится в плоскости $z=0$, так что падающая волна распространяется слева направо (из $z < 0$), а отраженная — справа налево. Потребуем, чтобы отношение $\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}$ к $\mathbf{H} - \mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{a}_z \cdot \mathbf{H})$ оставалось непрерывным при переходе через преграду. Если это отношение постоянно вдоль сечения трубы $z=0$, то волна данной симметрии (заданы значения m и n) отражается с сохранением симметрии; если же это отношение в поперечном сечении изменяется, то симметрия отраженной волны отличается от падающей.

Предположим сначала, что среда справа от преграды характеризуется диэлектрической постоянной ε и (или) магнитной проницаемостью μ , отлич-

ными от единицы, и (или) проводимостью, отличной от нуля. Тогда импеданс, вообще говоря, зависит от типа распространяющейся волны. Когда волна данного типа (заданные m и n) падает на плоскость $z=0$, часть волны, проходящая через преграду, должна зависеть от x и y , так же как и падающая волна (чтобы удовлетворить условиям при $z=0$), хотя ее зависимость от z может быть и другой. В среде ($z > 0$) векторный потенциал удовлетворяет уравнению $\text{rot rot } \mathbf{A} = k^2 \eta^2 \mathbf{A}$, где $\eta^2 = \mu \varepsilon + 4\pi i \mu \sigma / \omega$ и $k = \omega / c$. Поэтому выражения для различных гармоник, распространяющихся в среде направо, такие же, как и в (13.3.18) и (13.3.21), за исключением того, что корень $\sqrt{k^2 - k_{mn}^2}$ всюду надо заменить на $\sqrt{k^2 \eta^2 - k_{mn}^2}$ и выражение для \mathbf{H} поделить на μ .

Выражения для $\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}$, \mathbf{H}_t и их отношение ζ в случае поперечно-электрической волны имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_z \times \mathbf{E} &= \text{grad } \phi_{mn} \exp(iz \sqrt{k^2 \eta^2 - k_{emn}^2} - ikct), \\ \mathbf{H}_t &= \frac{1}{\mu k} \sqrt{k^2 \eta^2 - k_{emn}^2} \text{grad } \phi_{mn} \exp(iz \sqrt{k^2 \eta^2 - k_{emn}^2} - ikct), \\ \zeta_{emn} &= \frac{\mu}{\sqrt{\eta^2 - (k_{emn}/k)^2}}, \end{aligned} \quad (13.3.22)$$

и соответствующие выражения для поперечно-магнитных волн записываются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_z \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{k} \sqrt{k^2 \eta^2 - k_{hmn}^2} [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \chi_{mn}] \exp(iz \sqrt{k^2 \eta^2 - k_{hmn}^2} - ikct), \\ \mathbf{H}_t &= -\frac{1}{\mu} [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \chi_{mn}] \exp(iz \sqrt{k^2 \eta^2 - k_{hmn}^2} - ikct), \\ \zeta_{hmn} &= \mu \sqrt{\eta^2 - \left(\frac{k_{hmn}}{k}\right)^2}. \end{aligned} \quad (13.3.23)$$

В открытой части волновода ($z < 0$) имеется падающая волна единичной амплитуды, заданная одной из функций \mathbf{M} или \mathbf{N} , определенных в (13.3.18) или (13.3.21), и отраженная волна амплитуды R , также зависящая от (x, y) (за исключением того, что у $\sqrt{k^2 - k_{mn}^2}$ всюду надо изменить знак). Выражения для $\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}$ и \mathbf{H}_t при $z=0$ и для их отношения в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}]_0 &= (1 + R) \text{grad } \phi_{mn} e^{-ikct}, \\ (\mathbf{H}_t)_0 &= \sqrt{1 - \left(\frac{k_{emn}}{k}\right)^2} (1 - R) \text{grad } \phi_{mn} \cdot e^{-ikct}, \\ \zeta &= \frac{1 + R}{1 - R} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{k_{emn}}{k}\right)^2}} \end{aligned}$$

для поперечно-электрических волн,

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}]_0 &= -(1 - R) \sqrt{1 - \left(\frac{k_{hmn}}{k}\right)^2} [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \chi_{mn}] e^{-ikct}, \\ (\mathbf{H}_t)_0 &= -(1 + R) [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \chi_{mn}] e^{-ikct}, \\ \zeta &= \frac{1 - R}{1 + R} \sqrt{1 - \left(\frac{k_{hmn}}{k}\right)^2} \end{aligned}$$

для поперечно-магнитных волн. Отраженная амплитуда R для различных волн может быть получена из требования, чтобы ζ в этих послед-

них соотношениях равнялось соответствующему ζ в (13.3.22) и (13.3.23). В результате получим

$$R_{emn} = - \frac{\sqrt{\eta^2 - (k_{emn}/k)^2} - \mu \sqrt{1 - (k_{emn}/k)^2}}{\sqrt{\eta^2 - (k_{emn}/k)^2} + \mu \sqrt{1 - (k_{emn}/k)^2}}$$

для поперечно-электрических волн,

$$R_{hmn} = - \frac{\mu \sqrt{\eta^2 - (k_{hmn}/k)^2} - \sqrt{1 - (k_{hmn}/k)^2}}{\mu \sqrt{\eta^2 - (k_{hmn}/k)^2} + \sqrt{1 - (k_{hmn}/k)^2}} \quad (13.3.24)$$

для поперечно-магнитных волн, где $\eta^2 = \mu\varepsilon + 4\pi i\mu\sigma/\omega$ и μ , ε и σ соответствуют области $z > 0$. При $\mu = 1$ и $\eta = 1$ все R равны, конечно, нулю, так как в этом случае при $z = 0$ нет неоднородности, отражающей волны. При очень большом η величина R приблизительно равна единице; имеет место почти полное отражение. При η , несколько большем единицы, и k , весьма близком к его критическому значению k_{mn} , также имеет место значительное отражение. Конечно, формулы теряют силу при $k < k_{mn}$, поскольку колебания не распространяются при частоте ниже критической.

Влияние изменения размеров волновода. Тот же метод импеданса можно использовать для расчета отражения волн от сужения в волноводе. Пусть, например, при $z < 0$ имеется прямоугольный волновод с размерами поперечного сечения a и b , тогда как для $z > 0$ высота b_+ меньше b , ширина a остается той же, причем сопряжение симметричное. Если слева падает низшая гармоника M_{01}^- (по-прежнему считаем $b > a$), то волна, распространяющаяся по узкой части волновода ($z > 0$), представляет собой совокупность нескольких гармоник типа M_{0n}^+ , но если сужение незначительно, доминирующее значение будет иметь наименьшая гармоника для узкой трубы M_{01}^+ , характеризуемая импедансным отношением $\zeta_{e01}^+ = 1/\sqrt{1 - (\pi/b_+k)^2}$ в поперечном сечении узкой части волновода.

Поэтому в первом приближении импедансное отношение при $z = 0$ для широкой части волновода ($z < 0$) равно

$$\zeta \approx \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq y < \frac{b}{2} - \frac{b_+}{2}, \\ 1/\sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{b_+k}\right)^2} & \text{при } \frac{b}{2} - \frac{b_+}{2} < y < \frac{b}{2} + \frac{b_+}{2}, \\ 0 & \text{при } \frac{b}{2} + \frac{b_+}{2} < y \leq b, \end{cases}$$

где $b > b_+$ и $b > a$. Это соотношение, конечно, имеет место, когда падающая волна является наименьшей гармоникой и когда разность $b - b_+$ значительно меньше, чем b (т. е. когда сужение незначительно).

Даже когда падающая волна представляется наименьшей гармоникой, отраженная от стыка волна состоит не из одной гармоники, она содержит и некоторое число гармоник M_{0n} . Это необходимо для удовлетворения граничным условиям (не нужно включать гармоники M_{mn} для m , отличных от нуля, так как электрическое поле всюду направлено по оси x). Колебания в широкой части волновода ($z < 0$) определяются при этом выражением

$$\mathbf{A} = \frac{1}{ik} \mathbf{E} = - \frac{1}{ik} \left\{ \mathbf{a}_z \times \text{grad} \left[\cos \left(\frac{\pi y}{b} \right) \right] \exp \left[iz \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{b} \right)^2} - ikct \right] + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \mathbf{a}_z \times \text{grad} \left[\cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \right] \exp \left[-iz \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2} - ikct \right] \right\},$$

где амплитуды B_n отраженных волн подсчитываются из условия сопряжения импедансов.

Коэффициенты B_n можно подсчитать, если известна зависимость \mathbf{H}_t от x и y при $z=0$. В первом приближении можно принять, что наличие стыка меньше влияет на \mathbf{H}_t , чем на \mathbf{E} , и взять приближенное выражение для \mathbf{H}_t в виде \mathbf{H}_t падающей волны и наименьшей отраженной гармоники

$$\mathbf{H}_t \simeq -\mathbf{a}_y \frac{\pi}{b} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{kb}\right)^2} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) (1 - B_1) e^{-ikct}.$$

Следовательно, граничное условие для определения B_m имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_z \times \mathbf{E} &= -\mathbf{a}_y \left\{ (1 + B_1) \frac{\pi}{b} \sin \frac{\pi y}{b} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{\pi n}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\} e^{-ikct} = \\ &= \zeta \mathbf{H}_t \simeq \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq y < \frac{b}{2} - \frac{b_+}{2}, \\ \mathbf{a}_y \frac{\pi}{b} \sqrt{\frac{1 - (\pi/kb)^2}{1 - (\pi/kb_+)^2}} \sin \frac{\pi y}{b} (1 - B_1) e^{-ikct} & \text{для открытой области,} \\ 0 & \text{для } \frac{b}{2} + \frac{b_+}{2} < y \leq b. \end{cases} \end{aligned}$$

Умножая обе части на $\sin(\pi m y/b)$ и интегрируя по y , получаем значения B_m . Оказывается, что $B_{2n} = 0$ и

$$\begin{aligned} B_1 &\simeq -\frac{\tau_1 S_+ - \tau_+}{\tau_1 S_+ + \tau_+}, \\ B_{2n+1} &\simeq \frac{2\tau_1/\pi n}{\tau_+ + \tau_1 S_+} \cdot \left\{ \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi b_+}{b} + \frac{1}{n+1} \sin \frac{(n+1)\pi b_+}{b} \right\}; \\ \tau_1 &= \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{kb}\right)^2}, \quad \tau_+ = \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{kb_+}\right)^2}, \\ S_+ &= 1 + \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi b_+}{b}. \end{aligned}$$

Если b_+ близко к b , так что изменение высоты мало, то τ_+ близко к τ_1 , S_+ почти равно единице и амплитуда наименьшей отраженной гармоники мала. Если k меньше π/b_+ (k должно быть больше π/b , чтобы волны распространялись в широкой части волновода), то энергия в узкую часть волновода не передается, вся энергия отражается (τ_+ в этом случае мнимое).

Этот расчет можно усовершенствовать, подсчитывая по найденной волне поле в узкой части волновода, а по нему вычисляя новое, несколько более точное значение магнитного поля в области стыка. Отсюда можно опять определить $\zeta \mathbf{H}_t$ и получить лучшее выражение для \mathbf{E} и т. д. При этом оказывается, что B_1 имеет небольшую мнимую часть, указывающую на наличие определенной реактивной части в полном импедансе стыка.

Если при $z=0$ меняются горизонтальные, а не вертикальные размеры трубы волновода, так что фланец появляется на сторонах, несущих свободные заряды, а не на сторонах, параллельных электрическому полю, то искажение электрического поля несколько больше, чем в предыдущем случае. При этом уже нельзя предполагать, что колебания в узкой части трубы почти полностью определяются наименьшей гармоникой. Свободные заряды стремятся сконцентрироваться в углах, и электрическое поле уже зависит от x и возрастает у фланца при $x = a/2 - a_+/2$ и $a/2 + a_+/2$. Исследование статического поля у такого фланца (см. § 10.2) показывает,

что касательное электрическое поле при $z = 0$ имеет общую форму

$$\mathbf{E}_t = ik\mathbf{A}_t \simeq ika_x A_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \left\{ 1 + 2 \left[\frac{(a/a_+)^2 - 1}{1 - (2\xi/a_+)^2} \right]^{1/3} \right\} e^{-ikct},$$

$$-a_+/2 < \xi < a_+/2, \quad (13.3.25)$$

где $\xi = x - a/2$. Чем больше фланец, тем больше a/a_+ и все более выраженной становится особенность при $\xi = \pm a_+/2$. Это соответствует колебаниям в узкой части волновода ($z > 0$), имеющим вид

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{E}}{ik} = \sum_{m=1}^{\infty} (B_m^+ \mathbf{M}_{2m,1}^+ + C_m^+ \mathbf{N}_{2m,1}^+) + B_0 \mathbf{M}_{0,1},$$

где функции \mathbf{M}^+ , \mathbf{N}^+ соответствуют области $z > 0$ (с $x - a/2 \pm a_+/2$ вместо x и a_+ вместо a в формулах (13.3.11) и (13.3.13).

Коэффициенты B^+ и C^+ вычисляются приравниванием \mathbf{E}_t при $z = 0$ соответствующему ряду. Например, умножая обе части на $\bar{\mathbf{M}}_{2m,1}^+$ и интегрируя по поперечному сечению узкой трубы, мы получим (см. стр. 420)

$$B_m^+ = -i(-1)^m \frac{\pi k \varepsilon_m}{b(k_{2m,1}^+)^2} A_0 \left[\frac{\pi \Gamma(2/3)}{(\pi m/2)^{1/6}} J_{1/6}(\pi m) \right] \left[\left(\frac{a}{a_+} \right)^2 - 1 \right]^{1/3}, \quad m > 0,$$

где $(k_{2m,1}^+)^2 = (2\pi m/a_+)^2 + (\pi/b)^2$ и где использовано разложение

$$\frac{1}{[1 - (2\xi/a_+)^2]^{1/3}} = \frac{a_+}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m}{2} \frac{\pi \Gamma(2/3)}{(\pi m a_+/2a)^{1/6}} J_{1/6}\left(\frac{\pi m a_+}{a}\right) \cos\left(\frac{2\pi m \xi}{a}\right)$$

в области $-a_+/2 < \xi < a_+/2$. Отметим, что коэффициент в скобках при $m = 0$ равен $\sqrt{\pi \Gamma(2/3)}/\Gamma(7/6)$. Коэффициенты C для поперечно-магнитных волн можно подсчитать тем же способом, умножая на *поперечную* часть $\mathbf{N}_{2m,1}^+$ обе части исходного соотношения и затем интегрируя результат.

Подсчитаем затем значение \mathbf{H}_t при $z = 0$, чтобы получить значение импеданса в сечении стыка ($z = 0$). При $\xi = 0$ и $z > 0$ имеем

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{a}_y i A_0 \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \times$$

$$\times \left[1 + \Omega \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2/3)}{2\Gamma(7/6)} \right] \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \exp\left[iz \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} - ikct \right] +$$

$$+ \mathbf{a}_y \Omega A_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k^2 - (\pi/b)^2}{\sqrt{(2\pi m/a_+)^2 + (\pi/b)^2 - k^2}} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2/3)}{(\pi m/2)^{1/6}} J_{1/6}(\pi m) \times$$

$$\times \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \exp\left[-z \sqrt{\left(\frac{2\pi m}{a_+}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 - k^2} - ikct \right],$$

где $\Omega = 2[(a/a_+)^2 - 1]^{1/3}$ и где принято, что $(\pi/b)^2 < k^2 < (\pi/b)^2 + (2\pi/a)^2$. При $a < b$ ряд упрощается, так как он приблизительно равен

$$\mathbf{a}_y B_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2/3)}{(m\pi/2)^{1/6}} J_{1/6}(m\pi) \right] \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-(2\pi m z/a_+) - ikct} =$$

$$= \mathbf{a}_y B_0 \int_0^\pi \sin^{1/3} \theta d\theta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} e^{-i\pi m \cos \theta - (2\pi m z/a_+)} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-ikct} =$$

$$= -\mathbf{a}_y B_0 \left[\int_0^\pi \sin^{1/3} \theta d\theta \ln(1 - e^{-i\pi \cos \theta - 2\pi z/a_+}) \right] \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{-ikct},$$

где $B_0 = (a_+/2\pi) [k^2 - (\pi/b)^2] \Omega A_0$. Теперь положим $z=0$ (аналитическое продолжение) и покажем, что интеграл в скобках равен

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^{1/3} \theta d\theta \ln \left[2i \sin \left(\frac{1}{2} \pi \cos \theta \right) \right] &\simeq \\ &\simeq \ln 4 \int_0^{\pi/2} \sin^{1/3} \theta d\theta + 2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \ln \left[\sin \left(\frac{1}{2} \pi \cos \theta \right) \right] = \\ &= \sqrt{\pi} \ln 2 \cdot \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(7/6)} + \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin \varphi) d\varphi = \\ &= \ln 2 \cdot \left[\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(7/6)} - 2 \right] = 0,40696, \end{aligned}$$

так что для данного приближения адмитанс $1/\zeta = \mathbf{H}_t / [\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}]$ в центре трубы равен

$$\frac{1}{\zeta} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{bk} \right)^2} \left\{ 1 + \frac{\Omega}{1 + \Omega} \left[0,2936 + 0,06477i (a_+ k) \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{bk} \right)^2} \right] \right\}.$$

Следующим шагом добьемся, чтобы касательное электрическое поле для $z < 0$ удовлетворяло условиям при $z=0$. Имеется падающая волна типа M_{01} и целая последовательность отраженных волн типов $M_{2m,1}^-$ и $N_{2m,1}^-$, где M^- и N^- получены по формулам (13.3.11) и (13.3.13), в которых k_z заменено на $-k_z$. Легко видеть, что на границе поведение касательной составляющей выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \mathbf{M}_{01} + \left[B \frac{a_+}{a} - 1 + 1,2936 B \Omega \frac{a_+}{a} \right] \mathbf{M}_{01}^- + \\ + B \frac{\pi^2 a_+}{b^2 a} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\Omega \sqrt{\pi} \Gamma(2/3)}{(\pi m a_+ / 2a)^{1/6}} J_{1/6} \left(\frac{m \pi a_+}{a} \right) + \frac{2a}{m \pi a_+} \sin \left(\frac{m \pi a_+}{a} \right) \right] \times \\ \times \frac{(-1)^m}{k_{2m,1}^2} \left[\mathbf{M}_{2m,1}^- + \frac{2mb/a}{\sqrt{k^2 - k_{2m,1}^2}} \mathbf{N}_{2m,1}^- \right] \end{aligned}$$

определяется формулой (13.3.25) (с $A_0 = iB\pi/bk$ при $z=0$) для $a/2 - a_+/2 < x < a/2 + a_+/2$. Касательные составляющие \mathbf{A} на фланцах $0 < x < a/2 - a_+/2$ и $a/2 + a_+/2 < x < a$ равны нулю. Чтобы найти значение B , подсчитаем \mathbf{H}_t при $z=0$ и приравняем его адмитансу в центре трубы. Утомительные алгебраические вычисления в конечном счете дают значение отраженной амплитуды

$$R = -1 + B \frac{a_+}{a} + 1,2936 B \Omega \frac{a_+}{a}$$

наинишей гармоники в виде

$$R = - \frac{(a - a_+) (1 + 1,2936 \Omega) + i (k a a_+ \Omega G / \pi) \sqrt{1 - (\pi/kb)^2}}{(a + a_+) (1 + 1,2936 \Omega) + i (k a a_+ \Omega G / \pi) \sqrt{1 - (\pi/kb)^2}}, \quad (13.3.26)$$

где

$$G = \left[1,5872 + \frac{1 + \Omega}{\Omega} \ln \left(\frac{a_+}{a} \right) \right] \ln 2$$

и

$$\Omega = 2 \left[\left(\frac{a}{a_+} \right)^2 - 1 \right]^{1/3}.$$

Конечно, при $a_+ = a$ отражение отсутствует. Если ширина a_+ узкой части волновода очень мала, R близко к -1 .

Отражение от штыря в волноводе. В качестве другого примера рассмотрим отражение от непостоянного по поперечному сечению препятствия. Пусть в прямоугольном волноводе с $b > a$ на металлический штырь ширины Δ с центральной линией $y = b/2$, $z = 0$ (см. стр. 761) падает волна наимизшего типа M_{01} . Частота возбуждения заключена между низшей критической ω_{01} и следующей за ней критической частотой. Падающая волна имеет вид

$$A_0 = \frac{1}{ik} E_0 = ia_x \frac{\pi}{bk} \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \exp\left[iz \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} - ikct\right],$$

и результирующее электрическое поле в центре штыря было бы равно

$$E_0 = -a_x \frac{\pi}{b} e^{-ikct},$$

если имелась бы только падающая волна. В идеально проводящем штыре наведется ток, создающий напряжение, компенсирующее напряжение в падающей волне на поверхности штыря. Если сопротивление единицы длины штыря равно R , то наведенный ток таков, что произведение $R \cdot I$ равно разности между падающим и наведенным полями.

Согласно (13.3.16), электрическое поле в центре штыря, создаваемое током I , равно

$$E_i = -a_x \frac{8\pi I}{abc} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - (\pi c/\omega b)^2}} - i\omega \frac{b}{2\pi c} \left[\ln\left(\frac{4b}{\pi e^2 \Delta}\right) + 2 \sum \right] \right\}.$$

Поскольку $IR = E_0 + E_i$, мы получаем соотношение, определяющее I и E_i :

$$I = \frac{-(ac/8) \sqrt{1 - (\pi c/\omega b)^2}}{1 + (abc/8\pi) \sqrt{1 - (\pi c/\omega b)^2} (R - i\omega L)},$$

где $L = (4/ac^2) [\ln(4b/\pi e^2 \Delta) + 2 \sum]$ — эффективная индуктивность провода. Этот наведенный ток создает волну [определяемую первым членом в (13.3.15)], частично компенсирующую падающую волну в области ($z > 0$) за штырем, и порождает местное искажение поля [определяемое вторым членом в (13.3.15)], которое не распространяется по трубе. На достаточно больших расстояниях от штыря, так что можно пренебречь местным искажением, поле имеет вид

$$A = \begin{cases} \frac{(R - i\omega L) \sqrt{1 - (\pi c/\omega b)^2}}{(8\pi/abc) + (R - i\omega L) \sqrt{1 - (\pi c/\omega b)^2}} A_0 & \text{при } z \gg b, \\ A_0 - \frac{A_0 \exp[-2iz \sqrt{k^2 - (\pi/b)^2}]}{1 + (abc/8\pi) (R - i\omega L) \sqrt{1 - (\pi c/\omega b)^2}} & \text{при } z \ll -b, \end{cases} \quad (13.3.27)$$

где

$$A_0 = (i\pi/bk) a_x \sin(\pi y/b) \exp\left[iz \sqrt{k^2 - (\pi/b)^2} - ikct\right] -$$

падающая волна. В области $z < 0$, кроме этого, имеется отраженная волна, находящаяся несколько не в фазе с падающей волной (если только L не равно нулю). Штырь действует так, как будто его импеданс равен $R - i\omega L$. Взаимодействие штыря с волной в волноводе определяется константой связи $8\pi/abc$.

Можно привести много других конкретных расчетов для определения полей и коэффициентов отражения в волноводах различной формы и конфигурации. Читатель, интересующийся другими примерами, может найти их в специальной литературе по этому вопросу.

Упругие волны в брус. Волны, распространяющиеся по брусу из упругого материала постоянного поперечного сечения (в плоскости x, y), имеют в основном тот же вид, что и волны, определенные на стр. 759, и электромагнитные волны в волноводе. Имеется продольная волна, соответствующая скорости распространения $c_c = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ в неограниченном пространстве,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{mn} &= \frac{1}{ik_c} \text{grad} [\varphi_{mn}(x, y) e^{ikz}] e^{-i\omega t} = \\ &= \left[\frac{1}{ik_c} \text{grad} \varphi_{mn} + \frac{k}{k_c} \mathbf{a}_z \varphi_{mn} \right] e^{ikz - i\omega t}, \end{aligned} \quad (13.3.28)$$

где $k_c^2 = \rho\omega^2/(\lambda + 2\mu)$ и φ_{mn} — решение скалярного уравнения $\nabla^2 \varphi_{mn} + \alpha_{1mn}^2 \varphi_{mn} = 0$ (и $k^2 = k_c^2 - \alpha_{1mn}^2$), удовлетворяющее соответствующим граничным условиям на контуре поперечного сечения.

Отметим, что скорость распространения волн вдоль бруса ω/k , вообще говоря, не равна $c_c = \omega/k_c$. Обычно в силу граничных условий φ_{mn} отлично от постоянной, следовательно, α_{1mn} отлично от нуля, и тем самым скорость вдоль стержня отлична от c_c . Лишь в том случае, когда из граничных условий следует, что смещение s касательно к границе, φ может быть постоянной. При этом колебания являются чисто продольными. В большинстве же случаев граничные условия не удовлетворяются только продольной волной; надо добавить еще и поперечную волну. Так же, как и в случае отражения от плоскости (рассмотренного на стр. 750—751), волна сжатия, отражаясь от боковой поверхности бруса, при своем распространении порождает и волну сдвига и наоборот.

Две поперечные волны имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{mn} &= \frac{1}{ik_s} \text{rot} [\mathbf{a}_z \psi_{mn}(x, y) e^{ikz}] e^{-i\omega t} = \\ &= - \frac{1}{ik_s} [\mathbf{a}_z \times \text{grad} \psi_{mn}] e^{ikz - i\omega t}, \\ \mathbf{N}_{mn} &= \frac{1}{k_s^2} \text{rot rot} [\mathbf{a}_z \chi_{mn}(x, y) e^{ikz}] e^{-i\omega t} = \\ &= \left[\frac{ik}{k_s^2} \text{grad} \chi_{mn} + \frac{\alpha_{3mn}^2}{k_s^2} \mathbf{a}_z \chi_{mn} \right] e^{ikz - i\omega t}, \end{aligned} \quad (13.3.29)$$

где $k_s^2 = \rho\omega^2/\mu$, а χ, ψ — решения уравнений

$$\nabla^2 \chi_{mn} + \alpha_{3mn}^2 \chi_{mn} = 0 \quad (k^2 = k_s^2 - \alpha_{3mn}^2)$$

и

$$\nabla^2 \psi_{mn} + \alpha_{2mn}^2 \psi_{mn} = 0 \quad (k^2 = k_s^2 - \alpha_{2mn}^2),$$

удовлетворяющие заданным граничным условиям на контуре поперечного сечения. Волны типа М являются волнами кручения, вызывающими движение, ортогональное оси z . Волны типа N в комбинации с волнами типа L дают волны растяжения вдоль стержня.

Пусть выбраны две ортогональные криволинейные координаты ξ_1 и ξ_2 вместо x и y , такие, что $\xi_1 = X$ является границей поперечного сечения, а ξ_1, ξ_2, z образуют правую цилиндрическую координатную систему (например, круговые или эллиптические цилиндрические координаты). В этих координатах с единичными векторами $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_z$ и коэффициентами Ламе

h_1 , h_2 и 1 три типа волн имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \left[-\frac{\mathbf{a}_1}{k_s h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} + \frac{\mathbf{a}_2}{k_s h_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right] e^{ikhz - i\omega t}, \\ \mathbf{N} &= \left[\frac{ika_1}{k_s^2 h_1} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_1} + \frac{ika_2}{k_s^2 h_2} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_2} + \frac{k_s^2 - k^2}{k_s^2} \mathbf{a}_z \chi \right] e^{ikhz - i\omega t}, \\ \mathbf{L} &= \left[-\frac{\mathbf{a}_1}{k_c h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} - \frac{\mathbf{a}_2}{k_c h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} + \frac{k}{k_c} \mathbf{a}_z \varphi \right] e^{ikhz - i\omega t}. \end{aligned} \quad (13.3.30)$$

Если граничное условие заключается в задании смещений, то этого вполне достаточно для определения k для заданной волны. Часто удается выбрать ψ так, что граничные условия удовлетворяются чистой волной кручения. Например, в круговых цилиндрических координатах r , φ , z для $s=0$ при $r=a$ (как будет, скажем, для резинового заполнения жесткого полого цилиндра) можно положить $\psi = J_0(ar)$ независимо от $\varphi (= \xi_2)$ и затем выбрать a так, что $dJ_0/dr = 0$ при $r=a$. С другой стороны, обычно нельзя удовлетворить таким граничным условиям двумя другими типами волн, если только не используется комбинация \mathbf{L} и \mathbf{N} . Так как k одно и то же для \mathbf{L} и \mathbf{N} , то при использовании их как составляющих одной волны мы получим соотношение между α_{1mn} и α_{3mn} , которое вместе с граничными условиями служит для определения k .

Однако в большинстве интересных случаев граничные условия заключаются в задании граничного напряжения $\mathfrak{F} \cdot \mathbf{a}_1$ при $\xi_1 = X$, где \mathfrak{F} — аффинор напряжений $\lambda \mathfrak{F} \operatorname{div} \mathbf{s} + \mu (\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla)$. Следовательно, нужны выражения аффинора напряжений для волн всех типов. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \text{для } \mathbf{M} \quad \mathfrak{F} &= \left\{ -\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 \frac{2i\mu}{k_s} \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \right) - \frac{1}{h_1^2 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right] + \right. \\ &+ \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 \frac{2i\mu}{k_s} \left[\frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right) - \frac{1}{h_1 h_2^2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \right] + \\ &+ (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) \frac{i\mu}{k_s} \left[\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \right) - \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{h_1 h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} \right) \right] + \\ &+ (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_z + \mathbf{a}_z \mathbf{a}_1) \frac{\mu k}{k_s h_2} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} - (\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_z + \mathbf{a}_z \mathbf{a}_2) \frac{\mu k}{k_s h_1} \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} \left. \right\} e^{ikhz - i\omega t}, \\ \text{для } \mathbf{N} \quad \mathfrak{F} &= \left\{ \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 \frac{2ik\mu}{k_s^2} \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{h_1 h_2^2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_2} \right] + \right. \\ &+ \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 \frac{2ik\mu}{k_s^2} \left[\frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_2} \right) + \frac{1}{h_1^2 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_1} \right] + \\ &+ \mathbf{a}_z \mathbf{a}_z 2ik\mu \left(1 - \frac{k^2}{k_s^2} \right) \chi + \\ &+ (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) \frac{ik\mu}{k_s^2} \left[\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_2} \right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \chi}{\partial \xi_1} \right) \right] + \\ &+ \mu \frac{k_s^2 - 2k^2}{k_s^2} \left[\mathbf{a}_z (\operatorname{grad} \chi) + (\operatorname{grad} \chi) \mathbf{a}_z \right] \left. \right\} e^{ikhz - i\omega t}, \\ \text{для } \mathbf{L} \quad \mathfrak{F} &= \left\{ -\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1 \frac{2i\mu}{k_c} \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \right) + \frac{1}{h_1 h_2^2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \right] - \right. \\ &- \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2 \frac{2i\mu}{k_c} \left[\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \right) + \frac{1}{h_1^2 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \right] + \\ &+ \mathbf{a}_z \mathbf{a}_z \frac{2i\mu k^2}{k_c} \varphi + \mathfrak{F} i \lambda k_c \varphi - \\ &- (\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1) \frac{i\mu}{k_c} \left[\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \right) \right] + \\ &+ 2\mu \frac{k}{k_c} \left[\mathbf{a}_z \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{grad} \varphi \mathbf{a}_z \right] \left. \right\} e^{ikhz - i\omega t}. \end{aligned} \quad (13.3.31)$$

Для большинства цилиндрических координат из этих соотношений можно получить немного, становится лишь ясной сложность удовлетворения граничным условиям. Можно рассчитать некоторые типы колебаний в случае круговых цилиндрических координат. Например, для симметричной относительно оси волны имеем

$$\varphi = J_0(r\sqrt{k_c^2 - k^2}), \quad \psi \text{ или } \chi = J_0(r\sqrt{k_s^2 - k^2}).$$

Для волны кручения напряжение на границе стержня ($r = a$) равно

$$(\mathfrak{L} \cdot \mathbf{a}_r)_{r=a} = \mathbf{a}_\varphi \frac{i\mu}{k_s} (k_s^2 - k^2) J_2(a\sqrt{k_s^2 - k^2}) e^{ikz - i\omega t}, \quad (13.3.32)$$

и для того, чтобы эта граница была свободной (напряжение на ней равно нулю), $a\sqrt{k_s^2 - k^2}$ должно быть одним из корней $\pi\beta_{2n}$ уравнения $J_2(\pi\beta_{2n}) = 0$. Другими словами, продольное волновое число k является следующей функцией от ω и n :

$$k = \left[\frac{\rho\omega^2}{\mu} - \left(\frac{\pi\beta_{2n}}{a} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad n\text{-я волна кручения}, \quad (13.3.33)$$

пока ω больше критического значения $(\pi\beta_{2n}/a) \sqrt{\mu/\rho}$.

Конечно, наименьшая гармоника является предельной при $\beta \rightarrow 0$, причем $\phi \rightarrow -r^2/2$ и $\mathfrak{L} \cdot \mathbf{a}_r = 0$ для всех r , хотя $\mathfrak{L} \cdot \mathbf{a}_z$ не равно нулю. В этом случае k как раз равно k_s ; скорость распространения этой волны в точности равна скорости распространения волны сдвига в неограниченном пространстве.

С другой стороны, наименьшей волной удлинения является комбинация L и N. Для волн типа N при $\chi = J_0(r\sqrt{k_s^2 - k^2})$ вектор напряжения на поверхности $r = a$ равен

$$\left\{ -\mathbf{a}_r \frac{ik\mu}{k_s^2} (k_s^2 - k^2) [J_0(\beta_s) - J_2(\beta_s)] + \mathbf{a}_z \frac{\mu}{k_s^2} (2k^2 - k_s^2) \sqrt{k_s^2 - k^2} J_1(\beta_s) \right\} e^{ikz - i\omega t},$$

где $\beta_s = a\sqrt{k_s^2 - k^2}$, в то время как для L при $\varphi = J_0(r\sqrt{k_c^2 - k^2})$ он равен

$$\left\{ \mathbf{a}_r \frac{i\mu}{k_c} (k_c^2 - k^2) [J_0(\beta_c) - J_2(\beta_c)] + \mathbf{a}_r i\lambda k_c J_0(\beta_c) - \mathbf{a}_z \frac{2\mu k}{k_c} \sqrt{k_c^2 - k^2} J_1(\beta_c) \right\} e^{ikz - i\omega t},$$

где $\beta_c = a\sqrt{k_c^2 - k^2}$. Нужная комбинация, исключаяющая z -составляющую вектора напряжения при $r = a$, имеет вид

$$\frac{ak_c}{2\mu k} \frac{\mathbf{L}}{\beta_c J_1(\beta_c)} + \frac{ak_s^2}{\mu(2k^2 - k_s^2)} \frac{\mathbf{N}}{\beta_s J_1(\beta_s)} = \mathbf{a}_z \left[\frac{a}{2\mu} \frac{J_0(\beta_c r/a)}{\beta_c J_1(\beta_c)} - \frac{a(k^2 - k_s^2)}{\mu(2k^2 - k_s^2)} \frac{J_0(\beta_s r/a)}{\beta_s J_1(\beta_s)} \right] + \\ + i\mathbf{a}_r \left[\frac{1}{2\mu k} \frac{J_1(\beta_c r/a)}{J_1(\beta_c)} - \frac{k}{\mu(2k^2 - k_s^2)} \frac{J_1(\beta_s r/a)}{J_1(\beta_s)} \right]. \quad (13.3.34)$$

Для бруса с диаметром, значительно меньшим длины волны $2\pi c_s/\omega$, или для частот, намного меньших c_s , деленной на диаметр бруса (эти две фразы эквивалентны), уравнение, соответствующее требованию обращения в нуль r -компоненты поверхностного напряжения, из которого определяются допустимые значения k , значительно упрощается. В этом случае ak_s и ak_c значительно меньше единицы. Для наименьшей гармоники ak также мало, так что β_c настолько мало, что можно пренебречь его степенями выше первой. Например, $J_1(\beta) \simeq \beta/2$ и $J_0(\beta) - J_2(\beta) \simeq 1$ и т. д.

Тогда в первом приближении выражение вектора напряжения на поверхности $r = a$ для комбинации, определяемой формулой (13.3.34), имеет вид

$$\mathbf{a}_r \frac{i}{2ak} \left[1 + \frac{\lambda k_c^2}{\mu(k_c^2 - k^2)} - \frac{k^2}{2k^2 - k_s^2} \right].$$

Этот вектор, конечно, имеет только r -компоненту, так как соответствующая комбинация была получена исключением напряжений по z . Чтобы это выражение равнялось нулю в первом порядке по β_c и β_s , должно иметь место соотношение

$$\mu(2k^2 - k_s^2)(k_c^2 - k^2) + \lambda k_c^2(2k^2 - k_s^2) - 2\mu k^2(k_c^2 - k^2) = 0,$$

или

$$k^2 = \frac{(\lambda + \mu)k_s^2 k_c^2}{2\lambda k_c^2 + \mu k_s^2} = \rho \omega^2 \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}, \quad \rho \omega^2 a^2 \ll \mu. \quad (13.3.35)$$

Отношение $\mu(3\lambda + 2\mu)/(\lambda + \mu)$ называется *модулем Юнга*. Оно играет роль модуля, когда упругий материал вытягивается в одном направлении и не нагружается в направлениях, нормальных к вытягиванию, так что материал несколько сокращается в нормальных направлениях. Отношение напряжения к деформации в этом случае оказывается равным модулю Юнга. Из проведенного расчета следует, что для бруса, диаметр которого мал по сравнению с длиной волны, можно пренебречь поперечным ускорением по сравнению с продольным движением и рассматривать волну как чистую волну растяжений со скоростью распространения

$$c_y = \sqrt{\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\rho(\lambda + \mu)}},$$

не зависящей от частоты (пока диаметр бруса мал по сравнению с длиной волны). Для более высоких частот или больших поперечных сечений приближение, конечно, не справедливо.

В первом приближении вектор смещения для этой наинизшей гармоники равен

$$\mathbf{s} \simeq -\frac{(3\lambda + 2\mu)^2}{\mu k_s^2 \lambda^2} \left[\mathbf{a}_z - i \mathbf{a}_r \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} kr \right] e^{ikz - i\omega t},$$

откуда, отделяя действительную часть и умножая ее на произвольную постоянную, получим

$$\mathbf{s} \simeq A \left[\mathbf{a}_z \cos(kz - \omega t) + \mathbf{a}_r \frac{\lambda/2}{\lambda + \mu} kr \sin(kz - \omega t) \right].$$

Отсюда следует, что в тех поперечных сечениях балки (для тех значений $kz - \omega t$), где z -компонента смещения наибольшая, r -компонента будет наименьшей, и наоборот. Однако наибольшее *удлинение* в направлении z имеет место в плоскости, определяемой соотношением $kz - \omega t = (2n - 1/2)\pi$, которая является местом наибольшего *сокращения* по r . В этих областях сокращение в направлении r (минус градиент s_r по r) равно удлинению по z (градиенту s_z по z), умноженному на $\lambda/2(\lambda + \mu)$. Отношение $\lambda/2(\lambda + \mu)$ называется *коэффициентом Пуассона*. Заметим, что это соотношение имеет смысл лишь для колебаний вдоль бруса, диаметр которого значительно меньше длины волны.

Для высшей гармоники симметричной волны, распространяющейся по тонкому брусу ($k_s a \ll 1$), β_s и β_c не могут быть малы по сравнению с единицей, и следовательно, k должно быть мнимым. Используя соотношение (13.3.34), исключая z -компоненту поверхностного напряжения, а затем выбирая значение k/i так, чтобы r -компонента равнялась нулю, получим довольно сложное уравнение, содержащее функции Бесселя J_0 , J_1 и J_2 от $a\sqrt{k_s^2 - k^2}$ и $a\sqrt{k_c^2 - k^2}$. Его решения здесь рассматриваться не будут.

Не будем мы рассматривать также и *поперечные колебания* бруса, при которых направление вектора \mathbf{s} близко к осям x или y , возвращающая сила возникает при изгибании бруса и скорость распространения $c_t = \omega/k$ намного меньше c_s .

Вынужденные крутильные колебания бруса. Мы несколько продолжим рассмотрение крутильных колебаний цилиндрического бруса. Пусть вращающий момент $T e^{-i\omega t}$ приложен к кольцу ширины Δ между $z = -\Delta/2$ и $z = \Delta/2$, по боковой поверхности бруса радиуса a , простирающегося в бесконечность в обе стороны вдоль оси z . Тогда вектор напряжения при $r = a$ равен

$$(\mathfrak{L} \cdot \mathbf{a}_r)_{r=a} = \mathbf{P}(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < -\frac{\Delta}{2}, \\ \mathbf{a}_\varphi \frac{T}{2\pi a^2 \Delta} e^{-i\omega t} & \text{при } -\frac{\Delta}{2} < z < \frac{\Delta}{2}, \\ 0 & \text{при } z > \frac{\Delta}{2}. \end{cases}$$

Очевидно, чтобы напряжение, определяемое формулой (13.3.32), удовлетворяло этому разрывному условию, надо использовать разложение в интеграл Фурье по k .

Интеграл Фурье этого вынуждающего усилия имеет вид

$$\mathbf{P}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikhz} dk \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(\zeta) e^{-ik\zeta} d\zeta = -\mathbf{a}_\varphi \frac{T e^{-i\omega t}}{2\pi^2 a^2 \Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\Delta/2)}{k} e^{ikhz} dk. \quad (13.3.36)$$

Чтобы интеграл от выражения вида (13.3.32) сводился к данному, функцию ψe^{ikhz} надо заменить интегралом Фурье. Поле смещений, согласно (13.3.30), получим в виде

$$\mathbf{s} = -\frac{\mathbf{a}_\varphi T e^{-i\omega t}}{2\pi^2 \mu a^2 \Delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(k\Delta/2)}{k \sqrt{k_s^2 - k^2}} \frac{J_1(r \sqrt{k_s^2 - k^2})}{J_2(a \sqrt{k_s^2 - k^2})} e^{ikhz} dk. \quad (13.3.37)$$

Все особенности подинтегральной функции являются простыми полюсами. Два из них, $\pm k_s$, лежат на действительной оси. Остальные — на мнимой оси при $\pm i \sqrt{(\pi\beta_{2n}/a)^2 - k_s^2}$, где $\pi\beta_{2n}$ является n -м корнем уравнения $J_2(\pi\beta_{2n}) = 0$. (Это означает, что $k_s < \pi\beta_{21}/a$, т. е. полюсы для нескольких первых корней J_2 лежат на действительной оси.) Для больших комплексных k главной частью подинтегральной функции будет множитель $\sin(k\Delta/2) e^{ikhz}$, отношение J_1/J_2 стремится к конечной постоянной при k , стремящемся к бесконечности в любом направлении, за исключением мнимой оси.

Пусть $a < \pi\beta_{21}/k_s$, так что из всех волн кручения незатухающей является лишь наименьшая гармоника, отмеченная в связи с уравнением (13.3.32) (для $k = k_s$). Вычисляя интеграл для значений z , много больших $\Delta/2$, найдем, что заметное влияние оказывают лишь полюсы $\pm k_s$. Для этих значений z замкнем контур интегрирования дугой полукруглости очень большого радиуса в *верхней* полуплоскости, чтобы все полюсы попали внутрь. Чтобы определить, какой из двух полюсов на действительной оси должен попасть внутрь контура, вспомним, что направо для $z > \Delta/2$ должна быть уходящая волна. Поэтому контур интегрирования должен проходить *над* всеми полюсами, лежащими на отрицательной части действительной оси k , и *под* всеми полюсами на положительной части действительной оси k ; тем самым полюс $k = +k_s$ должен быть заключен внутри контура интегрирования (см. рассуждения на стр. 762 в томе I).

Поскольку $J_1(\varepsilon) \rightarrow \varepsilon/2$ и $J_2(\varepsilon) \rightarrow \varepsilon^2/8$, вычет в этом полюсе таков, что

$$\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{a}_\varphi \frac{iT}{\pi \mu a^3 k_s} \frac{\sin(k_s \Delta/2)}{k_s \Delta/2} \frac{r}{a} e^{ikh_s z - i\omega t} \quad (13.3.38)$$

где $k_s = \omega \sqrt{\rho/\mu}$ и где z достаточно велико ($z \gg a/\pi\beta_{21}$), чтобы вычетами в полюсах на мнимой оси можно было пренебречь.

Эти вычеты определяют высшие гармоники крутильных колебаний, которые, как мы приняли, при данной частоте все затухают, а не распространяются, и их влияние заметно лишь у кольца, к которому приложено внешнее воздействие. Следовательно, энергия, подаваемая в это кольцо, излучается в виде простых волн кручения, распространяющихся в обе стороны (поскольку выражение для больших отрицательных z отличается от выражения для положительных z лишь знаком перед z в экспоненте). Амплитуда этих волн на некотором расстоянии от кольца равна амплитуде T вращающего момента, умноженной на $1/\pi a^3 \omega \sqrt{\rho/\mu}$, при условии, что ширина Δ кольца значительно меньше длины волны.

Чтобы подсчитать импеданс возбуждения, надо вычислить s при $z = \Delta/2$. Для этого надо найти вычеты для других полюсов при $z > \Delta/2$, а затем получить значение при $z = \Delta/2$ при помощи аналитического продолжения. Положение n -го полюса на мнимой оси определяется из равенства $a \sqrt{k_s^2 - k^2} = \pi\beta_{2n}$, где $\pi\beta_{2n}$ — n -й корень уравнения $J_2(\pi\beta) = 0$. Положим $k = iK_n + \varepsilon$, где $K_n^2 = (\pi\beta_{2n}/a)^2 - k_s^2$; в этом случае $\sqrt{k_s^2 - k^2} = \pi\beta_{2n}/a - i\varepsilon(aK_n/\pi\beta_{2n})$ для достаточно малых ε . Пользуясь выражениями для производных функций Бесселя, применим разложение в ряд Тейлора для определения зависимости J_2 от ε :

$$J_2(a \sqrt{k_s^2 - k^2}) \simeq -ia\varepsilon \frac{aK_n}{\pi\beta_{2n}} J_1(\pi\beta_{2n}),$$

откуда следует порядок полюса при $k = iK_n$.

Собирая все множители и вычисляя вычеты, окончательно получим полное выражение для вектора смещения

$$s = a_\varphi \frac{iTe^{-i\omega t}}{\pi a^3 \omega \sqrt{\rho\mu}} \left\{ \frac{r}{a} \frac{\sin(k_s \Delta/2)}{k_s \Delta/2} e^{ik_s z} - \right. \\ \left. - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_s}{K_n^2 \Delta} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{2} K_n \Delta\right) e^{-K_n z} \frac{J_1(\pi\beta_{2n} r/a)}{J_1(\pi\beta_{2n})} \right\}, \quad z > \frac{\Delta}{2}.$$

Ряд надо преобразовать, чтобы с ним можно было оперировать. Интересны значения s при $r = a$ и $z = \Delta/2$; в этом случае функции Бесселя выпадают. При ak_s , достаточно малых, K_n очень близко к $\pi\beta_{2n}/a$. Далее, в первую очередь представляет интерес *крутильный адмитанс* бруса при кольцевом возбуждении, отношение между угловым смещением s/a кольца и вращающим моментом T . Когда $ak_s \ll 1$, этот адмитанс равен

$$Y_t \simeq \frac{1}{\pi a^4 \sqrt{\rho\mu}} \left\{ \frac{\sin(k_s \Delta/2)}{k_s \Delta/2} e^{ik_s \Delta/2} - \right. \\ \left. - \frac{i\omega a^2}{2\Delta} \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} \sum_n \frac{1}{(\pi\beta_{2n})^2} [1 - e^{-(\pi\beta_{2n} \Delta/2)}] \right\}. \quad (13.3.39)$$

Если Δ/a не мало, но $k_s \Delta$ мало, то величина в скобках в первом члене стремится к единице, а экспоненциальная часть ряда быстро сходится; имеет значение лишь первый член. Различными способами можно показать, что $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(\pi\beta_{2n})^2 = 1/4(m+1)$. Поэтому для $k_s \Delta \ll 1$, но при $\Delta \sim a$ крутильный адмитанс равен

$$Y_t \simeq \frac{1}{\pi a^4 \sqrt{\rho\mu}} - i\omega \frac{1}{24\pi a^2 \mu \Delta} [1 - 0,455e^{-5,14\Delta/a} - \dots], \quad (13.3.40)$$

что соответствует активному сопротивлению $\pi a^4 \sqrt{\rho\mu}$, включенному параллельно «упругости», приблизительно равной $24\pi a^2 \mu \Delta$.

Однако более интересен тот случай, когда Δ мало по сравнению с a , так что $k_3 \Delta$ тем более мало. Используем соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi\beta_{2n})^2} [1 - e^{-(\pi\beta_{2n}\Delta/a)}] = \int_0^{\Delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\beta_{2n}a} e^{-\pi\beta_{2n}x/a} dx.$$

Но $\beta_{2n} \simeq n + 3/4$, так что ряд под знаком интеграла приближенно равен

$$\frac{1}{\pi a} e^{-3\pi x/4a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3/4} e^{-\pi n x/a} \text{ или } \frac{1}{\pi a} e^{\pi x/4a} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m-1/4} e^{-\pi m x/a}.$$

Для достаточно малых Δ/a среднее значение для этих рядов стремится к

$$-\frac{g}{a\pi} + \sum \frac{1}{\pi a n} e^{-\pi n x/a} \simeq -\frac{1}{a\pi} - \frac{1}{\pi a} \ln\left(\frac{\pi x}{a}\right), \quad x \ll a,$$

где постоянная g близка к единице. Выполняя интегрирование, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi\beta_{2n})^2} [1 - e^{-\pi\beta_{2n}\Delta/a}] \simeq \frac{\Delta}{\pi a} \cdot \ln\left(\frac{a}{\pi\Delta}\right).$$

Поэтому для $\Delta \ll a \ll 1/k_3$ адмитанс оказывается приблизительно равным

$$Y \simeq \frac{1}{\pi a^4 \sqrt{\rho\mu}} - i\omega \frac{1}{2\pi^2 a^3 \mu} \ln\left(\frac{a}{\pi\Delta}\right) \tag{13.3.41}$$

и соответствует активному сопротивлению $\pi a^4 \sqrt{\rho\mu}$, включенному параллельно «упругости» $2\pi^2 a^3 \mu / \ln(a/\pi\Delta)$.

Эти два предельных приближения иллюстрируют природу взаимодействия возбуждающего кольца и бруса. Когда второй член в Y мал по сравнению с первым или из-за большого Δ , или из-за малой ω , связь с брусом хорошая и колебания возбуждающего кольца происходят с амплитудой, лишь немногим большей, чем амплитуда крутильных волн, распространяющихся от кольца [как показано в (13.3.38)], так как в этом случае высшие гармоники почти не возбуждаются.

С другой стороны, при несколько большей частоте или меньшей ширине кольца Δ высшие гармоники возбуждаются заметным образом, вторым членом в Y уже нельзя пренебречь и связь между кольцом и брусом менее эффективна. Высшие гармоники соответствуют движению кольца, которое не вызывает волнового движения, что тем самым уменьшает эффективную связь между кольцом и волной. Эти высшие гармоники соответствуют скручиванию бруса, не постоянному по r . Если представить себе брус состоящим из концентрических цилиндрических оболочек, то низшая крутильная гармоника соответствует повороту всех оболочек на один и тот же угол при любом заданном значении z , в то время как высшие гармоники соответствуют закручиванию оболочек друг относительно друга, каждая оболочка поворачивается на свой угол. Наличие второго члена в Y отражает тот факт, что кольцо и внешние оболочки бруса, ближайšie к кольцу, поворачиваются на больший угол, чем внутренние оболочки при $r < a$.

Это же влияние высших гармоник объясняет и то, что кольцо ширины Δ , приваренное к брусу и удерживаемое неподвижно, не полностью гасит крутильные колебания. Оно демпфирует часть волн, которые несут внешние оболочки, но внутренний сердечник бруса, не будучи жестко связан с неподвижным кольцом, пропускает часть волн за кольцо. Предположим, например, что идущая слева волна

$$s_i = a_\varphi A \frac{r}{a} e^{iks^z - i\omega t}$$

падает на неподвижное кольцо ширины Δ , приваренное к брусу при $z = 0$. Кольцо должно вызвать действие на поверхность бруса противоположного вращающего момента. Этот момент в отсутствии падающей волны вызовет движение, равное и противоположное производимому падающей волной в месте нахождения кольца. При этом возникнут расходящиеся от кольца волны. Если связь хорошая (вторым членом в Y можно пренебречь), то амплитуды этих волн близки к амплитуде падающей волны, так что при $z > 0$ две волны взаимно уничтожаются (нет проходящей волны), а при $z < 0$ имеет место полное отражение. Если связь плохая, но присутствуют некоторые высшие гармоники, что уменьшает связь между сердечником бруса и его поверхностью, то амплитуда отраженной волны равна не A , а

$$\frac{A}{[1 - i\omega (a/2\pi) \sqrt{\rho/\mu} \ln(a/\Delta\pi)]}, \quad \Delta \ll a \ll 1/k_s,$$

что близко к A , а амплитуда проходящей волны равна величине

$$\frac{A}{1 + (2\pi i/\omega a) \sqrt{\mu/\rho} [1/\ln(a/\Delta\pi)]}, \quad (13.3.42)$$

которая обычно очень мала, но не равна нулю. Если Δ немногим меньше a , то это последнее выражение ближе к

$$\frac{A}{1 + (24i\Delta/\omega a^2) \sqrt{\mu/\rho}}.$$

Поскольку $\sqrt{\mu/\rho}$ порядка 10^5 единиц CGS, из полученных результатов следует, что волна кручения, проходящая за демпфирующее кольцо, весьма мала, если только произведение ωa не больше, чем 1.000.000 см/сек.

Нестационарный вязкий поток в трубе. Если в трубе, содержащей вязкую несжимаемую жидкость, падение давления является периодической функцией времени, $-\text{grad } P = \mathbf{a}_z F_0 e^{-i\omega t}$, то поток также периодический. Пока скорости не превосходят скорости, соответствующей критическому числу Рейнольдса, поток параллелен оси трубы, оси z . Изменение потока в поперечном сечении трубы можно выразить через систему скалярных двумерных собственных функций $\psi_{nm}(x, y)$, решений уравнения $\nabla^2 \psi_{nm} + k_{nm}^2 \psi_{nm} = 0$, обращающихся в нуль на контуре a поперечного сечения трубы:

$$\mathbf{v}_\omega = \mathbf{a}_z \sum_{n,m} A_{nm} \psi_{nm}(x, y) e^{-i\omega t},$$

где значения коэффициентов A можно определить из требования, чтобы \mathbf{v} удовлетворяло уравнению (13.3.1):

$$\nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\rho}{\eta} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{a}_z \cdot \frac{F_0}{\eta} e^{-i\omega t}.$$

Подставляя ряд в это уравнение, умножая обе части на $\bar{\psi}_{nm}$ и интегрируя по поперечному сечению, получаем

$$\mathbf{v}_\omega = -i\mathbf{a}_z e^{-i\omega t} \frac{F_0}{\rho} \sum_{n,m} \frac{I_{nm} \psi_{nm}(x, y)}{\omega + i(\eta k_{nm}^2/\rho)}, \quad (13.3.43)$$

где

$$I_{nm} = \iint \bar{\psi}_{nm} dx dy / \iint |\psi_{nm}|^2 dx dy.$$

Таким образом, движение не полностью находится в фазе с падением давления, отставание по фазе гармоники (n, m) равно $\text{arctg}(\omega\rho/\eta k_{nm}^2)$.

Подсчитав \mathbf{v}_ω , можно определить поток для любого неустановившегося падения давления, используя преобразование Лапласа. Например, для паде-

ния давления, внезапно приложенного в момент $t=0$,

$$\mathbf{a}_z F_0 u(t) = -\frac{\mathbf{a}_z F_0}{2\pi i} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{\omega},$$

где $u(t) = 0 (t < 0)$, $u(t) = 1 (t > 0)$, получим решение

$$\mathbf{v}_u = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} \mathbf{v}_\omega \frac{d\omega}{\omega} = \begin{cases} 0 & \text{для } t < 0, \\ \mathbf{a}_z \frac{F_0}{\eta} \sum_{n,m} \frac{I_{nm}}{k_{nm}^2} \psi_{nm}(x), & -ik_{nm}^2 t/\rho \end{cases} \quad \text{для } t > 0. \quad (13.3.44)$$

Скорость равна нулю при $t < 0$, высшие гармоники первыми возбуждаются полностью, и, наконец, при $t \gg \rho/\eta k_{01}^2$ (где k_{01} — наимизшее собственное значение) движение представляет собой установившийся поток, рассмотренный в § 13.2.

Электромагнитные резонаторы. Если оба конца прямоугольного волновода закрыты, так что образуется прямоугольный параллелепипед со сторонами l_x , l_y и l_z , то внутри этой области могут существовать стоячие электромагнитные волны. Двумя основными типами стоячих волн, удовлетворяющих граничному условию $E_t = 0$ на поверхности и имеющих равную нулю дивергенцию внутри области, являются

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m(\mathbf{r}) &= \frac{1}{k_m} \text{rot} \left[\mathbf{a}_z \cos\left(\frac{\pi m_x x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi m_y y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi m_z z}{l_z}\right) \right] = \\ &= -\mathbf{a}_x \frac{\pi m_y}{l_y k_m} \cos\left(\frac{\pi m_x x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m_y y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi m_z z}{l_z}\right) + \\ &+ \mathbf{a}_y \frac{\pi m_x}{l_x k_m} \sin\left(\frac{\pi m_x x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi m_y y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi m_z z}{l_z}\right), \end{aligned} \quad (13.3.45)$$

$$k_m^2 = (\pi m_x/l_x)^2 + (\pi m_y/l_y)^2 + (\pi m_z/l_z)^2 = (\omega_m/c)^2, \quad m = (m_x, m_y, m_z),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_m(\mathbf{r}) &= \frac{1}{k_m^2} \text{rot rot} \left[\mathbf{a}_z \sin\left(\frac{\pi m_x x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m_y y}{l_y}\right) \cos\left(\frac{\pi m_z z}{l_z}\right) \right] = \\ &= \mathbf{a}_z \frac{1}{k_m^2} \left[\left(\frac{\pi m_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi m_y}{l_y}\right)^2 \right] \sin\left(\frac{\pi m_x x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m_y y}{l_y}\right) \cos\left(\frac{\pi m_z z}{l_z}\right) - \\ &- \mathbf{a}_x \frac{\pi m_z}{l_z k_m^2} \frac{\pi m_x}{l_x} \cos\left(\frac{\pi m_x x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi m_y y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi m_z z}{l_z}\right) - \\ &- \mathbf{a}_y \frac{\pi m_z}{l_z k_m^2} \frac{\pi m_y}{l_y} \sin\left(\frac{\pi m_x x}{l_x}\right) \cos\left(\frac{\pi m_y y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi m_z z}{l_z}\right), \end{aligned}$$

где для \mathbf{M}_m $m_z > 0$, а m_x и m_y не могут одновременно обращаться в нуль; для \mathbf{N}_m m_z может равняться нулю, а m_x и m_y оба должны быть отличны от нуля.

Функции обоих типов удовлетворяют одному и тому же уравнению: $\text{rot rot } \mathbf{M}_m = k_m^2 \mathbf{M}_m$ и $\text{rot rot } \mathbf{N}_m = k_m^2 \mathbf{N}_m$. Они не полностью симметричны, а «оказывают предпочтение» оси z , поскольку они образованы умножением на \mathbf{a}_z скалярных решений уравнения Гельмгольца. Однако эти функции составляют полную систему векторных собственных функций данной области, и их удобно использовать, когда граничные условия выделяют зависимость от z . Другая полностью эквивалентная система получается умножением \mathbf{a}_x на скалярные волновые решения, а третья — умножением \mathbf{a}_y на другие функции. Однако будет показано, что любая из функций двух последних систем является простой линейной комбинацией функций системы (13.3.28), так что достаточно лишь одной системы из трех; какую из трех выбрать, зависит от граничных условий.

Отметим, что решения для прямоугольных областей являются вырожденными в том смысле, что M_m и N_m соответствуют одни и те же собственные частоты $\omega_m/2\pi$ (это, вообще говоря, не имеет места для областей другой формы). Функции этих систем, конечно, взаимно ортогональны. Нормирующие константы равны

$$\int_0^{l_x} dx \int_0^{l_y} dy \int_0^l |M_m|^2 dz = \int_0^{l_x} dx \int_0^{l_y} dy \int_0^{l_z} |N_m|^2 dz = \\ = \frac{l_x l_y l_z}{\varepsilon_{m_x} \varepsilon_{m_y} \varepsilon_{m_z} k_m^2} \left[\left(\frac{\pi m_x}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{\pi m_y}{l_y} \right)^2 \right] = \left[1 - \left(\frac{\pi m_z}{l_z k_m} \right)^2 \right] \Lambda_m.$$

Как и для других собственных решений в ограниченных областях, функция Грина при вынуждающей частоте $\omega/2\pi = kc/2\pi$ может быть записана в двух видах. Во-первых, в виде симметричной суммы

$$\mathcal{G}(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) = \sum_m \frac{4\pi k_m^2 \Lambda_m}{(k_m^2 - k^2) [k_m^2 - (\pi m_z/l_z)^2]} [M_m(\mathbf{r}_0) M_m(\mathbf{r}) + N_m(\mathbf{r}_0) N_m(\mathbf{r})]. \quad (13.3.46)$$

Эта формула удобна для расчета многих задач о вынужденных колебаниях. Другой вид получается из формулы (13.3.14) для полной аффинорной функции Грина для волновода. В рассматриваемом случае функция f отличается от функции g , так как введено дополнительное граничное условие равенства нулю E_t при $z=0$ и $z=l_z$. Имеем

$$f_{mn} = \frac{1}{K_{mn} \sin(K_{mn} l_z)} \begin{cases} \sin(K_{mn} z) \sin[K_{mn}(l_z - z_0)] & \text{при } z < z_0, \\ \sin(K_{mn} z_0) \sin[K_{mn}(l_z - z)] & \text{при } z > z_0 \end{cases}$$

и

$$g_{mn} = \frac{-1}{K_{mn} \sin(K_{mn} l_z)} \begin{cases} \cos(K_{mn} z) \cos[K_{mn}(l_z - z_0)] & \text{при } z < z_0, \\ \cos(K_{mn} z_0) \cos[K_{mn}(l_z - z)] & \text{при } z > z_0, \end{cases}$$

где $K_{mn}^2 = k^2 - k_{mn}^2$. (При $k_{mn} > k$ K_{mn} будет положительным и мнимым.) В этом случае полная аффинорная функция Грина имеет вид

$$\mathcal{G} = 4\pi \sum_{m,n} \frac{1}{k_{mn}^2 \Lambda_{mn}} \{ [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \phi_{mn}(\mathbf{r}_0)] [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \phi_{mn}(\mathbf{r})] f_{mn} + \\ + k_{mn}^2 \mathbf{a}_z \chi_{mn}(\mathbf{r}_0) \mathbf{a}_z \chi_{mn}(\mathbf{r}) g_{mn} + \text{grad } \chi_{mn}(\mathbf{r}_0) \text{grad } \chi_{mn}(\mathbf{r}) f_{mn} \}. \quad (13.3.47)$$

Это выражение эквивалентно ряду (13.3.46) плюс продольная часть. Этот ряд также «выделяет» ось z ; эквивалентный ряд можно получить циклической перестановкой x , y и z в приведенной формуле.

Потери энергии в стенках, Q полости. В случае резонаторов, так же как и в случае бесконечных волноводов, конечная проводимость стенок вызывает потери энергии. В случае резонаторов это сказывается в затухании колебаний не по координатам вдоль трубы, а во времени. Обычной количественной характеристикой затухания колебаний является « Q системы»¹⁾ — число периодов, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e^π раз (для простого контура $Q = \omega L/R$). Другими словами, экспоненциальный множитель определяющий затухание амплитуды, равен $e^{-\omega t/2Q}$, а множитель, определяющий затухание средней плотности энергии волны, равен $e^{-\omega t/Q}$. Чем больше Q , тем меньше потери энергии и острее резонансная кривая вблизи резонансной частоты.

¹⁾ «Добротность системы». — Прим. ред.

Обращаясь к выводу формулы (13.3.17), мы видим, что уравнение для Q получается приравнением ω/Q отношению потерь энергии в стенках к полной энергии поля, интегралу от $(E^2 + H^2)/8\pi$ по объему всей области. Поэтому в обозначениях формулы (13.3.17) мы имеем

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\pi\omega\sigma}{\mu c^2}} \frac{\iiint_V (|E|^2 + |H|^2) dv}{\iint_S |H_t|^2 dA}. \quad (13.3.48)$$

Поскольку величина Q безразмерна, величина $\sqrt{\mu c^2/8\pi\sigma\omega}$ имеет размерность длины; это — среднее расстояние, на которое поле проникает внутрь проводящей поверхности. Оно называется *глубиной скин-слоя* проводника.

Для цилиндрической полости, ограниченной при $z=0$ и $z=l_z$, с поперечным сечением, соответствующим любой из разделяющих цилиндрических систем координат, стоячие волны типа M имеют вид

$$M_m = -\frac{1}{k_m} [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \psi_m(x, y)] \sin(\pi m_z z / l_z) = \frac{\mathbf{E}}{ik_m},$$

где ψ — решение уравнения $\nabla_{xy}^2 \psi_m + \left[k_m^2 - \left(\frac{m_z \pi}{l_z} \right)^2 \right] \psi_m = 0$, нормальная производная которого на границе равна нулю. Соответствующее поле равно

$$\mathbf{H} = \frac{1}{k_m} \left\{ \mathbf{a}_z \left[k_m^2 - \left(\frac{\pi m_z}{l_z} \right)^2 \right] \psi_m \sin \left(\frac{\pi m_z z}{l_z} \right) + \frac{\pi m_z}{l_z} \text{grad } \psi_m \cos \left(\frac{\pi m_z z}{l_z} \right) \right\}$$

и

$$\iiint_V E^2 dv = \iiint_V H^2 dv = \frac{1}{2} l_z \left[k_m^2 - \left(\frac{\pi m_z}{l_z} \right)^2 \right] \Lambda_m,$$

где

$$\Lambda_m = \iint_S |\psi_m|^2 dx dy,$$

так что числитель в формуле (13.3.48) как раз вдвое больше этого выражения.

Касательная составляющая \mathbf{H}_t на части границы полости, параллельной оси z , имеет z -компоненту $(1/k_m) [k_m^2 - (m_z \pi / l_z)^2] \psi_m \sin(m_z \pi z / l_z)$, где ψ_m берется на границе, и ортогональную ей компоненту $(m_z \pi / k_m l_z) (\partial \psi_m / \partial s) \times \cos(m_z \pi z / l_z)$, где $\partial \psi_m / \partial s$ — касательная составляющая $\text{grad } \psi_m$ на границе. Касательная составляющая \mathbf{H} на граничных плоскостях $z=0$ и $z=l_z$ равна $(m_z \pi / k_m l_z) \text{grad } \psi_m$ и $(-1)^{m_z} (m_z \pi / k_m l_z) \text{grad } \psi_m$ соответственно. Поэтому интеграл от $|\mathbf{H}_t|^2$ по поверхности полости в случае волны типа M равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} l_z \left\{ \frac{1}{k_m^2} \left[k_m^2 - \left(\frac{m_z \pi}{l_z} \right)^2 \right]^2 \oint |\psi_m|^2 ds + \left(\frac{m_z \pi}{k_m l_z} \right)^2 \oint \left| \frac{\partial \psi_m}{\partial s} \right|^2 ds \right\} + \\ + \left(\frac{m_z \pi}{k_m l_z} \right)^2 \left[k_m^2 - \left(\frac{m_z \pi}{l_z} \right)^2 \right] \Lambda_m, \end{aligned}$$

где интегрирование производится по периметру поперечного сечения. Следовательно, значение Q для m -й поперечно-электрической гармонике равно

$$\begin{aligned} Q_{em} = \Lambda_m \sqrt{\frac{8\pi\omega\sigma}{\mu c^2}} \left\{ \left(\frac{m_z \pi}{k_m l_z} \right)^2 \Lambda_m + \left[1 - \left(\frac{m_z \pi}{k_m l_z} \right)^2 \right] \oint |\psi_m|^2 ds + \right. \\ \left. + \left(\frac{m_z \pi}{k_m l_z} \right)^2 \left[1 - \left(\frac{m_z \pi}{k_m l_z} \right)^2 \right]^{-1} \oint \left| \frac{\partial \psi_m}{\partial s} \right|^2 ds \right\}^{-1}. \quad (13.3.49) \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления дают значение Q для m -й поперечно-магнитной гармоники

$$N_m = \frac{1}{k_m^2} \left\{ \mathbf{a}_z \left[k_m^2 - \left(\frac{m_z \pi}{l_z} \right)^2 \right] \chi_m \cos \left(\frac{m_z \pi}{l_z} z \right) - \frac{m_z \pi}{l_z} \text{grad } \chi_m \sin \left(\frac{m_z \pi}{l_z} z \right) \right\} = \frac{E}{ik_m},$$

магнитное поле которой

$$\mathbf{H} = -[\mathbf{a}_z \times \text{grad } \chi_m] \cos \left(\frac{\pi m_z}{l_z} z \right),$$

где χ_m — решение двумерного уравнения Гельмгольца, обращающееся в нуль на контуре поперечного сечения. В результате вычислений получим

$$Q_{hm} = \frac{(1/2) l_z \sqrt{8\pi\omega\sigma/\mu c^2}}{1 + (l_z/2k_m^2 \Lambda_m) [1 - (\pi m_z/k_m l_z)^2]^{-1} \oint |\partial \chi_m / \partial n|^2 ds} \quad (13.3.50)$$

Несколько ниже будет рассчитана чувствительность резонатора к внешнему возбуждению. При использовании функции Грина в форме (13.3.46) различные члены имеют резонансные знаменатели $k_m^2 - k^2$, обращающиеся в нуль при частоте возбуждения $\omega/2\pi$, совпадающей с резонансной частотой $\omega_m/2\pi = k_m c/2\pi$ (в приближении, предполагающем идеальную проводимость стенок). Проведенные вычисления Q показывают, что при большой, но конечной проводимости стенок эти резонансные знаменатели переходят в

$$\begin{aligned} k_m^2 [1 - (i/2Q_{em})]^2 - k^2 & \quad \text{в случае волн } M_m, \\ k_m^2 [1 - (i/2Q_{hm})]^2 - k^2 & \quad \text{в случае волн } N_m, \end{aligned} \quad (13.3.51)$$

с точностью до первого порядка относительно малой величины $\sqrt{\mu c^2/8\pi\omega\sigma}$. Величина, обратная этим множителям, не обращается в бесконечность при $k \rightarrow k_m$, а достигает максимальных значений iQ_{em}/k_m^2 или iQ_{hm}/k_m^2 при $k = k_m \sqrt{1 - (1/2Q_{em})^2}$ или $k = k_m \sqrt{1 - (1/2Q_{hm})^2}$ соответственно.

Другое выражение функции Грина также содержит резонансные множители, которые вблизи резонанса приблизительно равны $A/(k_m^2 - k^2)$. Чтобы учесть влияние конечной проводимости стенок в первом приближении по $1/Q$, эти множители также надо заменить на $A/\{k_m^2 [1 - i/2Q_m]^2 - k^2\}$.

Возбуждение резонатора током. В качестве первого примера вынужденных колебаний электромагнитного резонатора рассмотрим возбуждение прямоугольной полости со сторонами l_x, l_y, l_z [стоячие волны в которой определяются по формуле (13.3.45)] при помощи тока $\mathbf{a}_x I e^{-i\omega t}$, который течет по проводу шириной Δ_y , параллельному оси x и отстоящему на Δ_z от центра стенки $z=0$. (Другими словами, провод лежит между прямыми $z = \Delta_z$, $y = l_y/2 - \Delta_y/2$ и $z = \Delta_z$, $y = l_y/2 + \Delta_y/2$.) Такой ток не может возбудить колебание типа N , поскольку ни одна из волн N не имеет постоянной компоненты по оси x , тогда как волны M при $m_x = 0$ обладают таким свойством. Поэтому, используя функцию Грина из (13.3.46), достаточно взять лишь волны типа M , для которых $m_x = 0$, а m_y нечетно. (Чтобы упростить обозначения, мы в этом пункте положим $m_y = 2m + 1$ и $m_z = n$.)

Тогда выражение для вынужденных колебаний в резонаторе можно получить из выражения (13.1.52), где Q равно $\mathbf{a}_x \delta(z - \Delta_z) I e^{-i\omega t}/c \Delta_y$ для $l_y/2 - \Delta_y/2 < y < l_y/2 + \Delta_y/2$ и нулю для других значений y . При этом все поверхностные интегралы равны нулю, поскольку мы начали с предполо-

жения, что стенки резонатора идеально проводящие. Выражение для векторного потенциала имеет вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \sum_{m, n} \frac{16\pi k_{mn}^2 / l_x l_y l_z}{(k_{mn}^2 - k^2) [\pi (2m+1)/l_y]^2} \mathbf{M}_{mn}(\mathbf{r}) \times \\
 &\times \frac{I}{c \Delta_y} \int_0^{l_x} dx_0 \int_{l_y/2 - \Delta_y/2}^{l_y/2 + \Delta_y/2} dy_0 \int_0^{l_z} dz_0 \delta(z_0 - \Delta_z) \mathbf{M}_{mn}(\mathbf{r}_0) dz_0 \cdot \mathbf{a} = \\
 &= \frac{16\pi I a_x}{c l_y l_z} \sum_{m, n} (-1)^m \frac{\sin(\pi n \Delta_z / l_z)}{k_{mn}^2 - k^2} \frac{2l_y}{\pi (2m+1) \Delta_y} \times \\
 &\times \sin \left[\frac{\pi (2m+1) \Delta_y}{2l_y} \right] \sin \left[\frac{\pi (2m+1) y}{l_y} \right] \sin \left[\frac{\pi n z}{l_z} \right] e^{-i\omega t}, \quad (13.3.52)
 \end{aligned}$$

где

$$k_{mn}^2 = [\pi (2m+1)/l_y]^2 + [\pi n/l_z]^2.$$

Вблизи резонанса, когда всеми членами, за исключением резонирующего, можно пренебречь, этот ряд представляет удобную форму решения. Например, для ω , близкой к ck_{mn} , напряжение $l_x E$, противоположное току в проводе, равно

$$V = \frac{16\pi I l_x}{l_y l_z} \left(\frac{\pi n \Delta_z}{l_z} \right)^2 \frac{i\omega}{\omega^2 - c^2 k_{mn}^2 [1 - (i/2Q_{emn})]^2}, \quad (13.3.53)$$

где в знаменатель включен член с Q и где принято, что $\Delta_z \ll l_z/n$ и $\Delta_y \ll l_y/(2m+1)$. Вблизи этой резонансной частоты возбуждающий ток эквивалентен току в цепи параллельно соединенных активного сопротивления R_{mn} , индуктивности L_{mn} и емкости C_{mn} , где

$$\begin{aligned}
 C_{mn} &= \frac{l_y l_z}{16\pi l_x} \left(\frac{l_z}{\pi l \Delta_z} \right)^2, & L_{mn} &= \frac{16\pi l_x}{c^2 k_{mn}^2 l_y l_z} \left(\frac{\pi l \Delta_z}{l_z} \right)^2, \\
 R_{mn} &= \frac{16\pi l_x Q_{emn}}{c k_{mn} l_y l_z} \left(\frac{\pi l \Delta_z}{l_z} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Однако для вычисления реактивного напряжения при частоте, далекой от резонанса, лучше использовать другую форму функции Грина, а именно данную в (13.3.47). Здесь опять лишь члены в $\mathbf{a}_z \times \text{grad} \psi_{mn}$ отличны от нуля, причем только те, у которых $m=0$ и n нечетно. При $k < 2\pi/l_y$, когда (при $n > 0$) $\sqrt{[\pi (2n+1)/l_y]^2 - k^2} \simeq \pi (2n+1)/l_y$, можно из суммы выделить первый член, содержащий резонансный знаменатель (для низких частот). Остальные члены воспроизводят концентрацию поля у провода и стремятся уменьшить связь между током и полем в резонаторе. Интегрирование функции Грина дает

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &\simeq \mathbf{a}_x \frac{8\pi I \Delta_z}{c l_y} \left\{ \sin \left(\frac{\pi y}{l_y} \right) \cos \left[z \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{l_y} \right)^2} \right] - \right. \\
 &\quad \left. - \sin \left(\frac{\pi y}{l_y} \right) \frac{\sin \left[z \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{l_y} \right)^2} \right]}{\text{tg} \left[l_z \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{l_y} \right)^2} \right]} \right\} + \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{sh} \left[\frac{\pi (2n+1) \Delta_z / l_z}{\left[\pi (2n+1) \Delta_z / l_z \right]} \right] \sin \left[\frac{\pi (2n+1) \Delta_y / 2l_y}{\left[\pi (2n+1) \Delta_y / 2l_y \right]} \right]}{\text{sh} \left[\frac{\pi (2n+1) (l_z - z) / l_y}{\left[\pi (2n+1) l_z / l_y \right]} \right] \sin \left[\frac{\pi (2n+1) y / l_y}{\left[\pi (2n+1) l_z / l_y \right]} \right]} \left. \right\}. \quad (13.3.54)
 \end{aligned}$$

Это выражение не похоже на формулу (13.3.52), однако оно эквивалентно ей. Резонансным является член, содержащий тангенс. Величина k ограничена, но и при этом член, содержащий тангенс, обращается в бесконечность при $\sqrt{k^2 - (\pi/l_y)^2} = \pi/l_z$, т. е. при $k^2 = k_{01}^2$ в обозначениях, принятых в (13.3.52). Разложение по k вблизи k_{01} показывает, что этот член аналогичен первому члену в формуле (13.3.52).

Обратная электродвижущая сила в проводе для этих значений k равна

$$V \simeq \frac{8\pi I_x \Delta_z}{l_y} \left\{ i\omega - i\omega \Delta_z \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{l_y}\right)^2} \operatorname{ctg} \left[l_z \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{l_y}\right)^2} \right] + \right. \\ \left. + i\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin [\pi (2n+1) \Delta_y / 2l_y]}{[\pi (2n+1) \Delta_y / 2l_y]} \frac{[1 - e^{-2\pi (2n+1) \Delta_z / l_z}]}{[2\pi (2n+1) \Delta_z / l_z]} \right\} e^{-i\omega t},$$

где принято, что Δ_y и Δ_z малы по сравнению с l_y/π и l_z/π соответственно, но l_z/l_y достаточно велико, так что

$$\frac{\operatorname{sh} [(2n+1) \pi (l_z - z) / l_y]}{\operatorname{sh} [(2n+1) \pi l_z / l_y]} \simeq e^{-(2n+1) \pi z / l_y}.$$

При $\Delta_y \geq 0, 1l_y$ и $\Delta_z \geq 0, 1l_z$ ряд достаточно быстро сходится и можно ограничиться несколькими первыми членами. Но если все Δ малы, то нужно взять большое число членов и приближенный результат можно получить интегрированием. Мы видим, что

$$\sum_{n=\alpha}^{\infty} \frac{\sin [\pi (2n+1) \Delta_y / 2l_y]}{(2n+1)^2} e^{-2\pi (2n+1) \Delta_z / l_z} \simeq \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin (\pi x \Delta_y / l_y)}{x^2} e^{-4\pi x \Delta_z / l_z} dx = \\ = \operatorname{Im} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{x^2} \exp \left[\left(\frac{i\pi \Delta_y}{l_y} - \frac{4\pi \Delta_z}{l_z} \right) x \right] dx = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\alpha} \exp \left[\left(\frac{i\pi \Delta_y}{l_y} - \frac{4\pi \Delta_z}{l_z} \right) \alpha \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{i\pi \Delta_y}{l_y} - \frac{4\pi \Delta_z}{l_z} \right) \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{x} \exp \left[\left(\frac{i\pi \Delta_y}{l_y} - \frac{4\pi \Delta_z}{l_z} \right) x \right] dx \right\}.$$

Поэтому, беря разность этого выражения и выражения с $\Delta_z = 0$ и затем устремляя α к нулю, получаем

$$V \simeq i\omega (8\pi I_x \Delta_z / l_y) \left\{ 1 - \Delta_z \sqrt{k^2 - (\pi/l_y)^2} \operatorname{ctg} [l_z \sqrt{k^2 - (\pi/l_y)^2}] + \right. \\ \left. + \frac{l_z}{8\pi \Delta_z} \ln \left[1 - \frac{4l_y \Delta_z}{l_z \Delta_y} \right] - \frac{l_y}{\pi \Delta_y} \operatorname{arctg} \left[\frac{4l_y \Delta_z}{l_z \Delta_y} \right] \right\}. \quad (13.3.55)$$

Таким образом, для тех значений ω , для которых

$$0 < k < \frac{3}{2} \pi \sqrt{\left(\frac{1}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{1}{l_z}\right)^2},$$

получено явное выражение для V и импеданса V/I , которое является приемлемым в этой области частот, но не вблизи резонанса. Поскольку сумма в (13.3.54) берется по одному индексу, вычисление ее проще, чем вычисление двойного ряда (13.3.52).

Возбуждение при помощи волновода. Пусть резонатор связан с генератором при помощи волновода, соединенного с резонатором на входе $z = 0$, причем волновод и резонатор имеют параллельные и прямоугольные поперечные сечения. Предположим, что поперечные размеры волновода

a и b значительно меньше, чем поперечные размеры l_x и l_y резонатора, и что центр поперечного сечения волновода в плоскости стыка $z=0$ имеет координаты $x=x_1$ и $y=y_1$. Начало координат x, y, z для резонатора находится в одном из его углов. Внутри волновода удобно ввести координаты $\xi = x - x_1$, $\eta = y - y_1$ и z (считая центр поперечного сечения стыка за начало координат).

Если волновод возбуждается так, что распространяется лишь наименьшая поперечно-электрическая гармоника (\mathbf{E} вдоль \mathbf{a}_x при $b > a$), то касательная составляющая электрического поля в плоскости поперечного сечения стыка приблизительно равна (см. рассмотрения на стр. 768)

$$\mathbf{E}_t \simeq ik\mathbf{A}_t = \mathbf{a}_x \frac{E_0 \cos(\pi\eta/b)}{[1 - (2\xi/a)^2]} e^{-i\omega t}, \quad 0 < |\xi| < \frac{1}{2}a, \quad 0 < |\eta| < \frac{1}{2}b, \\ \pi/b < k < \pi/a. \quad (13.3.56)$$

Для подсчета поля внутри резонатора используем функцию Грина в форме (13.3.47) и (13.1.10).

При этом в формуле (13.1.10) \mathbf{Q} надо считать равным нулю, так как в полости резонатора нет ни токов, ни зарядов. Аналогично $\text{div } \mathbf{F}$ всюду равна нулю, так что первый член в поверхностном интеграле обращается в нуль. Нетрудно показать, что для функции Грина \mathcal{G} , определяемой формулой (13.3.47), $\text{div}_0 \mathcal{G}$ равна нулю в плоскости $z=0$, а на боковой поверхности нормальна к ней (и поэтому ортогональна к $\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{F}$). Следовательно, второй и третий члены в поверхностном интеграле тоже обращаются в нуль и

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi ik} \iint (\text{rot}_0 \mathcal{G}) \cdot [\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_t] dx_0 dy_0.$$

Но для прямоугольной полости ($\Lambda_{mn} = l_x l_y / \varepsilon_m \varepsilon_n$) $\text{rot } \mathcal{G}$ по координатам x_0 при $z_0 = 0$ равен

$$(\text{rot}_0 \mathcal{G})_{z_0=0} = 4\pi \sum_{m,n} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{k_{mn}^2 l_x l_y} \left\{ [-\mathbf{a}_z \times \text{grad } \psi_{mn}] \text{grad}_0 (\psi_{mn}^0) \frac{\sin [K_{mn}(l_z - z)]}{\sin (K_{mn}l_z)} + \right. \\ \left. + [\mathbf{a}_z \times \text{grad}_0 \chi_{mn}^0] \frac{K_{mn}^2}{k_{mn}} \mathbf{a}_z \chi_{mn} \frac{\cos [K_{mn}(l_z - z)]}{\sin (K_{mn}l_z)} + \right. \\ \left. + [\mathbf{a}_z \times \text{grad}_0 \chi_{mn}^0] \text{grad } \chi_{mn} \frac{\sin [K_{mn}(l_z - z)]}{\sin (K_{mn}l_z)} \right\},$$

где индекс 0 означает, что функция зависит от координат x_0, y_0 . Так как

$$\mathbf{a}_z \times \mathbf{E}_t = \mathbf{a}_y E_t, \quad \psi_{mn} = \cos\left(\frac{m\pi}{l_x} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{l_y} y\right) \text{ и } \chi_{mn} = \sin\left(\frac{m\pi}{l_x} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{l_y} y\right),$$

то для поля внутри резонатора получим выражение

$$\mathbf{A} = \frac{1}{ik} \sum_{m,n} \frac{\varepsilon_m \varepsilon_n}{k_{mn}^2 l_x l_y} \left\{ \frac{\pi n}{l_y} [\mathbf{a}_z \times \text{grad } \psi_{mn}] \frac{\sin [K_{mn}(l_z - z)]}{\sin (K_{mn}l_z)} + \right. \\ \left. + \frac{\pi m}{K_{mn}} \left[\frac{k_{mn}^2}{K_{mn}} \mathbf{a}_z \chi_{mn} \frac{\cos [K_{mn}(l_z - z)]}{\sin (K_{mn}l_z)} + \text{grad } \chi_{mn} \frac{\sin [K_{mn}(l_z - z)]}{\sin (K_{mn}l_z)} \right] \right\} \times \\ \times \iint E_t \cos\left(\frac{\pi m x_0}{l_x}\right) \sin\left(\frac{\pi n y_0}{l_y}\right) e^{-i\omega t} dx_0 dy_0.$$

Интеграл в этом выражении переходит в

$$\frac{2ab}{\pi} E_0 \frac{\sin(\pi n y_1 / l_y) \cos(\pi n b / 2 l_y)}{1 - (nb / l_y)^2} \cos\left(\frac{\pi m x_1}{l}\right) B_m\left(\frac{a}{l_x}\right),$$

где (см. стр. 420)

$$B_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(7/6)}, \quad B_m \left(\frac{a}{l_{x1}} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2/3)}{(\pi m a / 4 l_x)^{1/6}} J_{1/6} \left(\frac{\pi m a}{2 l_x} \right), \quad m > 0.$$

Окончательно y -компонента \mathbf{H} в центре стыка ($x = x_1$, $y = y_1$, $z = 0$) равна

$$\begin{aligned} H_y^+ &= \frac{4iabE_0}{\pi l_x l_y} \sum_{m, n} \frac{\varepsilon_m B_m \cos(\pi n b / 2l_y)}{\sqrt{1 - (\pi m / kl_x)^2 - (\pi n / kl_y)^2}} \frac{1 - (\pi n / kl_y)^2}{1 - (nb / l_y)^2} \times \\ &\times \cos^2 \left(\frac{\pi m x_1}{l_x} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi n y_1}{l_y} \right) \operatorname{ctg} \left[l_z \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{l_y} \right)^2 - \left(\frac{n\pi}{l_y} \right)^2} \right] e^{-i\omega t} = \\ &= - (4\pi E_0 / c) Y_r, \end{aligned} \quad (13.3.57)$$

где Y_r — проводимость резонатора по отношению к волноводу. Член с номером (m, n) в этом выражении стремится к бесконечности при $k^2 \rightarrow (m\pi/l_x)^2 + (n\pi/l_y)^2 + (s\pi/l_z)^2$ ($s = 0, 1, \dots$) (за исключением членов, соответствующих $m = s = 0$, $n > 0$, $k \rightarrow n\pi/l_y$). Этим, конечно, определяются резонансные частоты резонатора.

Поле волновода состоит из падающей на стык волны с индексами $m = 0$ и $n = 1$ и последовательности отраженных волн с индексами $n = 1$ и любым четным m . При этом тангенциальная составляющая поля при $z = 0$ соответствует выражению, определенному формулой (13.3.56),

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{a}_r \times \operatorname{grad} \cos \left(\frac{\pi \eta}{b} \right) \left\{ e^{iK_0 z} - \left[1 + \frac{E_0 b}{i\pi k} B_0 \right] e^{-iK_0 z} \right\} e^{-i\omega t} - \\ &- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2E_0 B_{2m}(1)}{ik k_{2m,1}^2} \left\{ \frac{\pi}{b} \mathbf{a}_z \times \operatorname{grad} \psi_{2m,1}^- - \frac{2\pi m}{a} \operatorname{grad} \chi_{2m,1}^- - \right. \\ &\quad \left. - i \frac{2\pi m k_{2m,1}^2}{a K_{2m,1}} \mathbf{a}_z \chi_{2m,1}^- \right\} e^{-iK_{2m,1} z - i\omega t}, \end{aligned} \quad (13.3.58)$$

где $k_{2m,1}^2 = (2m\pi/a)^2 + (\pi/b)^2$, $\psi_{2m,1}^- = \cos(2m\pi\xi/a) \sin(\pi\eta/b)$ и $\chi_{2m,1}^- = \sin(2m\pi\xi/a) \cos(\pi\eta/b)$, а постоянные B — те же, что и раньше, с 1 вместо a/l_x . Компонента поля \mathbf{H} по оси y при $\xi = \eta = z = 0$ в этом случае равна

$$\begin{aligned} H_y^- &= - \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{b} \right)^2} \left[2i \frac{\pi}{b} + \frac{E_0}{k} B_0 \right] - \\ &- 2 \frac{E_0}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}(1)}{\sqrt{k^2 - k_{2m,1}^2}} \left[k^2 - \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right] \simeq \\ &\simeq - \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi}{b} \right)^2} \left[2i \frac{\pi}{b} + \frac{E_0}{k} B_0 \right] - \\ &- i E_0 \frac{a}{2\pi k} \left[k^2 - \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \right] (B_0 - 1) \ln 4. \end{aligned} \quad (13.3.59)$$

Приближенное значение E_0 напряженности электрического поля в центре стыка получается приравнением H_y и H_y^+ , поскольку обе эти величины определяют напряженность магнитного поля в центре стыка при единичной амплитуде падающей из волновода волны. Формула (13.3.58) означает, что амплитуда отраженной волны равна

$$- \left[1 + E_0 \frac{b B_0}{i\pi k} \right] = R_{e01} = \frac{Y_{e01} + (1/B_0)(Y_r + Y_0)}{Y_{e01} - (1/B_0)(Y_r + Y_0)}, \quad (13.3.60)$$

где

$$Y_{e01} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{kb}\right)^2}, \quad B_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \left[\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) / \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \right],$$

$$Y_0 = -i\omega \frac{a}{8\pi^2} \left[1 - \left(\frac{\pi}{kb}\right)^2 \right] (B_0 - 1) \ln 4,$$

а Y_r определяется формулой (13.3.57). Это выражение надо сравнить с формулой (13.3.24) для отражения поперечно-электрической волны от конца трубы. Величина Y_{e01} является проводимостью волны с номером (0,1) в волноводе, Y_0 — проводимость самого стыка и Y_r — проводимость резонатора. Формула для R означает, что волновод заканчивается параллельно соединенными проводимостями Y_r и Y_0 , связанными с волноводом константой связи $1/B_0$.

Отметим, что поскольку и Y_0 и Y_r являются чисто реактивными (H_y^*/E_0 чисто мнимое), в то время как Y_{e01} — действительное при k , больших π/b , амплитуда R отраженной волны равна единице для частот возбуждения выше критической. Это неудивительно, так как в выражении для Y_r еще не учтено поглощение энергии. Тем самым вся падающая на резонатор энергия должна отражаться обратно в волновод. При $Y_r = -Y_0$ отражение происходит без изменения фазы; при $Y_r = \infty$ отраженная волна смещена по фазе на 180° .

Электрическая напряженность в центре стыка при единичной амплитуде падающей волны (E в падающей волне = 1 в центре волновода) равна

$$\frac{bE_0}{i\pi k} = - \frac{2Y_{e01}}{B_0 Y_{e01} - Y_0 - Y_r}.$$

Это выражение никогда не может обращаться в бесконечность, так как Y_{e01} действительно, а Y_0 и Y_r — чисто мнимые, но может равняться нулю при бесконечной проводимости резонатора Y_r , что имеет место при совпадении частоты падающей волны с одной из резонансных частот полости резонатора. В этом случае стык ведет себя так, как будто он закрыт идеально проводящим экраном.

Резонансные частоты полости клистрона. Для расчета клистронов известный интерес представляет рассмотрение полости, получающейся при вращении вокруг центральной линии фигуры, изображенной на рис. 13.6. В этом случае наименьшей гармоникой является поперечно-магнитная волна, при которой свободные заряды располагаются на сторонах щели Δ , ток колеблется вдоль цилиндра радиуса b , а магнитные силовые линии окружают внутренний цилиндр. Для подсчета этой гармоники и ее резонансной частоты надо рассчитать поле в области внутри щели ($r < b$, $z < \Delta$) и в области вне щели ($b < r < a$, $z < l_z$), а затем осуществить сопряжение этих полей по кольцевой поверхности ($r = b$, $z < \Delta$). Условие сопряжения и определит допустимые частоты.

Для Δ , малых по сравнению с b , поле при $r = b$ имеет почти полностью статическую структуру у «угла» $r = b$, $z = \Delta$

$$E_z \simeq \{E_0/[1 - (z/\Delta)^2]^{1/2}\} e^{-i\omega t}, \quad r = b, \quad 0 < z < \Delta. \quad (13.3.64)$$

Для поперечно-магнитного поля в качестве векторного потенциала используется функция $\mathbf{N} = (1/k^2) \text{rot rot}(\mathbf{a}_z \chi) e^{-ikct}$, где χ удовлетворяет граничному условию равенства нулю нормальной производной на плоских границах, ортогональных z , и обращается в нуль на цилиндрических границах, нормальных r (и, конечно, удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \chi + k^2 \chi = 0$).

В области внутри щели ($r \leq b$, $0 \leq z \leq \Delta$) надо использовать лишь функции Бесселя 1-го рода, ограниченные при $r = 0$. В рассматриваемом случае интерес представляют лишь аксиально симметричные гармоники,

для которых χ не зависит от полярного угла φ . Следовательно, χ является комбинацией функций

$$\cos(\pi m z / \Delta) J_0(K_m r), \quad \text{где } K_m^2 = k^2 - (\pi m / \Delta)^2.$$

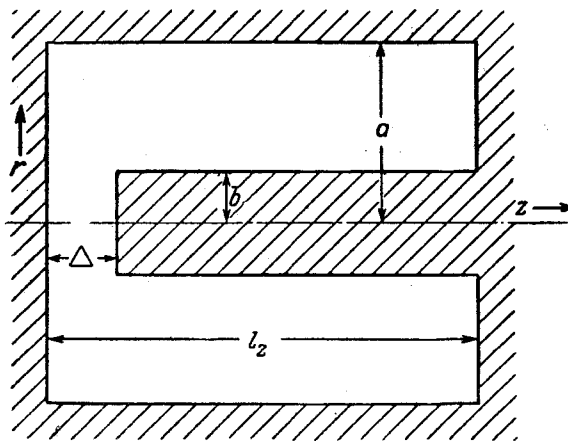


Рис. 13.6. Осевое поперечное сечение электромагнитного резонатора.

При Δ , значительно меньших, чем b или π/k , мы для $m > 0$ получим $K_m \simeq i\pi m / \Delta$ и

$$J_0(i\pi m r / \Delta) \simeq \sqrt{\Delta / 2\pi^2 m r} e^{\pi m r / \Delta}.$$

Поэтому при $0 < z < \Delta$, $0 < r < b$ имеем

$$\chi \simeq A_0 J_0(kr) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(\frac{m\pi z}{\Delta}\right) J_0\left(\frac{im\pi r}{\Delta}\right)$$

и

107

$$A \simeq \left\{ a_z A_0 J_0(kr) - a_z \frac{1}{k^2} \sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{\Delta}\right)^{3/2} A_m \cos\left(\frac{m\pi z}{\Delta}\right) e^{\pi m r / \Delta} - \right. \\ \left. - i a_r \frac{1}{k^2} \sqrt{\frac{1}{2\pi r}} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{\Delta}\right)^{3/2} A_m \sin\left(\frac{m\pi z}{\Delta}\right) e^{\pi m r / \Delta} \right\} e^{-i\omega t}.$$

Чтобы $E_z = ikA_z$ равнялось выражению (13.3.61) при $r = b$, должны иметь место равенства

$$A_0 = \frac{E_0 B_0}{ik J_0(kb)}, \quad A_m = 2ik \sqrt{2\pi r} E_0 B_{2m}(1) \left(\frac{\Delta}{\pi m}\right)^{3/2} e^{-\pi m b / \Delta},$$

где

$$B_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^{1/3} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(2/3)}{\Gamma(7/6)}$$

и

$$B_m(u) = \int_0^{\pi/2} \sin^{1/3} \varphi \cos\left(\frac{m\pi u \cos \varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(2/3)}{(m\pi u / 4)^{1/6}} J_{1/6}\left(\frac{m\pi u}{2}\right).$$

Магнитное поле внутри щели равно

$$\mathbf{H} = \left\{ \mathbf{a}_\varphi A_0 k J_1(kr) + i a_\varphi \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{\Delta} A_m J_1\left(\frac{im\pi r}{\Delta}\right) \cos\left(\frac{m\pi z}{\Delta}\right) \right\} e^{-i\omega t},$$

а при $z=0$, $r=b$ φ -компонента равна

$$\begin{aligned} H_\varphi^- &\simeq -iE_0 \left\{ B_0 \frac{J_1(kb)}{J_0(kb)} + 2k \int_0^{\pi/2} dz \sin^{1/3} z \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Delta}{\pi m} \cos(m\pi \cos \varphi) \right\} e^{-i\omega t} \simeq \\ &\simeq -iE_0 \left\{ B_0 \frac{J_1(kb)}{J_0(kb)} - 2k \frac{\Delta}{\pi} (B_0 - 1) \ln 2 \right\} e^{-i\omega t} \text{ при } r=b, z=0, \end{aligned}$$

что должно совпадать со значением \dot{H}_0 , полученным при расчете колебаний во внешней полости.

Выражение для χ во внешней области имеет вид

$$\chi = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \cos\left(\frac{m\pi}{l_z} z\right) [N_0(k_m a) J_0(k_m r) - N_0(k_m r) J_0(k_m a)],$$

где $k_m^2 = k^2 - (\pi m/l_z)^2$. Это выражение автоматически обращается в нуль при $r=a$; значения C надо выбрать так, чтобы χ равнялось нулю при $r=b$, за исключением области $0 < z < \Delta$. Компонента \mathbf{E} по направлению z при $r=b$ равна

$$\begin{aligned} e^{-i\omega t} \left[\frac{i}{k} \text{rot rot}(\mathbf{a}_z \chi) \right]_z &= ik \sum_{m=0}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{m\pi}{kl_z} \right)^2 \right] C_m \cos\left(\frac{m\pi}{l_z} z\right) \times \\ &\times [N_0(k_m a) J_0(k_m b) - N_0(k_m b) J_0(k_m a)] e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

что должно равняться выражению (13.3.61) при $0 \leq z < \Delta$ и обращаться в нуль при $\Delta < z \leq l_z$. Это имеет место, если

$$C_m = \frac{\varepsilon_m \Delta}{ikl_z} \frac{E_0 B_{2m}(\Delta/l_z) [1 - (m\pi/kl_z)^2]}{N_0(k_m a) J_0(k_m b) - N_0(k_m b) J_0(k_m a)},$$

где величины $B_m(a)$ определены на стр. 420 и 790. Аналогично величина H_φ при $r=b$, $z=0$ равна

$$H_\varphi \simeq -\frac{ik\Delta E_0}{l_z} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m B_{2m}(\Delta/l_z)}{k_m} \left[\frac{N_0(k_m a) J_1(k_m b) - N_1(k_m b) J_0(k_m a)}{N_0(k_m a) J_0(k_m b) - N_0(k_m b) J_0(k_m a)} \right];$$

соответствующим выбором $k_m = \sqrt{k^2 - (\pi m/l_z)^2}$, а следовательно, k , ее нужно сделать равной величине H_φ^- , определенной ранее.

Первый член в H_φ^- не содержит множителя Δ , и если размеры щели Δ малы по сравнению с a , b и l_z , то этот первый член значительно больше второго. Следовательно, чтобы H_φ^+ равнялось H_φ^- , по крайней мере один член ряда для H_φ^+ должен быть достаточно большим. Это может иметь место, когда величина $N_0(k_m a) J_0(k_m b) - N_0(k_m b) J_0(k_m a)$ очень мала. Приравнявая это выражение нулю, получим корни

$$k_m = \frac{\pi \gamma_n}{a-b}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13.3.62)$$

При этом в области $a > b > 0,1a$, полагая $\gamma_n = n$, мы сделаем ошибку, не превышающую 3%. Следовательно, можно принять, что допустимые

резонансные частоты (для поперечно-магнитных гармоник) получаются при $k = k_{sn} + \delta_{sn}$, где

$$k_{sn}^2 = \left(\frac{\pi s}{l_z}\right)^2 + \left(\frac{\pi \gamma_n}{a-b}\right)^2 \simeq \left(\frac{\pi s}{l_z}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{a-b}\right)^2.$$

Для $\delta \ll k_{sn}$ члены ряда H_φ^+ , содержащие функции Бесселя и Неймана, при $m = s$ значительно больше остальных и приблизительно равны

$$\frac{\pi \gamma_n / k_{sn} (a-b)}{\delta_{sn} (b + a G_{sn})}, \text{ где } G_{sn} = \frac{J_0(k_s b) N_1(k_s a) - J_1(k_s a) N_0(k_s b)}{J_1(k_s b) N_0(k_s a) - J_0(k_s a) N_1(k_s b)}$$

и где k_s определяется по формуле (13.3.62). Окончательно, приравнявая H_φ^+ и H_φ^- , получим, что резонансные частоты приблизительно равны $kc/2\pi$, где

$$k \simeq \frac{m\pi}{l_z} + \frac{\Delta B_{2m} (\Delta/l_z) J_0(m\pi b/l_z)}{bl_z B_0 \ln(a/b) J_1(m\pi b/l_z)}, \quad n=0, \quad m > 0.$$

Для наименьшей гармоники k само мало и в выражении для H_φ^- можно воспользоваться разложением J_0 и J_1 в ряд. Это приводит к соотношению

$$k \simeq \sqrt{2\Delta/l_z b^2 \ln(a/b)}, \quad m = n = 0, \quad (13.3.63)$$

где резонансные частоты опять равны $kc/2\pi$. Если щель закрыта ($\Delta \rightarrow 0$), этот резонанс не имеет места и резонанс появляется при более высоких частотах, соответствующих кольцевой полости между цилиндрами $r = b$ и $r = a$ ($k = k_{mn}$). Можно считать, что наименьшая гармоника соответствует резонансу в контуре из последовательно соединенных индуктивности и емкости, причем емкость $b^2/4\Delta$ соответствует емкости щели, а индуктивность $(2l_z/c^2) \ln(a/b)$ — индуктивности кольцевой полости, так что

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{2\Delta}{l_z b^2 \ln(a/b)}}$$

в соответствии с формулой (13.3.63).

Здесь можно было бы рассмотреть также численные примеры расчета стоячих упругих волн в различных цилиндрических телах, однако те примеры, которые доводятся до конца, являются тривиальными, а в примерах, представляющих практический интерес, обычно невозможно дать точное решение из-за общей сложности граничных условий в случае колебаний упругой среды.

Рассеяние на цилиндре. Вместо этого будем рассматривать задачи, связанные с колебаниями вне цилиндра. Многие из этих задач можно решить незначительным обобщением скалярных формул. Например, задача рассеяния круговым цилиндром плоской электромагнитной волны, падающей нормально к оси цилиндра, может быть сведена к двум скалярным задачам для двух различных поляризаций волны. В случае электрической напряженности, параллельной оси цилиндра (оси z), используется очевидное разложение в цилиндрических координатах r, φ, z

$$\mathbf{a}_z e^{ikh} = \mathbf{a}_z \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{s}_m i^m \cos(m\varphi) J_m(kr); \quad (13.3.64)$$

при этом для другой поляризации имеем

$$\mathbf{a}_y e^{ikh} = \frac{i}{k} \text{rot}(\mathbf{a}_z e^{ikh}) = \frac{1}{ik} \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{s}_m i^m \mathbf{a}_z \times \text{grad}[\cos(m\varphi) J_m(kr)].$$

При идеально проводящей боковой поверхности цилиндра граничным условием для первого случая (\mathbf{E} вдоль z) является обращение в нуль амплитуды при $r = a$. В этом случае решение, согласно формуле (11.2.28), имеет вид

$$A_{\parallel} = \frac{a_z}{ik} \left\{ e^{ikx} - i \sum_m \varepsilon_m l^m e^{-i\delta m} \sin \delta_m H_m(kr) \cos m\varphi \right\} e^{-i\omega t}.$$

Углы δ определены на стр. 522.

С другой стороны, для второй поляризации (\mathbf{E} нормально \mathbf{a}_z) при идеальной проводимости боковой поверхности цилиндра касательная составляющая $\mathbf{a}_z \times \text{grad } \psi$ равняется нулю при $r = a$, если обращается в нуль нормальная производная скалярной функции ψ (через которую выражается решение). Поэтому

$$A_{\perp} = -\frac{1}{k^2} \mathbf{a}_z \times \text{grad} \left\{ e^{ikx} - i \sum_m \varepsilon_m l^m e^{-i\delta' m} \sin \delta'_m H_m(kr) \cos m\varphi \right\} e^{-i\omega t},$$

где углы δ' также определены на стр. 522. Следовательно, волны различной поляризации рассеиваются по-разному, что связано с разницей между фазовыми углами δ и δ' .

Если цилиндр обладает конечной проводимостью σ (обычно большой), некоторое количество энергии теряется на поверхности цилиндра. При этом можно говорить об эффективной ширине поглощения и эффективной ширине рассеяния, аналогично случаю, рассмотренному на стр. 455. Для параллельной поляризации касательная составляющая магнитного поля при $r = a$ равна

$$H_{\parallel\varphi} = \frac{2i}{\pi ka} \sum_m \varepsilon_m l^m \cos m\varphi \left[\frac{e^{-i\delta m}}{C_m(ka)} \right] e^{-i\omega t}.$$

Согласно выводу формулы (13.3.17), конечность проводимости не изменяет в первом приближении это магнитное поле, однако электрическое поле на поверхности имеет z -компоненту, равную $\sqrt{\mu\omega/4\pi\sigma} e^{-\pi i/4} H_{\parallel\varphi}$, а не нулю. Таким образом, энергия, поглощенная единицей длины цилиндра, равна

$$\frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} \int_0^{2\pi} |H_{\parallel\varphi}|^2 a d\varphi = \frac{2c}{\pi^2 k^2 a} \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} \sum_m \frac{\varepsilon_m}{C_m^2(ka)}.$$

Падающая волна имеет интенсивность $(c/4\pi) \text{Re} [\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}] = (c/4\pi) \mathbf{a}_x$, и отношение потери энергии к падающей интенсивности, *эффективная ширина поглощения цилиндра*, для электромагнитной волны равно

$$Q_a = \frac{8\tau_s}{\pi ka} \sum_m \frac{\varepsilon_m}{C_m^2(ka)},$$

где $\tau_s = \sqrt{\mu c^2/8\pi\sigma\omega}$ — *эффективная глубина скин-слоя* поверхности цилиндра.

Обращаясь к формуле (11.3.76), легко видеть, что влияние конечной проводимости цилиндра сказывается в образовании комплексного фазового угла $\delta_m - ix_m$, где

$$x_m \simeq \frac{2\tau_s}{\pi a C_m^2(ka)}.$$

а $\delta_m = \delta_m(ka)$ определено на стр. 522. Таблица для δ_m приведена в конце книги. При этом коэффициент отражения R_m равен $e^{-2x_m - 2i\delta_m}$, а эффективная ширина рассеяния, эффективная ширина поглощения и полная эффек-

тивная ширина цилиндра для электромагнитных волн равны

$$\begin{aligned} Q_s &= \frac{2}{k} \sum \varepsilon_m e^{-2x_m} [\operatorname{ch}(2x_m) - \cos(2\delta_m)], \\ Q_a &= \frac{2}{k} \sum \varepsilon_m e^{-2x_m} \operatorname{sh}(2x_m), \\ Q_t &= \frac{2}{k} \sum \varepsilon_m [1 - e^{-2x_m} \cos(2\delta_m)] = Q_a + Q_s, \end{aligned} \quad (13.3.65)$$

для случая поляризации электрического вектора, параллельного оси цилиндра.

Несложные вычисления показывают, что для поляризации, при которой магнитное поле параллельно оси цилиндра, коэффициент поглощения равен

$$x'_m \simeq \frac{2\tau_s}{\pi a [C'_m(ka)]^2},$$

а три типа эффективных ширин для этой поляризации определяются формулами, аналогичными формулам (13.3.65), за исключением того, что вместо x_m , δ_m и C_m надо подставить x'_m , δ'_m и C'_m . Рассеянные волны на больших расстояниях от цилиндра имеют вид

$$\begin{aligned} A_{\parallel s} &\simeq -\frac{a_z}{ik} \sqrt{\frac{2i}{\pi k r}} e^{ihr - i\omega t} \sum_m \varepsilon_m \cos m\varphi (1 - e^{-2x'_m - 2i\delta'_m}), \\ A_{\perp s} &\simeq -\frac{a_\varphi}{ik} \sqrt{\frac{2i}{\pi k r}} e^{ihr - i\omega t} \sum_m \varepsilon_m \cos m\varphi (1 - e^{-2x'_m - 2i\delta'_m}), \end{aligned} \quad (13.3.66)$$

откуда можно получить интенсивность рассеянной волны.

Сферические волны. Весьма важной системой разделяющихся решений являются решения в сферических координатах r , ϑ , φ . Основные скалярные функции, из которых строятся векторные функции, в этом случае представляют собой произведения $\cos m\varphi$ или $\sin m\varphi$ (или $e^{\pm im\varphi}$), сферических гармоник $P_n^m(\cos \vartheta)$ и сферических функций Бесселя $j_n(kr)$ или $n_n(kr)$. Векторные функции, конечно, получаются применением к этим функциям операции градиента для продольных решений и операций rot и $\operatorname{rot} \operatorname{rot}$ для поперечных решений. Обращение к формулам (13.1.4) и (13.1.5) показывает, что операция rot применяется к вектору \mathbf{r} , умноженному на скалярное решение. Полученные векторы проще всего выразить через векторные гармонические функции, введенные в (13.2.18), (13.2.20) и последующих формулах. Таблицы этих функций приведены в конце главы.

Векторные решения имеют также поучительные интегральные представления. Как и в гл. 11, наши решения можно выразить в форме интеграла от плоской волны $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$ по всем возможным направлениям \mathbf{k} . (Здесь положено

$$\mathbf{r} = r (a_x \sin \vartheta \cos \varphi + a_y \sin \vartheta \sin \varphi + a_z \cos \vartheta)$$

и

$$\mathbf{k} = k (a_x \sin u \cos v + a_y \sin u \sin v + a_z \cos u),$$

а $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$, умноженное на $\sin u \, du \, dv$ и амплитудный множитель, интегрируется по v от 0 до 2π и по u от 0 до π .) В рассматриваемом случае амплитудные множители — это векторные функции u и v , и, что весьма удачно, эти множители оказываются векторными гармоническими функциями, таблицы которых приведены в конце главы.

К сожалению, чтобы различать функции, соответствующие различным решениям, приходится прибегать к большому числу нижних и верхних индексов. Нижние индексы m и n обозначают порядок производящей сферической гармоник; нижние индексы e или o указывают на использование $\cos m\varphi$ или $\sin m\varphi$ в сферической гармонике. (Этого можно избежать, применяя $e^{im\varphi}$; только в этом случае нужен специальный символ для обозначения комплексно сопряженной величины.) Наконец, нужен символ, который бы отличал функции, регулярные в начале координат, от имеющих там полюс, а также символ, отличающий функции, соответствующие лишь расходящимся волнам.

Три системы решений первого рода, конечных при $r=0$, имеют при этом вид

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{cmn}^1(\mathbf{r}) &= \frac{1}{k} \text{grad} [Y_{cmn}(\vartheta, \varphi) j_n(kr)] = \\ &= \mathbf{P}_{mn}^o(\vartheta, \varphi) \frac{1}{k} \frac{d}{dr} [j_n(kr)] + \sqrt{n(n+1)} \mathbf{B}_{mn}^o(\vartheta, \varphi) \frac{1}{kr} [j_n(kr)] = \\ &= \frac{1}{2n+1} \left\{ n j_{n-1}(kr) \left[\mathbf{P}_{mn}^o + \sqrt{\frac{n+1}{n}} \mathbf{B}_{mn}^o \right] - \right. \\ &\quad \left. - (n+1) j_{n+1}(kr) \left[\mathbf{P}_{mn}^o - \sqrt{\frac{n}{n+1}} \mathbf{B}_{mn}^o \right] \right\} = \\ &= \frac{i}{4\pi i^n} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin u e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{P}_{mn}^o(u, \varphi) du; \end{aligned} \quad (13.3.67)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{cmn}^1(\mathbf{r}) &= \text{rot} [\mathbf{r} Y_{cmn}(\vartheta, \varphi) j_n(kr)] = \\ &= \sqrt{n(n+1)} \mathbf{C}_{mn}^o(\vartheta, \varphi) j_n(kr) = \frac{1}{k} \text{rot} [\mathbf{N}_{cmn}^1(\mathbf{r})] = \\ &= \frac{\sqrt{n(n+1)}}{4\pi i^n} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{C}_{mn}^o(u, \varphi) \sin u du; \end{aligned} \quad (13.3.68)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{cmn}^1(\mathbf{r}) &= \frac{1}{k} \text{rot} [\mathbf{M}_{cmn}^1(\mathbf{r})] = \\ &= n(n+1) \mathbf{P}_{mn}^o(\vartheta, \varphi) \frac{1}{kr} j_n(kr) + \sqrt{n(n+1)} \mathbf{B}_{mn}^o(\vartheta, \varphi) \frac{1}{kr} \frac{d}{dr} [r j_n(kr)] = \\ &= \frac{n(n+1)}{2n+1} \left\{ j_{n-1}(kr) \left[\mathbf{P}_{mn}^o + \sqrt{\frac{n+1}{n}} \mathbf{B}_{mn}^o \right] + \right. \\ &\quad \left. + j_{n+1}(kr) \left[\mathbf{P}_{mn}^o - \sqrt{\frac{n}{n+1}} \mathbf{B}_{mn}^o \right] \right\} = \\ &= \frac{i}{4\pi i^n} \sqrt{n(n+1)} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{B}_{mn}^o(u, \varphi) \sin u du. \end{aligned} \quad (13.3.69)$$

Эти определения надо сравнить с формулой (11.3.47). Индекс n принимает значения от 0 до ∞ ; m изменяется от 0 до n ; σ — или e , или o (четное или нечетное). Можно, конечно, применять комплексную форму

$$\mathbf{L}_{cmn}^1 = \mathbf{L}_{emn}^1 + i \mathbf{L}_{omn}^1 = \frac{1}{k} \text{grad} [X_n^m(\vartheta, \varphi) j_n(kr)].$$

Имеются также функции второго рода \mathbf{L}_{cmn}^2 и т. д., которые получаются при использовании обрастающих в бесконечность при $r=0$ сфе-

рических функций Неймана $n_n(kr)$ вместо $j_n(kr)$. Контур интегрирования по u в интегральных представлениях в этом случае преобразуется аналогично тому, как это сделано в формуле (11.3.48). Кроме этого, имеются и функции третьего рода M_{mn}^3 и т. д., получающиеся при использовании сферических функций Ганкеля $h_n(kr) = j_n(kr) + in_n(kr)$ вместо $j_n(kr)$. Эти решения описывают расходящиеся волны.

Из интегральных представлений ясно видно, что L является продольной волной, так как направление $P_{mn}^2(u, v)$ совпадает с направлением волнового вектора k для любой волны, по которому производится интегрирование. Две другие волны являются поперечными, потому что B и C нормальны k . Поскольку угловые функции P , B и C взаимно ортогональны, можно использовать интегральные представления для получения разложения в ряд плоской векторной волны. Например, аффинор $\mathfrak{Z}e^{ik \cdot r}$ является функцией углов u, v вектора k и углов ϑ, φ вектора r . Разлагая его по функциям, зависящим от u, v , и используя полную систему P, B, C , получим

$$\mathfrak{Z}e^{ik \cdot r} = \sum_{\sigma, m, n} \varepsilon_m i^n (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \left\{ -iP_{mn}^2(u, v) L_{\sigma mn}^1(r) + \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} [C_{mn}^2(u, v) M_{\sigma mn}^1(r) - iB_{mn}^2(u, v) N_{\sigma mn}^1(r)] \right\}.$$

При $u=0$ (k направлен по z) все функции P, C и B обращаются в нуль, за исключением случая $m=0$ для P и $m=1$ для C и B . Поэтому имеем (см. стр. 737)

$$\mathfrak{Z}e^{ikhz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) i^n}{n(n+1)} \{ a_x [M_{01n}^1(r) - iN_{e1n}^1(r)] + a_y [M_{e1n}^1(r) + iN_{o1n}^1(r)] - in(n+1) a_z L_{e0n}^1(r) \}, \quad (13.3.70)$$

откуда умножением слева на постоянный вектор можно получить разложение любой плоской волны. Легко видеть, что продольная волна $a_z e^{ikhz}$ выражается исключительно через L , в то время как и $a_x e^{ikhz}$ и $a_y e^{ikhz}$ представляются обоими поперечными решениями M и N .

Излучение диполей и мультиполей. Для несколько более детального исследования свойств этих сравнительно сложно выглядящих векторных решений рассчитаем электромагнитную волну, излучаемую сферой, на которой задано (способом, который нас здесь не интересует) простое распределение осциллирующих поверхностных токов. Для подсчета излучения, вызываемого распределением токов, обычно используется весь аппарат, связанный с функцией Грина. Однако в случае только поверхностных токов можно использовать применявшееся неоднократно соотношение между поверхностным током J_s и напряженностью магнитного поля H_s у поверхности

$$J_s = \frac{c}{4\pi} [n \times H_s],$$

где n — внутренняя нормаль к поверхности. В рассматриваемом случае поверхность является сферой $r=a$ и нормаль n совпадает с $-a_r$ (рассматриваются колебания вне сферы), так что

$$J_s = -\frac{rc}{4\pi} [a_r \times H_{r=a}].$$

Сравнивая магнитное поле расходящейся волны и поверхностный ток, можно подсчитать излучение, обусловленное током.

Предположим на момент, что рассматривается обратная задача определения распределения тока по поверхности сферы, вызывающего данное поле излучения. При этом не будет продольных волн, поэтому не надо рассматривать волны типа L. Не будет также и волн типов M и N при $n = 0$. Простейшая волна типа M имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{M}_{01}^3 = \mathbf{a}_\varphi \sin \vartheta h_1(kr) e^{-i\omega t} = \frac{\mathbf{E}}{ik}, \\ \mathbf{H} &= k\mathbf{N}_{01}^3 = \left\{ 2ka_r \cos \vartheta \cdot \frac{1}{kr} \cdot h_1(kr) - ka_\vartheta \sin \vartheta \cdot \frac{1}{kr} \cdot \frac{d}{dr} [rh_1(kr)] \right\} e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (13.3.71)$$

а соответствующий ток на поверхности сферы равен

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{01} &= -\mathbf{a}_\varphi \frac{\omega}{4\pi} \sin \vartheta [2h_0(ka) - h_2(ka)] e^{-i\omega t} = \\ &= -i\omega \mathbf{a}_\varphi \frac{\sin \vartheta}{4\pi} \left[\frac{1 - (ka)^2 - ika}{(ka)^3} \right] e^{ika - i\omega t}. \end{aligned}$$

Ток такого рода колеблется параллельно экватору сферы, как будто сама сфера вращается вокруг оси z сначала по часовой стрелке, а затем против. Естественно ожидать, что при этом свободные заряды нигде не будут накапливаться. Это предположение подтверждается тем, что электрическое поле нигде не имеет нормальной (радиальной) компоненты. Такой замкнутый ток без свободных зарядов образует то, что называется *магнитным диполем*, а волна $\mathbf{A} = \mathbf{M}_{01}^3$ называется *излучением магнитного диполя*. Петля переменного тока образует осциллирующий магнитный диполь, который, можно сказать, порождает эту волну.

Рассматривая обратную задачу, видим, что если ток равен $\mathbf{J} \cdot \mathbf{a}_\varphi \sin \vartheta e^{-i\omega t}$, то электрическое поле на поверхности имеет вид

$$\mathbf{E}_{r=a} = -i\omega \left[\frac{4\pi a}{c^2} \frac{1 - ika}{1 - (ka)^2 - ika} \right] (-\mathbf{J} \mathbf{a}_\varphi \sin \vartheta e^{-i\omega t}).$$

Величина в квадратных скобках (или, вернее, ее предельное значение при $ka \ll 1$) является эффективной индуктивностью единицы длины экватора сферы при распределении тока, соответствующем магнитному диполю. При возрастании частоты, когда величиной ka уже нельзя пренебречь, импеданс единицы длины экватора (величина в скобках, умноженная на $-i\omega$) уже не является чисто реактивным. Действительно, для $ka \gg 1$ импеданс уже чисто активный, равный $4\pi/c$, т. е. сопротивлению излучения вакуума.

Взяв первую волну типа N, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\mathbf{E}}{ik} = \mathbf{N}_{01}^3 = \left\{ 2a_r \frac{\cos \vartheta}{kr} h_1(kr) - a_\vartheta \frac{\sin \vartheta}{kr} \frac{d}{dr} [rh_1(kr)] \right\} e^{-i\omega t}; \\ \mathbf{H} &= k\mathbf{M}_{01}^3, \quad \mathbf{J}_{01} = \mathbf{a}_\vartheta \frac{ck}{4\pi} \sin \vartheta \left[\frac{i + ka}{(ka)^2} \right] e^{ika - i\omega t}. \end{aligned} \quad (13.3.72)$$

В этом случае ток колеблется от полюса к полюсу, попеременно накапливая положительные и отрицательные заряды на полюсах. Это легко видеть, подсчитывая поверхностные заряды по радиальной составляющей электрического поля $Q = (1/4\pi) (\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{E})$. Имеем

$$Q = \frac{1}{2\pi a} \cdot \frac{1 - ika}{(ka)^2} \cos \vartheta e^{ika - i\omega t},$$

что на 90° смещено по фазе по сравнению с током и имеет максимум на полюсах (множитель $\cos \vartheta$), а не на экваторе (множитель $\sin \vartheta$ в выражении для \mathbf{J}). Это простое колебание зарядов от полюса к полюсу полностью эквивалентно распределению зарядов и токов, возникающему при колебании заряженной сферы (нейтрализованной отрицательным точечным зарядом в центре сферы) вдоль оси z . Оба способа описывают то, что называется колеблющимся *электрическим диполем* (см. стр. 447).

Отношение поверхностного тока к касательной составляющей напряженности электрического поля является адмитансом единицы длины периметра электрического диполя:

$$Y_{e01} = -i\omega \left[\frac{a}{4\pi} \frac{1-ika}{1-(ka)^2-ika} \right].$$

Величина в скобках при $ka \ll 1$ представляет собой емкость — эффективную емкость двух полюсов сферы для тока, образующего диполь электрического типа. При больших значениях ka адмитанс является действительным и стремится к величине, обратной $4\pi/c$ (сопротивлению излучения свободного пространства).

Поэтому поле излучения, вообще говоря, бывает двух различных типов, соответствующих двум различным типам распределения по поверхности сферы тока возбуждения. При одном типе магнитное поле всюду ортогонально \mathbf{r} и имеются свободные заряды и ток на поверхности сферы, определяемые формулами

$$\mathbf{A} = \mathbf{N}_{cmn}^3(\mathbf{r});$$

$$\mathbf{E}_t = -ik \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} \mathbf{B}_{mn}^2(\vartheta, \varphi) [nh_{n+1}(ka) - (n+1)h_{n-1}(ka)] e^{-i\omega t};$$

$$Q = \frac{n(n+1)}{4\pi(2n+1)} Y_{cmn}(\vartheta, \varphi) [h_{n+1}(ka) + h_{n-1}(ka)] e^{-i\omega t};$$

$$\mathbf{J} = \frac{ck}{4\pi} \sqrt{n(n+1)} \mathbf{B}_{mn}^2(\vartheta, \varphi) h_n(ka) e^{-i\omega t}; \quad (13.3.73)$$

$$Y = -\frac{\mathbf{J}}{\mathbf{E}_t} = \frac{c}{4\pi} \frac{-i(2n+1)h_n}{nh_{n+1} - (n+1)h_{n-1}} \rightarrow \begin{cases} -i\omega \frac{a}{4\pi c} & \text{при } ka \ll 1, \\ \frac{c}{4\pi} & \text{при } ka \gg 1. \end{cases}$$

Такое распределение токов и зарядов для случая (m, n) соответствует электрическому мультиполю порядка 2^n . Его импеданс $1/Y$ равен импедансу вакуума $4\pi/c$ для высоких частот, а для очень низких частот является емкостным реактансом, соответствующим емкости $a/4\pi l$ CGSE.

Случай $n=2$ называется *электрическим квадруполем*. Распределение тока при $m=0$, $n=2$ имеет вид

$$\mathbf{J} = i \frac{3c}{8\pi a} a_\vartheta \sin 2\vartheta \frac{3-(ka)^2-3ika}{(ka)^2} e^{ika-i\omega t}$$

и соответствует попеременному движению зарядов от экватора к обоим полюсам, а затем от полюсов к экватору. При этом заряды одного знака накапливаются на полюсах, а заряды другого знака — на экваторе; знаки зарядов меняются через полпериода. Излучение такого типа возбуждается деформирующейся заряженной сферой, которая принимает форму то вытянутого, то сплюсненного сфероида; расстояние между полюсами сокращается и экватор увеличивается, а через полпериода — наоборот.

В излучении другого типа электрическое поле нормально \mathbf{r} , и поэтому на поверхности сферы нет свободных зарядов, а есть лишь поверхностный ток:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{M}_{mn}^3, \quad \mathbf{E}_t = ik \sqrt{n(n+1)} C_{mn}^s(\vartheta, \varphi) h_n(kr) e^{-i\omega t}, \\ \mathbf{J} &= \frac{ck}{4\pi} \frac{\sqrt{n(n+1)}}{2n+1} C_{mn}^s(\vartheta, \varphi) [nh_{n+1}(ka) - (n+1)h_{n-1}(ka)] e^{-i\omega t}; \\ Z &= -\frac{E_t}{\mathbf{J}} = \frac{4\pi}{c} \frac{-i(2n+1)h_n}{nh_{n+1} - (n+1)h_{n-1}} \rightarrow \begin{cases} -i\omega \frac{4\pi a}{nc^2} & \text{при } ka \ll 1, \\ \frac{4\pi}{c} & \text{при } ka \gg 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (13.3.74)$$

Такое распределение токов при фиксированных (m, n) соответствует магнитному мультиполю порядка 2^n . Его импеданс Z при высоких частотах равен импедансу вакуума, а при низких частотах является реактивным, соответствующим индуктивности $4\pi a / nc^2$ CGSM.

Магнитный квадруполь при $m = 0$ имеет распределение тока ($m = 0, n = 2$)

$$\mathbf{J} = \frac{3ck}{10\pi} \mathbf{a}_\varphi \sin 2\vartheta [nh_{n+1}(ka) - (n+1)h_{n-1}(ka)],$$

что соответствует току, текущему параллельно экватору в течение одной половины периода по часовой стрелке в северном и против часовой стрелки в южном полушарии и в обратных направлениях в течение другой половины периода. Мультиполи высших порядков, конечно, представляют более сложную картину распределения токов и зарядов для электрических мультиполей и одних токов для магнитных мультиполей.

Поскольку функции \mathbf{B} и \mathbf{C} на поверхности сферы образуют полную ортогональную систему, можно получить решение для излучения произвольно заданного на поверхности сферы распределения тока или для произвольного распределения напряженности электрического поля. Получающееся при этом разложение решения в ряд автоматически дает разложение полного поля излучения на члены, соответствующие системе мультиполей, эквивалентной действительному распределению тока. (См. также рассуждения на стр. 260 и последующих, относящихся к аналогичному разложению статического распределения зарядов.) Как будет показано ниже, простой способ расчета излучения от колеблющейся совокупности зарядов и токов на некотором расстоянии от этой совокупности заключается в представлении этих вибраторов эквивалентными электрическими и магнитными диполями, парой квадруполов и т. д., таким же образом, как и при разложении статической совокупности зарядов, данном в формулах (10.3.42) и (10.3.43). Поле излучения при этом естественным образом оказывается выраженным через функции \mathbf{M} и \mathbf{N} .

Стоячие волны в сферической полости. Функции \mathbf{M} и \mathbf{N} можно использовать и для расчета стоячих электромагнитных волн *внутри* сферической полости. В случае идеально проводящей сферы радиуса a стоячие волны, образованные векторным потенциалом \mathbf{A} , и допустимые частоты определяются выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{mln}^s(\mathbf{r}) &= \sqrt{l(l+1)} C_{ml}^s(\vartheta, \varphi) j_l \left(\frac{\pi\beta_{ln}r}{a} \right), \\ \nu_{hln} &= \frac{c\beta_{ln}}{2a}, \\ \mathbf{N}_{mln}^s(\mathbf{r}) &= l(l+1) \frac{a}{\pi\gamma_{ln}r} j_l \left(\frac{\pi\gamma_{ln}r}{a} \right) \mathbf{P}_{ml}^s(\vartheta, \varphi) + \\ &+ \sqrt{l(l+1)} \frac{a}{\pi\gamma_{ln}r} \frac{d}{dr} \left[r j_l \left(\frac{\pi\gamma_{ln}r}{a} \right) \right] \mathbf{B}_{ml}^s(\vartheta, \varphi), \quad (13.3.75) \\ \nu_{eln} &= \frac{c\gamma_{ln}}{2a}, \end{aligned}$$

где β_{ln} — n -й корень уравнения $j_l(\pi\beta) = 0$, а γ_{ln} — n -й корень уравнения $d[\pi\gamma j_l(\pi\gamma)]/d\gamma = 0$. В обоих случаях k (а тем самым ν) выбрано так, что касательные составляющие \mathbf{A} и \mathbf{E} равны нулю при $r = a$.

Нормирующие постоянные для этих собственных функций не такие сложные, как может показаться. Для магнитного случая интеграл от квадрата \mathbf{M} равен

$$\begin{aligned} \Lambda_{mln}^h &= \frac{2\pi a^3}{\varepsilon_m} \frac{l(l+1)}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} [j_l^2(\pi\beta_{ln}) - j_{l-1}(\pi\beta_{ln})j_{l+1}(\pi\beta_{ln})] = \\ &= \frac{2\pi a^3}{\varepsilon_m} \frac{l(l+1)}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} j_{l+1}^2(\pi\beta_{ln}). \end{aligned} \quad (13.3.76)$$

Так как $j_l(\pi\beta_{ln}) = 0$, то $j_{l+1}(\pi\beta_{ln}) = -j_{l-1}(\pi\beta_{ln})$. Проинтегрировать квадрат функции \mathbf{N} несколько сложнее, но, используя уравнение для сферических функций Бесселя в форме

$$l(l+1)j_l(kr) - \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} j_l(kr) \right] = k^2 r^2 j_l(kr),$$

легко получить простой результат

$$\Lambda_{mln}^e = \left(\frac{a}{\pi\gamma_{ln}} \right)^2 \frac{4\pi}{\varepsilon_m} \frac{l(l+1)}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_0^a \left\{ l(l+1)j_l^2 + \left[\frac{d}{dr} r j_l \right]^2 \right\} dr.$$

Интегрируя по частям второй член в скобках, получаем

$$\left[r j_l \frac{d}{dr} (r j_l) \right]_0^a - \int_0^a r j_l \frac{d^2}{dr^2} (r j_l) dr = - \int_0^a j_l \frac{d}{dr} \left[r^2 \frac{d}{dr} j_l \right] dr,$$

поскольку при $ka = \pi\gamma_{ln}$ имеем $d(rj_l)/dr = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \Lambda_{mln}^e &= \frac{[2\pi a^3}{\varepsilon_m} \frac{l(l+1)}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} [j_l^2(\pi\gamma_{ln}) - j_{l-1}(\pi\gamma_{ln})j_{l+1}(\pi\gamma_{ln})] = \\ &= \frac{2\pi a^3}{\varepsilon_m} \frac{l(l+1)}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \left[1 - \frac{l(l+1)}{(\pi\gamma_{ln})^2} \right] j_l^2(\pi\gamma_{ln}). \end{aligned} \quad (13.3.77)$$

Можно также показать, что интеграл от E^2 по внутренней области равен интегралу от H^2 и равен $k^2 \Lambda_{mln}$, где $k = \pi\beta_{ln}/a$ для волн типа \mathbf{M} и $k = \pi\gamma_{ln}/a$ для волн типа \mathbf{N} .

Если проводимость внутренней поверхности сферы является большой, но конечной, то потери энергии можно выразить через безразмерную характеристику Q , определенную по формуле (13.3.48). Используя выражения для Λ^e и Λ^h и соответствующие выражения \mathbf{N}_t для волн типа \mathbf{M} и \mathbf{N} , получим величину Q для различных стоячих волн:

$$\begin{aligned} Q_{ln}^e &= \frac{a}{2\tau_s} \left[1 - \frac{l(l+1)}{(\pi\gamma_{ln})^2} \right] \text{ для волн типа } \mathbf{N}_{mln}, \\ Q_{ln}^h &= \frac{a}{2\tau_s} \text{ для волн типа } \mathbf{M}_{mln}, \quad \tau_s = \sqrt{\mu c^2 / 8\pi\omega\sigma}. \end{aligned}$$

Это чрезвычайно простой результат.

Функция Грина внутри сферы с почти идеально проводящей поверхностью при частоте возбуждения $kc/2\pi$ в таком случае имеет вид

$$\mathcal{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|k) = 4\pi \sum_{\sigma, m, l, n} \left\{ \frac{N_{mln}^{\sigma}(\mathbf{r}_0) N_{mln}^{\sigma}(\mathbf{r})}{(\Lambda_{mln}^e)^2 \left[\left(\frac{\pi \chi_{ln}}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{i}{2Q_{ln}^e} \right)^2 - k^2 \right]} + \frac{M_{mln}^{\sigma}(\mathbf{r}_0) M_{mln}^{\sigma}(\mathbf{r})}{(\Lambda_{mln}^h)^2 \left[\left(\frac{\pi \beta_{ln}}{a} \right)^2 \left(1 - \frac{i}{2Q_{ln}^h} \right)^2 - k^2 \right]} \right\}, \quad (13.3.78')$$

что позволяет рассчитать многие задачи возбуждения колебаний различными внешними силами.

Колебания упругого шара. Колебания упругого шара также можно выразить через функции \mathbf{L} , \mathbf{M} и \mathbf{N} , определенные по формулам (13.3.67) — (13.3.69). Значение k для продольной функции \mathbf{L} равно $k_c = \omega \sqrt{\rho/(\lambda + 2\mu)}$, что соответствует волне чистого сжатия; для обеих поперечных волн k равно $k_s = \omega \sqrt{\rho/\mu}$, что соответствует волнам сдвига. Чтобы подсчитать частоты и форму свободных колебаний, надо сначала вычислить вектор напряжения $\mathbf{T}_r = \lambda \mathbf{a}_r \operatorname{div} \mathbf{s} + \mu \mathbf{a}_r (\nabla \mathbf{s} + \mathbf{s} \nabla)$ на поверхности $r = a$. Он равен

$$\begin{aligned} \text{для } \mathbf{L}_{\sigma ml}^1: \mathbf{T}_r &= \frac{1}{k_c} \mathbf{P}_{ml}^{\sigma} \left[-\lambda k_c^2 j_l(k_c a) + 2\mu \frac{d^2}{da^2} j_l(k_c a) \right] + \\ &+ \frac{1}{k_c} \sqrt{l(l+1)} \mathbf{B}_{ml}^{\sigma} \left[\frac{2\mu}{a} \frac{d}{da} j_l(k_c a) - \frac{\mu}{a^2} j_l(k_c a) \right]; \\ \text{для } \mathbf{M}_{\sigma ml}^1: \mathbf{T}_r &= \mu \sqrt{l(l+1)} \mathbf{C}_{ml}^{\sigma} \left[\frac{d}{da} j_l(k_s a) - \frac{1}{a} j_l(k_s a) \right]; \\ \text{для } \mathbf{N}_{\sigma ml}^1: \mathbf{T}_r &= 2\mu l(l+1) \frac{1}{k_s} \mathbf{P}_{ml}^{\sigma} \frac{d}{da} \left[\frac{j_l(k_s a)}{a} \right] + \\ &+ \frac{\mu}{k_s} \sqrt{l(l+1)} \mathbf{B}_{ml}^{\sigma} \left[\frac{d^2}{da^2} j_l(k a) + \frac{l^2 + l - 2}{a^2} j_l(k a) \right]. \end{aligned} \quad (13.3.78)$$

Если внешняя поверхность шара ($r = a$) свободна, то значения k берутся такими, чтобы \mathbf{T} обращалось в нуль. Простейший тип волн дает система волн кручения $\mathbf{s} = \mathbf{M}_{\sigma mn}^1(\mathbf{r})$, где $k = k_s = \omega \sqrt{\rho/\mu}$. Допустимые значения k_s и, следовательно, собственные частоты $(1/2\pi) k_s \sqrt{\mu/\rho}$ определяются из условия $j_l'(k_s a) = (1/k_s a) j_l(k_s a)$, где штрих означает дифференцирование по полному аргументу. Собственные колебания оказываются вырожденными, не зависящими от m , так что для определения частот свободных колебаний достаточно рассмотреть только случай $m = 0$. Применяя формулы для dj_l/dz и j_l/z , приведенные в конце гл. 11, легко видеть, что уравнение для k_s переходит в

$$(l-1) j_{l-1}(k_s a) = (l+2) j_{l+1}(k_s a).$$

Имеется наименьшая гармоника для $k_s = 0$, соответствующая

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}_\varphi r \sin \vartheta,$$

представляющая свободное вращение вокруг оси z . (Гармоника \mathbf{C}_{11}^e для $k_s = 0$ представляет вращение вокруг оси x ; \mathbf{C}_{01}^e — вращение вокруг оси y .) Конечно, надо учесть эти гармоники при рассмотрении свободных движений упругого шара, хотя они и не представляют упругих колебаний.

Колебательные гармоники с простейшей угловой зависимостью получаются при $l=1$ ($C_{ml}=0$ при $l=0$), и для этих гармоник уравнение для k_s имеет вид $j_2(k_s a)=0$, откуда

$$k_s = \frac{\pi\beta_{2n}}{a}, \quad \text{резонансная частота} = \frac{\beta_{2n}}{2a} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad l=1,$$

где β_{2n} — корни, приведенные на стр. 534. Смещение точки (r, ϑ, φ) шара для наимизшей из этих гармоник имеет вид

$$\mathbf{s} = a_\varphi \sin \vartheta j_1 \left(\frac{\pi\beta_{21}r}{a} \right) e^{-i(\pi\beta_{21}/a)c_s t}, \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

внутренняя часть шара вращается вокруг оси z в одну сторону, а внешняя часть — в противоположную сторону.

Гармоники для $l=2$ имеют другую последовательность собственных частот, наименьшее допустимое значение k_s , как показывает исследование уравнения для k_s , несколько меньше $\pi\beta_{11}/a$. Соответствующее выражение для смещения имеет вид

$$\mathbf{s} = \frac{3}{2} a_\varphi \sin(2\vartheta) j_2 \left(\frac{\pi\delta_{31}r}{a} \right) e^{-i(\pi\delta_{31}/a)c_s t},$$

где δ_{31} — наимизший корень $j_1(\pi\delta) = 3j_2(\pi\delta)$, несколько меньший β_{11} . Для этой гармоники северное полушарие вращается в одном направлении вокруг оси z , а южное полушарие — в противоположном направлении. Через полпериода направления вращений меняются на противоположные.

Гармониками чистого сжатия являются лишь полностью симметричные гармоники типа **L**, для которых $m=l=0$. Чтобы поверхность $r=a$ была свободной, необходимо

$$\lambda j_0(k_c a) = 2\mu j_0''(k_c a) = \mu j_2(k_c a) - \mu j_0(k_c a),$$

или

$$k_c = \frac{\pi\epsilon_{0n}}{a}, \quad \text{где } j_0(\pi\epsilon_{0n}) = \frac{4\mu}{3\lambda + 2\mu} j_2(\pi\epsilon_{0n}).$$

Соответствующие смещения равны

$$\mathbf{s} = -a_r j_1 \left(\frac{\pi\epsilon_{0n}r}{a} \right) e^{-i(\pi\epsilon_{0n}/a)c_c t}, \quad c_c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}};$$

это — гармоники, соответствующие чисто радиальным колебаниям.

Никакие другие гармоники не представляют чистого сжатия; при $l > 0$ граничному условию $T_r = 0$ удовлетворяет лишь комбинация **L** и **N**. Чтобы получить ее, положим

$$\mathbf{s} = L_{ml}^1(\mathbf{r})_{k=k_c} + AN_{ml}^1(\mathbf{r})_{k=k_s}$$

и выберем A и ω так, чтобы $T_r = 0$. Это приводит к паре однородных уравнений относительно $j_l(k_c a)$, $j_l(k_s a)$ и их производных, а также λ , μ и A , которые можно разрешить в любом конкретном случае, но общее решение которых нельзя выписать в явном виде. Для гармоник, соответствующих $m=0$, $l=1$, колебания представляют собой изменение формы сферы из вытянутого сфероида в сплюснутый за период колебаний.

Функция Грина для свободного пространства. Возвращаясь к случаю электромагнитных колебаний и сравнивая формулы (13.3.77'), (13.3.67), (13.3.69) и (11.3.53), мы видим, что поперечную аффинорную функцию Грина сферической полости можно выразить через скалярную функцию Грина той же полости. Для этого к данной функции надо применить

векторные операторы как по \mathbf{r} , так и по \mathbf{r}_0 . Для части М формулы (13.3.77') мы исходим из скалярной функции Грина, обращающейся в нуль при $r = a$. Эту функцию можно представить в виде суммы сферических гармоник различных порядков:

$$G^0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|k) = \sum_{l=0}^{\infty} g_l^0(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|k), \quad g_l^0 = \sum_{m,n} \frac{4\pi\psi_{mln}(\mathbf{r}_0)\psi_{mln}(\mathbf{r})}{\Lambda_{mln}^2(k_{ln}^2 - k^2)},$$

где $k_{ln} = \pi^2 l n / a$, $\psi_{mln} = Y_{ml} j_l$ и где Λ_{mln} равно нормирующему множителю, входящему в (13.3.77'), умноженному на $1/l(l+1)$. Поэтому часть М формулы (13.3.77') можно символически записать (опуская малые члены в Q , что соответствует идеальной проводимости сферы) в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l(l+1)} \text{rot}_0 \text{rot} [\mathbf{r}_0 \mathbf{r} g_l^0].$$

Аналогично часть N аффинорной функции Грина запишем в виде

$$\frac{1}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l(l+1)} (\text{rot}_0 \text{rot}_0) (\text{rot rot}) [\mathbf{r}_0 \mathbf{r} g_l^1],$$

где g_l^1 есть l -й член ряда для скалярной функции Грина, для которой нормальная производная rg обращается в нуль при $r = a$. В операторном выражении продольной части используются операторы $\text{grad}_0 \cdot \text{grad}$ и следует опустить множитель $1/l(l+1)$.

При рассмотрении аффинорной функции Грина для неограниченного пространства разница между g^0 и g^1 исчезает, но операторные обозначения сохраняют свой смысл. Согласно (11.3.44),

$$\frac{e^{ikR}}{R} = ik \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sum_{m,\sigma} \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \psi_{\sigma ml}^1(\mathbf{r}_0) \psi_{\sigma ml}^3(\mathbf{r}), \quad r > r_0,$$

где

$$\psi_{\sigma ml}^1 = Y_{ml}^{\sigma}(\vartheta, \varphi) j_l(kr), \quad \psi_{\sigma ml}^3 = Y_{ml}^{\sigma}(\vartheta, \varphi) h_l(kr).$$

Применяя операторы, как было намечено выше, можно немедленно получить аффинорную функцию Грина для неограниченного пространства:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0|k) = \mathfrak{S} \frac{e^{ikR}}{k} = ik \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} \sum_{m,\sigma} \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \{ \mathbf{M}_{\sigma ml}^1(\mathbf{r}_0) \mathbf{M}_{\sigma ml}^3(\mathbf{r}) + \\ + \mathbf{N}_{\sigma ml}^1(\mathbf{r}_0) \mathbf{N}_{\sigma ml}^3(\mathbf{r}) + l(l+1) \mathbf{L}_{\sigma ml}^1(\mathbf{r}_0) \mathbf{L}_{\sigma ml}^3(\mathbf{r}) \}, \end{aligned} \quad (13.3.79)$$

где m изменяется от 0 до l , σ есть или e или o , а векторные функции определены по формулам (13.3.67) — (13.3.69), функции с верхним индексом 3 соответствуют расходящимся волнам и принято, что $r > r_0$. При $r < r_0$ в приведенном ряде надо поменять местами \mathbf{r} и \mathbf{r}_0 . Этот ряд можно получить и обычным способом вычисления функции Грина, но, поскольку уже имелась в распоряжении скалярная форма, желательно было показать, как операторный символизм позволяет перейти от скалярной формы к аффинорной. При этом была включена и продольная часть, хотя она в электромагнитном случае при вычислении полей обычно исчезает.

Излучение переменного тока. Задача определения электромагнитного поля излучения, создаваемого в неограниченном пространстве заданным

внутри сферы радиуса a распределением осциллирующих токов, включает в себя многие важные случаи, начиная от излучения атома и кончая возбуждением радиоволн. Вначале примем, что колебания являются монохроматическими с частотой $\nu = \omega/2\pi = kc/2\pi$. В дальнейшем, используя метод преобразования Лапласа, можно будет рассчитать излучение неустановившегося движения зарядов. Поэтому примем, что распределение зарядов и токов задается функциями $\rho(r, \vartheta, \varphi)e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{J}(r, \vartheta, \varphi)e^{-i\omega t}$, где ρ и \mathbf{J} равны нулю при $r > a$. Эти две величины не полностью независимы, поскольку продольная часть \mathbf{J} связана с ρ уравнением непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{J}_l = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = i\omega\rho.$$

Исследуемая задача хороша тем, что здесь еще раз можно рассмотреть следствия выбора калибровки потенциалов и соответствующие соотношения между продольной и поперечной функциями Грина. При такой калибровке потенциалов, когда используются и векторный и скалярный потенциалы, уравнение для \mathbf{A} имеет вид

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}.$$

В этом случае используется полная аффинорная функция Грина. Для неограниченного пространства потенциалы определяются выражениями

$$\mathbf{A} = \frac{e^{-i\omega t}}{c} \iiint \frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) dv_0, \quad \varphi = \iiint \frac{e^{ikR}}{R} \rho(\mathbf{r}_0) dv_0 \cdot e^{-i\omega t}.$$

Векторный потенциал имеет продольную часть (выражающуюся рядом по функциям L_{ml}^3), которая исчезает при подсчете поля. Для определения \mathbf{H} надо взять $\operatorname{rot} \mathbf{A}$, что, конечно, уничтожает продольную часть \mathbf{A} ; для определения \mathbf{E} используется комбинация $-\operatorname{grad} \varphi + ik\mathbf{A}$, и соответствующая часть от φ взаимно уничтожается с продольной частью $ik\mathbf{A}$ в области $r > a$. Чтобы проверить это последнее утверждение, возьмем дивергенцию от $-\operatorname{grad} \varphi + ik\mathbf{A}$. Она должна обратиться в нуль, если отсутствует продольная часть данного выражения. Имеем

$$\begin{aligned} ik \operatorname{div} \mathbf{A} &= i\omega e^{-i\omega t} \iiint \left[\operatorname{grad} \frac{e^{ikR}}{R} \right] \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) dv_0 = \\ &= -i\omega e^{-i\omega t} \iiint \left[\operatorname{grad}_0 \frac{e^{ikR}}{R} \right] \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) dv_0. \end{aligned}$$

Но

$$\left[\operatorname{grad}_0 \frac{e^{ikR}}{R} \right] \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) = \operatorname{div}_0 \left[\frac{e^{ikR}}{R} \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) \right] - \frac{e^{ikR}}{R} \operatorname{div}_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}_0),$$

и интеграл от первого члена по неограниченному пространству равен поверхностному интегралу по бесконечной сфере. Последний равен нулю. Тем самым остается лишь интеграл от второго члена:

$$\begin{aligned} ik \operatorname{div} \mathbf{A} &= i\omega \iiint \frac{e^{ikR}}{R} \operatorname{div}_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) dv_0 \cdot e^{-i\omega t} = \\ &= -\omega^2 \iiint \frac{e^{ikR}}{R} \rho(\mathbf{r}_0) dv_0 \cdot e^{-i\omega t} = \\ &= -\omega^2 \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi + 4\pi\rho = \nabla^2 \varphi \quad \text{при } r > a. \end{aligned}$$

Здесь использованы уравнения непрерывности для ρ и уравнение для φ . При $r > a$ отсюда следует, что $\operatorname{grad} \varphi$ равен продольной части \mathbf{A}_l векторного потенциала, умноженной на ik . Поэтому \mathbf{E} определяется лишь поперечной частью \mathbf{A} , за исключением случая $r < a$.

Если, с другой стороны, калибровка потенциалов такова, что $\varphi = 0$, то векторный потенциал удовлетворяет уравнению

$$\text{rot rot } \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J},$$

которое отличается от предыдущего отсутствием члена $\text{grad div } \mathbf{A}$ в $\nabla^2 \mathbf{A}$. Как следует из рассуждений, предшествовавших формуле (13.1.37), решение этого уравнения представляется через поперечную аффинорную функцию Грина

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \iiint \mathcal{G}_l(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) dV_0 e^{-i\omega t} - \frac{4\pi}{k^2} \mathbf{J}_l(\mathbf{r}), \quad (13.3.80)$$

где \mathbf{J}_l — продольная часть тока (часть, порождающая свободные заряды). Это выражение при $r > a$ является как раз поперечной частью векторного потенциала при предыдущей калибровке потенциалов. В рассматриваемом случае \mathbf{E} равно $ik\mathbf{A}$, что опять при $r > a$ совпадает с поперечной частью предыдущего \mathbf{A} , умноженной на ik . В предыдущем случае продольная часть оказалась несущественной при подсчете \mathbf{E} в свободной от зарядов области $r > a$, поскольку продольная часть $ik\mathbf{A}$ взаимно уничтожилась с членом $-\text{grad } \varphi$. В рассматриваемом случае при подсчете \mathbf{E} также можно избавиться от продольной части, применяя поперечную функцию Грина. Благодаря этому \mathbf{A} вообще не имеет продольной части. Последний способ, видимо, более эффективен, если можно получить явное выражение для \mathcal{G}_l .

В случае разложения функции Грина в сферических координатах, приведенного в формуле (13.3.79), легко получить поперечную функцию Грина; достаточно просто опустить члены с \mathbf{L} . Поэтому полное выражение для векторного потенциала при такой калибровке потенциалов, когда $\varphi = 0$, для $r > a$ равно

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{ik}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} \sum_{m, \sigma} \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \{m_{ml}^{\sigma} \mathbf{M}_{\sigma ml}^3(\mathbf{r}) + n_{ml}^{\sigma} \mathbf{N}_{\sigma ml}^3(\mathbf{r})\} e^{-i\omega t}, \quad (13.3.81)$$

где постоянные

$$m_{ml}^{\sigma} = \iiint \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{M}_{\sigma ml}^1(\mathbf{r}_0) dV_0, \quad n_{ml}^{\sigma} = \iiint \mathbf{J}(\mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{N}_{\sigma ml}^1(\mathbf{r}_0) dV_0$$

можно назвать (m, l) -компонентами распределения тока.

При $ka \ll l$ (когда длина волны λ значительно больше произведения $1/l$ на радиус области, вне которой $\mathbf{J} = 0$) достаточно взять лишь первый член в разложении сферической функции Бесселя, входящей в \mathbf{M}^1 и \mathbf{N}^1 :

$$j_l(kr) \simeq \frac{2^l l!}{(2l+1)!} (kr)^l,$$

так, что, например,

$$n_{ml}^{\sigma} \simeq \frac{2^l (l+1)! k^{l-1}}{(2l+1)!} \iiint \{l r^{l-1} Y_{lm}^{\sigma} \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{J} + r^l \mathbf{J} \cdot \text{grad } Y_{lm}^{\sigma}\} dV.$$

Но

$$r^l \mathbf{J} \cdot \text{grad } Y = \text{div}(r^l Y \mathbf{J}) - l r^{l-1} Y \mathbf{a}_r \cdot \mathbf{J} - r^l Y \text{div } \mathbf{J}.$$

Интеграл от первого члена является поверхностным интегралом, равным нулю. Второй член взаимно уничтожается с первым членом в подинтегральном выражении для n_{ml}^{σ} , а третий член в силу уравнения непрерывности, связывающего \mathbf{J} и ρ , равен $i\omega r^l Y \rho$, так что

$$n_{ml}^{\sigma} = -ik^l c \frac{2^l (l+1)!}{(2l+1)!} p_{ml}^{\sigma},$$

где

$$P_{ml}^s = \frac{i(2l+1)!}{ck^l 2^l (l+1)!} \iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{N}_{ml}^s dv \simeq \iiint \rho(\mathbf{r}) Y_{ml}^s(\vartheta, \varphi) r^l dv, \quad ka \ll l. \quad (13.3.82)$$

Постоянные p для заданного значения l называются *параметрами электрического мультиполя* порядка l , создаваемого данным распределением заряда. В пределе при длине волны, значительно большей a , они представляют комбинации моментов мультиполей для статического поля, рассмотренных в формуле (10.3.42) и последующих. Для более коротких длин волн постоянные p отличаются от этих предельных значений, но их все же можно называть параметрами мультиполей.

Из формулы (10.3.36) и задачи 10.29 для $ka \ll l$ имеем

$$\begin{aligned} p_{01} &= \iiint z \rho dv = D_z^e, \quad p_{11}^e = D_x^e, \quad p_{11}^o = D_y^e, \\ p_{02} &= Q_{zz}^e - \frac{1}{2} Q_{xx}^e - \frac{1}{2} Q_{yy}^e, \quad p_{12}^e = 3Q_{xz}^e, \quad p_{12}^o = 3Q_{yz}^e, \\ p_{22}^e &= 3Q_{xx}^e - 3Q_{yy}^e, \quad p_{22}^o = 6Q_{xy}^e, \end{aligned} \quad (13.3.83)$$

где вектор \mathbf{D}^e является *электрическим дипольным моментом* $\iiint \mathbf{r} \rho dv$ для данного распределения зарядов, а \mathbf{Q}^e — *аффинор электрического квадрупольного момента* $\iiint (\mathbf{r}\mathbf{r}) \rho dv$. То обстоятельство, что для описания поля необходимо лишь пять квадрупольных параметров p_{m2} , в то время как аффинор квадруполя имеет шесть независимых компонент, объяснено на стр. 261.

Чтобы найти выражение параметров более высоких мультиполей через компоненты моментов мультиполей высших порядков, применим формулу (10.3.34):

$$\begin{aligned} r^l X_{ml} &= r^l [Y_{ml}^e + iY_{ml}^o] = e^{im\varphi} P_l^m(\cos \vartheta) r^l = \\ &= \frac{(l+m)!}{2\pi i^m l!} \int_0^{2\pi} \left[z + \frac{i}{2}(x-iy)e^{iu} + \frac{i}{2}(x+iy)e^{-iu} \right]^l e^{im\varphi} du = \\ &= \frac{(l+m)!}{2^m} \sum_s \frac{(-1)^s}{4^s s! (m+s)! (l-m-2s)!} z^{l-m-2s} (x^2+y^2)^s (x+iy)^m, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} P_{ml} &= p_{ml}^e + i p_{ml}^o = \\ &= \frac{(l+m)!}{2^m (l-m)! m!} \iiint (x+iy)^m \left\{ z^{l-m} - \frac{(l-m)(l-m-1)}{4(m+1)} z^{l-m-2} (x^2+y^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(l-m)(l-m-1)(l-m-2)(l-m-3)}{8(2l)(m+1)(m+2)} z^{l-m-4} (x^2+y^2)^2 - \dots \right\} dv. \end{aligned}$$

Для постоянных m_{ml}^s при $ka \ll l+1$ имеем

$$m_{ml}^s \simeq \frac{-2^l l! k^l}{(2l+1)!} \iiint r^l \mathbf{J} \cdot [\mathbf{r} \times \text{grad } Y_{ml}] dv = \frac{2^l l! k^l}{(2l+1)!} \iiint r^l [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] \cdot \text{grad } Y_{ml} dv,$$

где $\mathbf{r} \times \mathbf{J}$ — вектор циркуляции тока, порождающий магнитные мультиполи. Свойства этих магнитных мультиполей можно проанализировать совершенно таким же образом, как и свойства электрических мультиполей. Положим

$$m_{ml}^s = \frac{2^l l! k^l}{(2l+1)!} h_{ml}^s,$$

где константы

$$h_{ml}^s = \frac{(2l+1)!}{2^l l! k^l} \iiint j_l(kr) [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] \cdot \text{grad } Y_{ml} dv \simeq \frac{1}{l} \iiint \text{grad } (r^l Y_{ml}) \cdot [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] dv, \quad ka \ll l, \quad (13.3.84)$$

можно назвать параметрами магнитных мультиполей для заданного распределения токов и зарядов. Они являются комбинациями моментов магнитных мультиполей, определенных по аналогии с моментами электрических мультиполей. Например, при $ka \ll l$

$$\begin{aligned} h_{01} &= \iiint \text{grad } z \cdot [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] dv = D_z^h, \\ h_{11}^e &= D_x^h, \quad h_{11}^o = D_y^h, \quad \mathbf{D}^h = \iiint [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] dv, \\ h_{12}^o &= Q_{zx}^h - \frac{1}{2} Q_{xx}^h - \frac{1}{2} Q_{yy}^h, \quad h_{12}^e = 3Q_{xz}^h, \quad h_{12}^o = 3Q_{yz}^h, \\ h_{22}^e &= 3Q_{xx}^h - 3Q_{yy}^h, \quad h_{22}^o = 6Q_{xy}^h; \end{aligned} \quad (13.3.85)$$

здесь \mathbf{D}^h — вектор магнитного дипольного момента $\iiint [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] dv$, а Q — компоненты симметричного аффинора \mathcal{Q}^h — магнитного квадрупольного момента $\frac{1}{2} \iiint \{ \mathbf{r} [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] + [\mathbf{r} \times \mathbf{J}] \mathbf{r} \} dv$. Соотношение между h и моментами магнитных мультиполей высших порядков можно получить из соотношения между X_{ml} и полиномами от x , y и z , имеющими место для случая электрических мультиполей.

Собирая все эти члены, получим для электрических и магнитных полей, индуцируемых заданным распределением колеблющихся зарядов и токов, при $r > a$

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= ik^2 e^{-i\omega t} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^l (l-1)!}{(2l)!} k^l \sum_{m, \sigma} \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left\{ p_{ml}^\sigma \mathbf{N}_{\sigma ml}^s(\mathbf{r}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{c} \frac{l}{l+1} h_{ml}^\sigma \mathbf{M}_{\sigma ml}^s(\mathbf{r}) \right\} \underset{kr \rightarrow \infty}{\simeq} \\ &\underset{kr \rightarrow \infty}{\simeq} ik \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^l (l-1)!}{(2l)!} (-ik)^l \sum_{m, \sigma} \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \times \\ &\quad \times \sqrt{l(l+1)} \left\{ p_{ml}^\sigma \mathbf{B}_{ml}^\sigma(\vartheta, \varphi) + \frac{l}{l+1} \frac{h_{ml}^\sigma}{c} \mathbf{C}_{ml}^\sigma(\vartheta, \varphi) \right\}. \\ \mathbf{H} &= ik^2 e^{-i\omega t} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^l (l-1)!}{(2l)!} k^l \sum_{m, \sigma} \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{c} \frac{l}{l+1} h_{ml}^\sigma \mathbf{N}_{\sigma ml}^s(\mathbf{r}) - ip_{ml}^\sigma \mathbf{M}_{\sigma ml}^s(\mathbf{r}) \right\} \underset{kr \rightarrow \infty}{\simeq} \\ &\underset{kr \rightarrow \infty}{\simeq} ik \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^l (l-1)!}{(2l)!} (-ik)^l \sum_{m, \sigma} \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \times \\ &\quad \times \sqrt{l(l+1)} \left\{ \frac{l}{l+1} \frac{h_{ml}^\sigma}{c} \mathbf{B}_{ml}^\sigma(\vartheta, \varphi) - p_{ml}^\sigma \mathbf{C}_{ml}^\sigma(\vartheta, \varphi) \right\}. \quad (13.3.86) \end{aligned}$$

Действительная часть от $(c/4\pi) [\mathbf{E} \times \mathbf{H}]$ представляет интенсивность излучения, а интеграл от этого выражения по поверхности сферы радиуса, значительно большего, чем a ,

$$W = k^2 c \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2^{2l} (l-1)! (l+1)!}{(2l)! (2l+1)!} k^{2l} \sum_{m, \sigma} \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \left[(p_{ml}^{\sigma})^2 + \frac{l^2}{(l+1)^2} \left(\frac{h_{ml}^{\sigma}}{c} \right)^2 \right] =$$

$$= \frac{k^2}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} \sum_{m, \sigma} \varepsilon_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} [(n_{ml}^{\sigma})^2 + m_{ml}^{\sigma}] \quad (13.3.87)$$

является полной мощностью, излучаемой совокупностью зарядов и токов. Поскольку величины p и h при $ka \ll l$ не зависят от k , будучи равными статическим параметрам, легко видеть, что излучение l -го эквивалентного мультиполя при низких частотах пропорционально частоте в степени $2(l+1)$. Далее, поскольку, как можно показать, $|p_{ml}^{\sigma}|$ меньше $a^l Q$, где Q — некоторая постоянная, имеющая размерность заряда, не зависящая от m и l , и поскольку $|h_{ml}^{\sigma}|$ меньше $a^{l+1} I$, где постоянная I имеет размерность тока, то ряд сходится достаточно хорошо, пока $ka = \omega a/c$ значительно меньше единицы. Член электрического диполя для p_{ml}^{σ} обычно является наибольшим; следующие члены, меньшие на порядок $(ka)^2$, представляют электрический квадруполь и магнитный диполь и т. д. Существенно отметить, однако, что этот общий порядок величин имеет место, лишь когда продольная часть тока — того же порядка, что и поперечная. Например это может и не иметь места для атомного ядра, в котором поперечная часть тока часто является преобладающей.

Излучение полуволновой антенны. В качестве примера излучения объекта тех же размеров, что и длина волны, подсчитаем компоненты поля и полную энергию излучения прямого провода длины $2a$, который используется как полуволновая антенна в свободном пространстве. Поместив начало координат в центре провода и направив ось z по проводу, в первом приближении получим

$$\mathbf{J} = \mathbf{a}_z I_0 \delta(x) \delta(y) \cos(kz) e^{-ikt} \quad (|z| < a).$$

Для резонанса должно быть $k = \pi/2a$, т. е. частота $\nu = c/4a$. Мы сказали, что это верно лишь в первом приближении, поскольку нет уверенности, что действительное распределение тока в резонирующей антенне определяется именно этим выражением; для точного решения задачи надо рассмотреть свободные колебания системы, состоящей из тока в антенне и поля излучения. Приведенное распределение тока имеет место для свободных колебаний в проводе, не связанных с полем излучения. Естественно предположить, что взаимодействие с полем излучения не приводит к значительному изменению распределения тока.

Исследование получающихся при этом интегралов m_{ml}^{σ} и n_{ml}^{σ} показывает, что все m равны нулю (следовательно, поля эквивалентных магнитных мультиполей отсутствуют) и что n отличны от нуля лишь при $m = 0$ и $l = 2n + 1$, т. е. l нечетном. Имеем

$$n_{0, 2n+1} = -(2n+1)(2n+2) \frac{2aI_0}{\pi} \int_0^{\pi/2} n_0(z) j_{2n+1}(z) dz = aI_0 j_{2n+1} \left(\frac{\pi}{2} \right),$$

$$n_{01} = \frac{4aI_0}{\pi^2}, \quad n_{03} = \frac{48aI_0}{\pi^5} (10 - \pi^2), \dots,$$

так что ряд, определяющий поле, имеет вид

$$\mathbf{A} = \frac{3iI_0}{\pi c} \left\{ \mathbf{N}_{01}^3(\mathbf{r}) + \frac{14}{3\pi^3} (10 - \pi^2) \mathbf{N}_{03}^3(\mathbf{r}) + \dots \right\} e^{-i(\pi c/2a)t}.$$

Амплитуда эффективного диполя равна $12a^2 I_0 / \pi^3 c$, амплитуда квадруполь равна нулю, а амплитуды мультиполей высших порядков достаточно малы, чтобы ими пренебречь при подсчете энергии излучения, хотя четвертый член оказывает заметное влияние на угловое распределение поля излучения. Мощность, излучаемая диполем, равна $6I_0^2 / \pi^2 c$, что приблизительно равно мощности излучения полуволновой антенны.

В приближении до четвертого порядка поле на больших расстояниях от антенны ($r \gg a$) имеет вид

$$\mathbf{E} \simeq -i \frac{3I_0}{\pi cr} e^{i(\pi/2a)(r-ct)} \mathbf{a}_\vartheta \sin \vartheta \left[1 - \frac{7}{\pi^3} (10 - \pi^2) (5 \cos^2 \vartheta - 1) \right],$$

$$\mathbf{H} \simeq -i \frac{3I_0}{\pi cr} e^{i(\pi/2a)(r-ct)} \mathbf{a}_\varphi \sin \vartheta \left[1 - \frac{7}{\pi^3} (10 - \pi^2) (5 \cos^2 \vartheta - 1) \right];$$

поля \mathbf{E} и \mathbf{H} взаимно ортогональны и ортогональны радиус-вектору. Поля достигают наибольших значений в плоскости, нормальной оси ($\vartheta = \pi/2$), и равны нулю вдоль оси антенны ($\vartheta = 0$).

Излучение петли тока. Представляет интерес также и излучение в случае постоянного тока, текущего по петле радиуса a вокруг оси z . Ток в этом случае равен

$$\mathbf{J} = \mathbf{a}_\varphi I_0 \delta(r-a) \frac{1}{r} \delta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) e^{-ikt},$$

так что параметры n_{mi} все равны нулю, а магнитные параметры m_{mi} равны нулю, за исключением тех случаев, когда $m=0$, l нечетно. Используя формулу (13.3.81), получаем

$$m_{0, 2n+1} = 2\pi a I_0 j_{2n+1}(ka) \frac{(-1)^n (2n+2)!}{2^{2n+1} n! (n+1)!},$$

где использовано выражение для $P_n^1(0)$, приведенное в конце гл. 10. При малых ka , т. е. при периметре петли, малом по сравнению с длиной волны, величины нескольких первых эффективных магнитных мультиполей равны

$$h_{01} \simeq \pi a^2 I_0, \quad h_{03} \simeq -\frac{1}{4} \pi a^4 I_0, \quad h_{05} \simeq \frac{1}{8} \pi a^6 I_0, \dots$$

Тогда векторный потенциал равен (для $r > a$)

$$\mathbf{A} = \frac{2\pi k I_0}{c} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4n+3)(2n)!}{2^{2n+1} n! (n+1)!} \times \\ \times \mathbf{a}_\varphi P_{2n+1}^1(\cos \vartheta) j_{2n+1}(ka) h_{2n+1}(kr) e^{-i\omega t}, \quad (13.3.88)$$

и поле на больших расстояниях от петли имеет вид

$$\mathbf{E} \simeq \frac{2\pi I_0}{cr} \mathbf{a}_\varphi e^{ik(r-ct)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+3)(2n)!}{2^{2n+1} n! (n+1)!} j_{2n+1}(ka) P_{2n+1}^1(\cos \vartheta), \\ \mathbf{H} \simeq -\frac{2\pi I_0}{cr} \mathbf{a}_\vartheta e^{ik(r-ct)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+3)(2n)!}{2^{2n+1} n! (n+1)!} j_{2n+1}(ka) P_{2n+1}^1(\cos \vartheta),$$

а полная энергия, излучаемая петлей, определяется выражением

$$W = \frac{2\pi^2 I_0^2}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n+3)(2n)!(2n+2)!}{4^{2n+1} [n!(n+1)!]^2} [j_{2n+1}(ka)]^2. \quad (13.3.89)$$

При $ka < 1$ можно использовать разложение функции j_{2n+1} в ряд, и, сохраняя первые два члена, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{a}_\varphi F, \quad \mathbf{H} = -\mathbf{a}_\vartheta F, \\ F &\simeq \frac{\pi k I_0 a}{cr} e^{ikh(r-ct)} \sin \vartheta \left[1 + \frac{1}{40} (ka)^2 (5 \cos^2 \vartheta - 1) + \dots \right], \\ ka &< 1, \quad r \gg a. \end{aligned}$$

Угловая зависимость полей во многом такая же, как в случае линейной антенны, за исключением того, что электрическое и магнитное поля поменялись ролями, силовые линии \mathbf{E} представляют замкнутые кривые вокруг оси z , а \mathbf{H} расположено в аксиальной плоскости. Для этих длинных волн полная энергия излучения почти полностью определяется магнитным диполем $\pi^2 k^2 I_0^2 a^2 / 3c$. Эта величина отличается от соответствующего выражения для линейной антенны при том же значении I_0 множителем $(ka)^2$. Таким образом, антенна в форме петли оказывается менее эффективным излучателем, чем линейная антенна тех же общих размеров и при том же токе возбуждения. (Дело в том, что при низких частотах необходимо большее напряжение возбуждения, чтобы создать заданный ток в линейной антенне по сравнению с петлевой.)

Рассеяние на сфере. Наконец, можно подсчитать рассеяние плоской электромагнитной волны на идеально проводящей сфере радиуса a . Если электрический вектор в плоской волне направлен по оси x , то, умножая формулу (13.3.70) на \mathbf{a}_x , получаем

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{a}_x e^{ikhz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1) i^n}{n(n+1)} [M_{01n}^1(\mathbf{r}) - iN_{e1n}^1(\mathbf{r})]. \quad (13.3.90)$$

К этому выражению надо добавить такую комбинацию расходящихся волн M_{o1n}^3 и N_{e1n}^3 , чтобы \mathbf{A}_t обратилось в нуль при $r = a$. Отраженная волна и ее асимптотическое выражение при $kr \gg 1$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_s &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) i^{n-1}}{n(n+1)} [e^{-i\delta_n} \sin \delta_n M_{o1n}^3(\mathbf{r}) - i e^{-i\epsilon_n} \sin \epsilon_n N_{e1n}^3(\mathbf{r})] \simeq \\ &\simeq - \frac{e^{ih(r-ct)}}{kr} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n(n+1)}} [e^{-i\delta_n} \sin \delta_n C_{1n}^o(\vartheta, \varphi) + e^{-i\epsilon_n} \sin \epsilon_n \mathbf{B}_{1n}^e(\vartheta, \varphi)], \end{aligned} \quad (13.3.91)$$

где углы δ_n и ϵ_n определяются из соотношений

$$\begin{aligned} j_n(ka) &= D_n \sin \delta_n, \quad h_n(ka) = -i D_n e^{i\delta_n}, \\ \left[\frac{1}{z} \frac{d}{dz} z j_n(z) \right]_{z=ka} &= -E_n \sin \epsilon_n, \quad \left[\frac{1}{z} \frac{d}{dz} z h_n(z) \right]_{z=ka} = i E_n e^{i\epsilon_n}. \end{aligned}$$

Величины δ рассмотрены в конце гл. 10, их таблицы даны в конце книги.

Асимптотическое выражение ряда показывает, как \mathbf{A} (а следовательно, и \mathbf{E}) зависит от угла рассеяния. Поле оказывается полностью поперечным при $kr \gg 1$ и $r \gg a$. Из-за разницы между δ_n и ϵ_n амплитуда рассеянной волны в плоскости электрического вектора падающей волны ($\varphi = 0, \pi$) отличается от соответствующего значения в ортогональной плоскости ($\varphi = \pm \pi/2$). При $\varphi = 0, \pi$ электрический вектор лежит в плоскости $\varphi = 0, \pi$ (\mathbf{A}_s пропорционально \mathbf{a}_ϑ); при $\varphi = \pm \pi/2$ \mathbf{E} опять-таки параллелен плоскости (x, z) (\mathbf{A}_s пропорционален \mathbf{a}_ϑ). Для промежуточных углов φ электрический вектор рассеянной волны не всюду параллелен плоскости (x, y) , но всегда ортогонален радиус-вектору \mathbf{r} .

Полное поперечное сечение рассеяния электромагнитной волны идеально проводящей сферой радиуса a , т. е. отношение рассеянной мощности к интенсивности падающей волны, равно квадрату $|\mathbf{A}_s|$, проинтегрированному по сфере большого радиуса r :

$$Q_s = 2\pi a^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{k^2 a^2} (\sin^2 \delta_n + \sin^2 \varepsilon_n). \quad (13.3.92)$$

Разница между этим выражением и определенным формулой (11.3.72) выражением для рассеяния на сфере скалярной волны определяется влиянием поляризации векторной волны. Векторная волна, падающая на поверхность сферы, разделяется на две части: поперечно-электрическая часть (волны типа М) рассеивается с фазовым углом δ_n , а поперечно-магнитная часть (волны типа N) рассеивается с фазовым углом ε_n . Полное поперечное сечение определяется как среднее из двух различных поперечных сечений, соответствующих этим волнам.

Угловое распределение интенсивности рассеянной волны при единичной интенсивности падающей волны, конечно, определяется величиной $|\mathbf{A}_s|^2$ для больших значений r .

Для длинных волн, когда $ka \ll 1$, углы δ_n и ε_n быстро стремятся к нулю при увеличении n , и в выражении (13.3.91) нужно оставить лишь член с $n=1$. Рассеянная волна и поперечное сечение рассеяния при падающей волне

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_0 e^{ik(z-ct)}$$

($\mathbf{E} = ik\mathbf{A}$) для $ka \ll 1$ ($\lambda \gg 2\pi a$) равны

$$\mathbf{A}_s \simeq E_0 k^2 a^3 \left[N_{e11}^3 - \frac{1}{2} i M_{o11}^3 \right] e^{-ikhct},$$

$$\mathbf{E}_s \simeq E_0 \frac{a}{r} e^{ik(r-ct)} \frac{1}{2} k^2 a^2 [\mathbf{a}_\vartheta (2 \cos \vartheta - 1) \cos \varphi + \mathbf{a}_\varphi (\cos \vartheta - 2) \sin \varphi], \quad r \gg a,$$

$$Q_s \simeq \frac{10}{3} \pi a^2 (ka)^4 = \frac{160}{3\lambda^4} \pi^5 a^6 \quad (13.3.93)$$

в случае идеально проводящей сферы радиуса a . Этот предельный случай называется *релеевским рассеянием* по имени первого его исследователя. Интенсивность рассеяния изменяется как четвертая степень частоты падающей волны.

Можно сделать несколько представляющих интерес замечаний относительно этих предельных формул для больших длин волн. Во-первых, сравнение с (13.3.81) и (13.3.84) показывает, что рассеянную волну можно считать порожденной индуцированными электрическим и магнитным диполями:

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{a}_x E_0 a^3, \quad \mathbf{D}^h = -\mathbf{a}_x E_0 a^3 c.$$

На рис. 13.7 изображена мгновенная картина расположения электрических силовых линий на сфере радиуса, значительно большего длины волны. Комбинация электрического и магнитного диполей дает поле типа наклонного диполя с полюсами при $\cos \vartheta = 1/2$, $\varphi = 0, \pi$. В рассматриваемом приближении в этих направлениях интенсивность рассеянного поля равна нулю. В других направлениях поляризация рассеянного электрического вектора идет по силовым линиям, показанным на чертеже. В этом приближении больше энергии рассеивается назад ($\vartheta = \pi$), чем вперед ($\vartheta = 0$). Конечно, эти результаты имеют место лишь для идеально проводящей сферы. В случае диэлектрической сферы результаты совершенно другие, хотя во многих случаях поперечное сечение рассеяния при низких частотах изменяется, как четвертая степень частоты.

Поглощение энергии сферой. Для определения потери энергии из-за поверхностных токов на сфере надо подсчитать поверхностные токи, обусловленные касательной составляющей магнитного поля, как было сделано

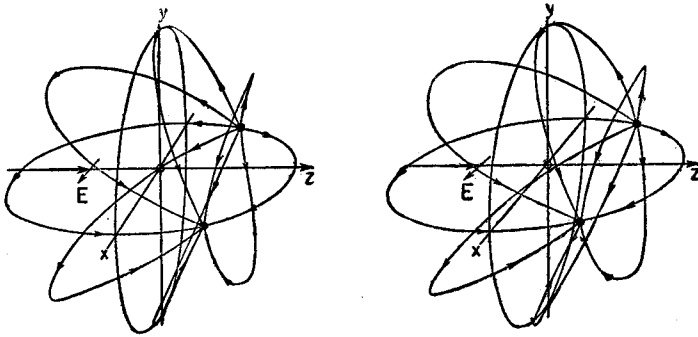


Рис. 13.7. Электрические силовые линии электромагнитной волны, рассеянной проводящей сферой, на большом расстоянии от сферы $\lambda \gg a$ (рэлеевское рассеяние).

на стр. 793. Одновременно легко подсчитать и электрические заряды, индуцированные на поверхности. По формуле (13.3.91) подсчитывается нормальная составляющая электрического поля на поверхности сферы при $r = a$ для падающей волны $\mathbf{E} = \mathbf{a}_x E_0 e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - ct)}$ (здесь учтены и падающее поле и рассеянное поле):

$$(E_r)_{r=a} = -\frac{iE_0}{ka} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) i^n D_n e^{-i\epsilon_n} \sin(\delta_n - \epsilon_n) \cos \varphi P_n^1(\cos \vartheta) e^{-i\omega t} \simeq \\ \simeq 3E_0 \cos \varphi \sin \vartheta e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad ka \ll 1, \quad (13.3.94)$$

где коэффициенты D_n определены формулой, следующей за (13.3.91). В области длинных волн плотность поверхностного заряда $E_r/4\pi$ соответствует электрическому диполю $\mathbf{D}^e = \mathbf{a}_x E_0 a^3$, как было отмечено выше. Касательное магнитное поле при $r = a$ равно

$$(\mathbf{H}_t)_{r=a} = -E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1) i^n}{\sqrt{n(n+1)}} [D_n e^{-i\epsilon_n} \sin(\delta_n - \epsilon_n) C_{1n}^e(\vartheta, \varphi) + \\ + iE_n e^{-i\delta_n} \sin(\delta_n - \epsilon_n) B_{1n}^o(\vartheta, \varphi)] e^{-i\omega t} \simeq \\ \simeq \frac{3}{2} ka E_0 [\mathbf{a}_\theta \sin \varphi (1 + i \cos \vartheta) + \mathbf{a}_\varphi \cos \varphi (\cos \vartheta + i)] e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}. \quad (13.3.95)$$

Как было уже отмечено, для длинных волн поверхностный ток $c\mathbf{H}_t/4\pi$ отвечает и электрическому и магнитному диполям. Согласно рассуждениям на стр. 764, потери энергии на поверхности равны

$$(c/4\pi) \sqrt{\mu\omega/8\pi\sigma} \iint |\mathbf{H}_t|^2 dA$$

в первом приближении по малому параметру $\sqrt{\mu\omega/8\pi\sigma}$. Поскольку интенсивность падающей волны равна $(c/4\pi) E_0^2$, отношение поглощенной мощности

к интенсивности падающей волны, поперечное сечение поглощения, равно

$$Q_a = 2\pi a^2 \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (D_n^2 + E_n^2) \sin^2(\delta_n - \varepsilon_n) \simeq \\ \simeq 2\pi a^2 \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}}; \quad ka \ll 1. \quad (13.3.96)$$

Чтобы привести это в соответствие с формулой (13.3.65), введем коэффициенты отражения для электрической и магнитной волн порядка n

$$R_n^e = e^{-2(\tau_n + i\varepsilon_n)}, \quad R_n^h = e^{-2(\kappa_n + i\delta_n)},$$

где

$$\kappa_n = \frac{1}{2} k^2 a^2 \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} D_n^2 \sin^2(\delta_n - \varepsilon_n), \\ \tau_n = \frac{1}{2} k^2 a^2 \sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\sigma}} E_n^2 \sin^2(\delta_n - \varepsilon_n).$$

Таким образом, поперечные сечения рассеяния и поглощения и полное поперечное сечение определяются выражениями

$$Q_s = \frac{\pi}{2k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) [|1 - R_n^e|^2 + |1 - R_n^h|^2], \\ Q_a = \frac{\pi}{2k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) [2 - |R_n^e|^2 - |R_n^h|^2], \\ Q_e = \frac{\pi}{2k^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) [4 - R_n^e - \bar{R}_n^e - R_n^h - \bar{R}_n^h],$$

аналогичными формуле (11.3.76), за исключением того, что в рассматриваемом случае имеются волны двух типов, поперечно-электрические и поперечно-магнитные. Поперечное сечение является средним из поперечных сечений для каждого типа волн.

Искажение поля малыми объектами. На любом объекте, диэлектрическом или проводящем, падающим электрическим полем индуцируются электрические и магнитные мультиполи. Если размеры объекта достаточно малы по сравнению с длиной волны падающего поля, то индуцированное поле можно с удовлетворительной степенью точности выразить лишь через электрический и магнитный диполи. Эти диполи обычно можно рассчитать в терминах падающего электрического и магнитного полей.

Например, электрическое поле на объекте, размеры которого значительно меньше длины волны, может быть задано в виде $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0) e^{-i\omega t}$, где \mathbf{r}_0 — радиус-вектор центра тяжести тела. Это поле порождает электрический диполь. Последний с хорошей степенью точности аппроксимируется произведением $e^{-i\omega t}$ на электрический диполь, индуцируемый на данном объекте статическим электрическим полем $\mathbf{E}(\mathbf{r}_0)$. Диполь, индуцированный статическим полем, всегда можно записать в виде

$$\mathbf{D}^e = \mathfrak{D}_e \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}_0),$$

где \mathfrak{D}_e — аффинор, определенный формой и электрическими свойствами объекта дифракции. Например, если объектом дифракции является проводящая сфера радиуса a , то $\mathfrak{D}_e = a^3 \mathfrak{I}$; если это тонкая проволока (длина

которой l мала по сравнению с λ , а диаметр 2ρ значительно меньше длины), направленная по \mathbf{a}_d , то

$$\mathfrak{D}_e = \frac{j^3}{16 \ln(l/\rho)} \mathbf{a}_d \mathbf{a}_d.$$

Аналогично магнитное поле на объекте диффракции, равное $\mathbf{H}(\mathbf{r}_0) e^{-i\omega t}$, индуцирует магнитный диполь, противодействующий изменению \mathbf{H} :

$$\mathbf{D}^h = -\mathfrak{D}_h \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}_0),$$

где \mathfrak{D}_h также является симметричным аффинором, зависящим от характеристик тела. Соответствующий аффинор для проводящей сферы радиуса a равен $ca^3 \mathfrak{F}$; для других случаев аффинор может быть более направленным. (Для кольца или диска с осью по \mathbf{a}_d он равен $cl^3 \mathbf{a}_d \mathbf{a}_d$, где l — характерный размер диска или кольца.)

Переставляя члены формулы (13.3.93), легко видеть, что поле, рассеянное на малом объекте, с индуцированными диполями $\mathbf{D}^e e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{D}^h e^{-i\omega t}$ равно

$$\mathbf{A}_s = ik \frac{e^{ik(r-ct)}}{r} \left\{ \mathbf{a}_r \times [\mathbf{a}_r \times \mathbf{D}^e] - \frac{1}{2c} [\mathbf{a}_r \times \mathbf{D}^h] \right\}; \quad kr \ll 1.$$

Поэтому, если падающее электрическое и магнитное поля на объекте имеют вид $\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ и $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$, то векторный потенциал рассеянного поля на расстоянии нескольких длин волн от объекта диффракции в первом приближении по k , умноженному на наибольший размер объекта, равен

$$\mathbf{A}_s = ik \frac{e^{ik(r-ct)}}{r} \left\{ \mathbf{a}_r \times [\mathbf{a}_r \times (\mathfrak{D}_e \cdot \mathbf{E}_0)] + \frac{1}{2c} [\mathbf{a}_r \times (\mathfrak{D}_h \cdot \mathbf{H}_0)] \right\}. \quad (13.3.97)$$

Другим способом выражения индуцированного поля является определение простого выражения эквивалентного тока, индуцированного в теле падающим полем. Рассматривая определения параметров m и n и определения эквивалентных диполей [формулы (13.3.82) и (13.3.84)], мы видим, что рассеянное поле, порождаемое диполями \mathbf{D}^e и \mathbf{D}^h , такое же, как и порождаемое током

$$\mathbf{J} = -i\omega \mathbf{D}^e \delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) - \mathbf{D}^h \times \text{grad}_0 [\delta(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})].$$

Здесь мы считаем, что объект помещен в \mathbf{r}_0 . Другими словами, вне тела в точке \mathbf{r} рассеянное поле согласно формуле (13.3.80) равно

$$\mathbf{A}_s(\mathbf{r}) = -\frac{1}{c} \{ ikc \mathbf{D}^e \cdot \mathcal{G}_t(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) + \mathbf{D}^h \cdot \text{rot}_0 \mathcal{G}_t(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0 | k) \} e^{-i\omega t}, \quad (13.3.98)$$

где диполи индуцированы падающим полем. Это уравнение имеет место для падающего поля любого вида, порождающего любые диполи.

Применим это соотношение к задаче диффракции на малом объекте, помещенном в точке $\mathbf{r}_0 (r_0, \vartheta_0, \varphi_0)$ внутри полой проводящей сферы внутреннего радиуса a . Не ограничивая общности, можно поместить объект диффракции на оси z ($\vartheta_0 = 0$). При этом очень много членов в выражении функции Грина в формуле (13.3.79) обратится в нуль. Поскольку используется поперечная функция Грина, можно, конечно, опустить члены \mathbf{L} . Единственными не обращающимися в нуль на оси z при $\vartheta \rightarrow 0$ функциями \mathbf{M} и \mathbf{N} являются

$$\mathbf{N}_{e0l}^1 \rightarrow l(l+1) \frac{1}{kr_0} j_l(kr_0) \mathbf{a}_z;$$

$$\mathbf{N}_{e1l}^1 \rightarrow \frac{1}{2} l(l+1) \frac{1}{kr_0} \cdot \frac{d}{dr_0} [r_0 j_l(kr_0)] \mathbf{a}_x;$$

$$\mathbf{N}_{o1l}^1 \rightarrow \frac{1}{2} l(l+1) \frac{1}{kr_0} \cdot \frac{d}{dr_0} [r_0 j_l(kr_0)] \mathbf{a}_y;$$

$$M_{o1l}^1 \rightarrow -\frac{1}{2} l(l+1) j_l(kr_0) \mathbf{a}_y;$$

$$M_{o1l}^2 \rightarrow \frac{1}{2} l(l+1) j_l(kr_0) \mathbf{a}_x.$$

Поэтому поле, рассеянное индуцированными диполями при $r=r_0$, $\vartheta=0$, равно

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_s(\mathbf{r}) = & -\frac{ik}{c} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l+1)}{l(l+1)} \left\{ ikc \left[\frac{j_l(kr_0)}{kr_0} l(l+1) D_z^e \mathbf{N}_{e0l}^3(\mathbf{r}) + \right. \right. \\ & + \frac{1}{kr_0} \frac{d}{dr_0} (r_0 j_l) D_x^e \mathbf{N}_{e1l}^3(\mathbf{r}) + \dots - j_l(kr_0) D_y^e \mathbf{M}_{e1l}^3(\mathbf{r}) \left. \right] + \\ & \left. + k \left[\frac{j_l(kr_0)}{kr_0} l(l+1) D_z^h \mathbf{M}_{o1l}^3(\mathbf{r}) + \dots - j_l(kr_0) D_y^h \mathbf{N}_{e1l}^3(\mathbf{r}) \right] \right\} e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

Но это выражение не определяет поля внутри сферы по двум причинам: 1) касательная составляющая этого поля при $r=a$ отлична от нуля и 2) не указано, какое падающее поле вызывает индуцированные диполи. Оба эти затруднения можно одновременно устранить следующим приемом.

Прежде всего к полю \mathbf{A}_s надо добавить поле, регулярное всюду внутри $r=a$, отраженное от внутренней поверхности сферы и такое, чтобы касательная составляющая полного поля при $r=a$ равнялась нулю. Например, к первому члену \mathbf{A}_s надо добавить член

$$-\frac{ik}{c} (2l+1) ikc \frac{j_l(kr_0)}{kr_0} D_z^e [-ie^{i\epsilon_l} \operatorname{cosec} \epsilon_l] \mathbf{N}_{e0l}^3(\mathbf{r}),$$

где, как и выше,

$$iE_l e^{i\epsilon_l} = \left[\frac{1}{z} \frac{d}{dz} z h_l(z) \right]_{z=ka}.$$

Из членов \mathbf{M} вычитается аналогичное отраженное поле, за исключением того, что используется фазовый угол δ_l , определенный соотношением

$$-iD_l e^{i\delta_l} = h_l(ka).$$

Далее, заметим, что эту отраженную волну можно рассматривать как падающую волну, индуцирующую диполи в отсутствии всяких других возбуждающих полей. Для резонанса внутри сферы поле должно возбудить индуцированный диполь, который в свою очередь возбуждает поле. Отраженная электрическая волна при $r=r_0$, $\vartheta=0$ равна

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r(\mathbf{r}_0) = & \frac{ik^2}{c} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) \left\{ ikc \left[l(l+1) \left(\frac{j_l}{kr_0} \right)^2 \frac{e^{i\epsilon_l}}{\sin \delta_l} D_z^e \mathbf{a}_z + \dots + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} (j_l)^2 \frac{e^{i\delta_l}}{\sin \delta_l} D_y^e \mathbf{a}_y \right] + \frac{1}{2} k j_l \frac{1}{kr_0} \frac{d}{dr_0} (r_0 j_l) \left[-\frac{e^{i\delta_l}}{\sin \delta_l} D_x^h \mathbf{a}_x + \dots - \frac{e^{i\epsilon_l}}{\sin \epsilon_l} D_y^h \mathbf{a}_x \right] \right\}. \end{aligned}$$

Отраженная магнитная волна имеет аналогичный вид, за исключением того, что δ и ϵ надо поменять местами, так же как \mathbf{D}^e и \mathbf{D}^h . По этим полям можно рассчитать индуцированные диполи и, приравнявая обе части, определить резонансные частоты сферической полости, содержащей малое включение в точке \mathbf{r}_0 внутри полости.

Чтобы провести вычисление, надо определить компоненты аффиноров диполей \mathfrak{D}_e и \mathfrak{D}_h , введенных раньше. Чтобы продемонстрировать процесс вычисления, примем, что включение представляет собой проводящую сферу радиуса b , значительно меньшего a . В этом случае $\mathfrak{D}_e = b^3 \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{D}_h = cb^3 \mathfrak{S}$.

Теперь можно приравнять компоненты \mathbf{D}^e и \mathbf{D}^h . Например, приравнивая компоненты для D_z^e , получим

$$D_z^e = \left\{ -k^3 b^3 \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1)(l+1) \left[\frac{j_l(kr_0)}{kr_0} \right]^2 \frac{e^{i\epsilon_l}}{\sin \epsilon_l} \right\} D_z^e.$$

Это уравнение служит для определения тех гармоник, для которых \mathbf{D}^h равно нулю, а \mathbf{D}^e направлено по z .

Поскольку $k^3 b^3$ очень мало, один из членов ряда должен быть достаточно большим, что может иметь место лишь при ϵ_l , близком $n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$), другими словами, при $(1/ka)(d/da)[aj_l(ka)]$, очень близком к нулю (но отличным от нуля). Как указано в гл. 11, $ka = \pi\gamma_{ln}$ при $\epsilon_l = n\pi$, так что можно положить $ka = \pi\gamma_{ln} + e_{ln}$, где e_{ln} мало. Разлагая малые величины, в первом приближении получим, что при

$$ka = \pi\gamma_{ln} + e_{ln}, \quad e^{i\epsilon_l} \simeq (-1)^n$$

имеет место соотношение

$$\sin \epsilon_l \simeq -\frac{e_{ln}}{E_l(\pi\gamma_{ln})} \left[\frac{l(l+1)}{(\pi\gamma_{ln})^2} - 1 \right] j_l(\pi\gamma_{ln}).$$

Следовательно, допустимые частоты колебаний в сфере, при которых возбуждается лишь z -компонента электрического диполя, равны $\omega/2\pi$, где

$$\omega = \frac{\pi c \gamma_{ln}}{a} + \frac{c e_{ln}}{a},$$

$$e_{ln} \simeq (-1)^n \frac{(\pi\gamma_{ln})^3 b^3}{a r_0^2} \frac{(2l+1)l(l+1)E_l(\pi\gamma_{ln})}{l(l+1) - (\pi\gamma_{ln})^2} \frac{j_l^2(\pi\gamma_{ln}r_0/a)}{j_l(\pi\gamma_{ln})}$$

и стоячая волна имеет общий вид $N_{e0l}^1(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ всюду, кроме непосредственной близости диполя.

Частоты, при которых возбуждается z -компонента магнитного диполя, определяются выражением

$$\omega = \frac{\pi c \beta_{ln}}{a} + \frac{c g_{ln}}{a},$$

$$g_{ln} \simeq (-1)^n (2l+1)l(l+1) \frac{\pi \beta_{ln} b^3}{a r_0^2} D_l(\pi\beta_{ln}) \left[\frac{j_l^2(\pi\beta_{ln}r_0/a)}{j_{l+1}(\pi\beta_{ln})} \right],$$

где $j_l(\pi\beta_{ln}) = 0$. Стоячая волна приближенно равна $M_{e0l}^1(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, всюду, за исключением окрестности диполя.

Другие гармоники содержат одновременно и электрические и магнитные диполи. Связывающие их уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} D_x^e + iD_y^e &= -\frac{1}{2} k^3 b^3 \sum (2l+1) \left\{ \left[q_l^2 \frac{e^{i\epsilon_l}}{\sin \epsilon_l} + j_l^2 \frac{e^{i\delta_l}}{\sin \delta_l} \right] (D_x^e + iD_y^e) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{c} j_l q_l \left[\frac{e^{i\epsilon_l}}{\sin \epsilon_l} - \frac{e^{i\delta_l}}{\sin \delta_l} \right] (D_x^h + iD_y^h) \right\}, \\ D_x^h + iD_y^h &= -\frac{1}{2} k^3 b^3 \sum (2l+1) \left\{ \left[q_l^2 \frac{e^{i\delta_l}}{\sin \delta_l} + j_l^2 \frac{e^{i\epsilon_l}}{\sin \epsilon_l} \right] (D_x^h + iD_y^h) - \right. \\ &\quad \left. - c j_l q_l \left[\frac{e^{i\delta_l}}{\sin \delta_l} - \frac{e^{i\epsilon_l}}{\sin \epsilon_l} \right] (D_x^e + iD_y^e) \right\}, \end{aligned}$$

где $j_l = j_l(kr_0)$ и $q_l(kr_0) = (1/kr_0)(d/dr_0)[r_0 j_l(kr_0)]$. Их можно разрешить, полагая δ_l и ϵ_l близкими к $n\pi$ и беря комбинацию электрических и магнит-

ных диполей. Например, если

$$D_x^h + iD_y^h = -c \left[\frac{1}{2} (\pi\beta_{ln})^3 \left(\frac{b}{a} \right)^3 (2l+1) (-1)^n j_l \left(\frac{\pi\beta_{ln}r_0}{a} \right) \times \right. \\ \left. \times \frac{D_l(\pi\beta_{ln})}{j_{l+1}(\pi\beta_{ln})} \right]^{1/2} (D_x^e - iD_y^e),$$

то δ_l близко к $n\pi$, допустимые частоты в точности равны

$$\omega = \frac{\pi c \beta_{ln}}{a}$$

и стоячая волна приближенно равна $M_{e1l}^1(\mathbf{r}) + iM_{o1l}^1(\mathbf{r})$ всюду, кроме малой окрестности объекта. С другой стороны, другая система допустимых частот имеет вид

$$\omega = \frac{\pi c \beta_{ln}}{a} + \frac{cd_{ln}}{a},$$

где

$$d_{ln} \simeq \frac{1}{2} (-1)^n (2l+1) \left(\pi\beta_{ln} \frac{b}{a} \right)^3 \left[\frac{D_l(\pi\beta_{ln})}{j_{l+1}(\pi\beta_{ln})} \right] \left[j_l^2(z) + \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} z j_l \right)^2 \right]_{z=\pi\beta_{ln}r_0/a},$$

что соответствует

$$D_x^h + iD_y^h \simeq c \left[\frac{1}{2} (-1)^n (2l+1) \left(\pi\beta_{ln} \frac{b}{a} \right)^3 \frac{D_l(\pi\beta_{ln})}{j_{l+1}(\pi\beta_{ln})} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} z j_l \right)_{z=\pi\beta_{ln}r_0/a} \right]^{1/2} (D_x^e + iD_y^e).$$

Форма волны опять приблизительно равна $M_{e1l}^1 + iM_{o1l}^1$. Наконец, имеется подобная пара систем собственных функций и частот вблизи $ka = \pi\gamma_{ln}$ ($\gamma_l \simeq n\pi$), включающая комбинации $D_x^e + iD_y^e$ и $D_x^h + iD_y^h$. Эти функции соответствуют стоячим волнам, приближенно равным $N_{e1l}^1 + iN_{o1l}^1$. [Можно, конечно, получить стоячую волну определенной поляризации N_{e1l}^1 или M_{o1l}^1 и т. д. вместо волн круговой поляризации ($N_e + iN_o$), ($M_e + iM_o$)].

Таким образом, наличие малой сферы частично снимает вырождение системы собственных функций полый сферы. При отсутствии включения каждому значению l отвечают две различные системы частот $\omega = \pi c \beta_{ln}/a$ и $\omega = \pi c \gamma_{ln}/a$, соответствующие $2(2l+1)$ различным системам собственных функций M_{ml}^1 и N_{ml}^1 . При наличии малой сферы каждому значению l отвечает лишь пять различных систем собственных частот.

Резюме. Мы пришли к концу нашего рассмотрения векторных решений уравнения Лапласа и волнового уравнения. Без сомнения, можно разобрать много еще более поучительных примеров, и многие методы, изученные ранее в применении к скалярным полям, могут быть видоизменены для применения к векторным полям. Но нам кажется, что нет большой необходимости в подробном обсуждении оставшихся возможностей и что уже разобранные примеры дают достаточно для того, чтобы читатель сам при необходимости проделал переход от скалярной задачи к векторной. Поэтому мы заканчиваем этот раздел, как должны кончатся все книги, точкой.

Задачи к главе 13

13.1. Показать, что функция $M_{mn} = \text{rot}[\mathbf{a}_z S_{mn}(h, \gamma) h e_{mn}(h, \xi)]$ касательна к сфероиду $\xi = \text{const}$ лишь при $m=0$ и что ротор функции $N_{mn} = \text{rot} M_{mn}$ касателен к этому сфероиду только при $m=0$ [функции S и $h e$