

неортогональной системы и в предположении (9.1.106) имеют вид

$$\begin{aligned} e^{(1)} &= \sum_p \frac{c_{pn}}{A_{pp} - EN_{pp}} f_p, \\ e^{(2)} &= \sum_{pq} \frac{c_{pq}c_{qn}}{(A_{pp} - EN_{pp})(A_{qq} - EN_{qq})} f_p, \end{aligned} \quad (9.1.107)$$

и

$$\begin{aligned} \lambda_0^{(1/2)} &= \frac{c_{00}}{\sum_p \frac{c_{np}c_{pn}}{A_{pp} - EN_{pp}}}, \\ \lambda_0^{(1)} &= \frac{\sum_p \frac{c_{np}c_{pn}}{A_{pp} - EN_{pp}}}{\sum_{pq} \frac{c_{np}c_{pq}c_{qn}}{(A_{pp} - EN_{pp})(A_{qq} - EN_{qq})}} \end{aligned} \quad (9.1.108)$$

и т. д.

Мы закончим этот пункт о разложении по неортогональным функциям выяснением применимости формул возмущения для различных методов. Мы можем ожидать, что эти формулы будут давать быструю сходимость, если недиагональные элементы векового определителя (9.1.96) малы по сравнению с диагональными членами:

$$\frac{EN_{qp} - H_{qp}}{EN_{qq} - H_{qq}} \ll 1, \quad q \neq p. \quad (9.1.109)$$

Это неравенство будет выполнено, если, во-первых,  $\lambda B_{qp}$  мало и, во-вторых, мало отклонение от диагональной формы определителей  $A_{qp}$  и  $N_{qp}$ . Другими словами, для неортогональных функций параметр  $\lambda$  не является больше мерой величины возмущения. Если значения  $N_{qp}$  и  $A_{qp}$  ( $q \neq p$ ) сравнимы с  $N_{qq}$  и  $A_{qq}$ , то мы уже не имеем дела с малыми возмущениями, для которых применяются формулы теории возмущений. В части таких случаев дело можно исправить ортогонализацией системы  $f_p$ , так как тогда недиагональные величины  $N_{qp}$  станут равны нулю. Для малых возмущений следует по-прежнему требовать, чтобы недиагональные элементы  $\lambda B$  и  $A$ , взятые по отношению к ортогональной системе, были малы по сравнению с диагональными элементами.

## 9. 2. Поверхностные возмущения

В этом параграфе мы обратимся к задачам, в которых отклонения от точно разрешимой задачи имеют место на границах, в то время как в предыдущем параграфе рассматривались задачи, в которых возмущения были сосредоточены внутри ограниченной области. Возмущения, являющиеся одновременно и объемными и поверхностными, можно изучать последовательным применением результатов §§ 9.1 и 9.2.

Поверхностные возмущения могут заключаться или в изменении граничных условий, или в изменении формы граничной поверхности, или в том и другом. Мы рассмотрим эти два случая отдельно; когда же встречаются оба типа одновременно, можно применить по очереди результаты исследования этих случаев. При решении задачи мы заменим

первоначальное дифференциальное уравнение и связанные с ним граничные условия на интегральное уравнение, которое можно или решить последовательными приближениями или свести к вековому определителю, к которому применимы результаты предыдущего параграфа.

Мы ограничимся рассмотрением скалярного уравнения Гельмгольца; обобщение на большую часть других линейных уравнений получается непосредственно.

**Возмущения в граничных условиях,  $f$  мало.** Здесь мы рассмотрим задачу о собственных значениях, которая получается, если однородные граничные условия Неймана или Дирихле заменяются смешанными граничными условиями:

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} + f(S) \psi = 0, \quad (9.2.1)$$

где  $f$  — вообще говоря, функция поверхностных координат. Точные решения, удовлетворяющие этим граничным условиям, можно получить для полостей (или объемов), имеющих форму параллелепипеда, круглого цилиндра, сферы и т. п., если  $f$  постоянно вдоль каждой стенки, на которой постоянна данная координата. Если же  $f$  меняется вдоль стенки или стенка имеет более сложную форму, задача не может быть решена методом разделения переменных, и мы должны снова прибегнуть к помощи приближенных методов. В теории возмущений они, естественно, зависят от величины  $f$ . Поэтому мы выведем два различных результата, соответствующих большим и малым  $f$ .

Рассмотрим сначала малые  $f$ . Здесь за невозмущенные решения удобно принять функции, удовлетворяющие однородным условиям Неймана. Пусть ими будут  $\varphi_n$ , и пусть эти функции образуют полную ортонормальную систему, удовлетворяющую уравнению

$$\nabla^2 \varphi_n + k_n^2 \varphi_n = 0.$$

Чтобы получить интегральное уравнение для функции  $\psi$ , мы используем функцию Грина  $G_k$ , удовлетворяющую на границах однородным условиям Неймана. Следовательно,  $G_k$  является решением уравнения

$$\nabla_0^2 G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) + k^2 G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad \frac{\partial G_k}{\partial n_0} = 0,$$

тогда как  $\psi$  удовлетворяет уравнению

$$\nabla_0^2 \psi(\mathbf{r}_0) + k^2 \psi(\mathbf{r}_0) = 0$$

и граничным условиям (9.2.1). Умножая первое из этих уравнений на  $\psi$ , а второе на  $G_k$ , вычитая один результат из другого и интегрируя по области, заключенной внутри границ, мы получим

$$\int [G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) \nabla_0^2 \psi - \psi \nabla_0^2 G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)] dV_0 = 4\pi \psi(\mathbf{r}). \quad (9.2.2)$$

Используя теорему Грина и граничные условия, которым удовлетворяет  $G_k$ , имеем

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int G_k \frac{\partial \psi}{\partial n_0} dS_0,$$

где подинтегральное выражение вычисляется на граничной поверхности  $S$ . Следует напомнить, что правая часть дает представление функции  $\psi(\mathbf{r})$ , только когда  $\mathbf{r}$  находится внутри граничной поверхности, и равна нулю

для  $\mathbf{r}$  вне ее. Величина  $\psi$  для  $\mathbf{r}$ , находящегося на поверхности  $S$ , получается как предел, когда  $\mathbf{r}$  приближается к  $S$  изнутри области, ограниченной  $S$ . Подстановка граничных условий (9.2.1) в (9.2.2) дает

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int f(\mathbf{r}_0^S) G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^S) \psi(\mathbf{r}_0^S) dS_0. \quad (9.2.3)$$

Мы видим, что если значения  $\psi$  на поверхности можно определить, то с помощью этого интеграла от поверхностных значений можно вычислить  $\psi$  и внутри поверхности;  $G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^S)$  по существу определяет способ, которым значения  $\psi$  с границы распространяются внутрь. Для определения этих граничных значений  $\psi$  устремим  $\mathbf{r}$  к граничной поверхности  $S$  в обеих частях равенства (9.2.3), что даст возможность получить интегральное уравнение для  $\psi(\mathbf{r}^S)$ :

$$\psi(\mathbf{r}^S) = -\frac{1}{4\pi} \int f(\mathbf{r}_0^S) G_k(\mathbf{r}^S | \mathbf{r}_0^S) \psi(\mathbf{r}_0^S) dS_0. \quad (9.2.4)$$

Это уравнение представляет собой однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Его можно решить методом последовательных приближений, а еще лучше свести его к вековому определителю, различные разложения для которого, включая результаты, полученные методом последовательных приближений, были рассмотрены в § 9.1.

Чтобы довести эту программу до конца, важно заметить, что  $G_k$  можно представить в виде билинейной формы [см. (7.2.39)]:

$$G_k = 4\pi \sum \frac{\bar{\varphi}_p(\mathbf{r}_0) \varphi_p(\mathbf{r})}{k_p^2 - k^2}$$

где собственные функции  $\varphi$  удовлетворяют однородным условиям Неймана. Тогда функция  $\psi(\mathbf{r})$  может быть разложена аналогичным образом:

$$\psi = \sum c_p \varphi_p.$$

Подставляя эти разложения в (9.2.3), имеем

$$\sum_p c_p \varphi_p(\mathbf{r}) = \sum_{qp} c_q \varphi_p(\mathbf{r}) \left[ \frac{\int f(\mathbf{r}_0^S) \bar{\varphi}_p(\mathbf{r}_0^S) \varphi_q(\mathbf{r}_0^S) dS_0}{k^2 - k_p^2} \right].$$

Пусть

$$f_{pq} = \int f(\mathbf{r}_0^S) \bar{\varphi}_p(\mathbf{r}_0^S) \varphi_q(\mathbf{r}_0^S) dS_0. \quad (9.2.5)$$

Мы, таким образом, получаем систему линейных уравнений

$$(k^2 - k_p^2) c_p = \sum_q f_{pq} c_q \quad (\text{для каждого } p). \quad (9.2.6)$$

Ненулевое решение этой однородной системы существует, если обращается в нуль определитель из коэффициентов при неизвестных  $c_p$ . Это приводит к вековому уравнению

$$|(k^2 - k_p^2) \delta_{pq} - f_{pq}| = 0. \quad (9.2.7)$$

Это уравнение становится идентичным вековому уравнению (9.1.27), к которому применимы итерационно-пертурбационные формулы (включая улучшенный вариант) и формулы Финберга, если  $\lambda U_{pq}$  приравнять  $f_{pq}$ . Например, модифицированная итерационно-пертурбационная формула для (9.2.7) будет такая:

$$k^2 = k_p^2 + f_{pp} + \sum_{q \neq p} \frac{f_{pq} f_{qp}}{k^2 - k_q^2 - f_{qq}} + \sum_{\substack{qr \neq p \\ r \neq q}} \frac{f_{pq} f_{qr} f_{rp}}{(k^2 - k_q^2 - f_{qq})(k^2 - k_r^2 - f_{rr})} + \dots \quad (9.2.8)$$

Формулы Фредгольма и вариационно-пертурбационные формулы были даны для векового определителя

$$|(E - \varepsilon_p) \delta_{pq} + \lambda B_{pq}| = 0.$$

Следовательно, мы можем использовать эти формулы, подставив

$$E - \varepsilon_p = k^2 - k_p^2 \quad \text{и} \quad \lambda B_{pq} = -f_{pq}.$$

По поводу ограничений применимости формулы (9.2.8), возникающих из-за того, что функция может иметь слишком сильную особенность, можно вновь сослаться на рассуждения в § 9.1, где мы видели, что  $f$  может иметь разрывы, но не должна при этом быть сингулярной. В дальнейшем мы возвратимся в нашем изложении к случаю сингулярности.

Ряды (9.2.8) содержат столько индексов, сколько измерений в рассматриваемой задаче. Можно достичь значительной экономии усилий уменьшением на единицу числа индексов, по которым происходит суммирование. Это можно осуществить, если граничная поверхность такова, что невозмущенные решения можно записать в разделяющихся переменных.

$$\varphi_p(\mathbf{r}) = \chi_\alpha(S) \Xi_\beta(\xi), \quad (9.2.9)$$

где  $\xi$  — координата, которая на граничной поверхности постоянна, а индексы  $\alpha$  и  $\beta$  нумеруют собственные функции. Буква  $S$  изображает две другие координаты, которые обозначают точку на рассматриваемой граничной поверхности  $\xi = \xi_S$ . Функции  $\chi$  на поверхности  $S$  образуют полную ортонормальную систему. Тогда из формулы (7.2.63) для функции Грина  $G_k$  можно получить, что

$$G_k(\mathbf{r}^S | \mathbf{r}_0^S) = 4\pi \sum_\alpha A_\alpha(k) \chi_\alpha(S) \bar{\chi}_\alpha(S_0). \quad (9.2.10)$$

Пример такого разложения для цилиндрических координат дает формула (7.2.54); ниже помещены другие примеры. Зависимость  $A_\alpha(k)$  от  $k$  значительно более сложная, чем встречающаяся в билинейном разложении  $1/(k^2 - k_p^2)$ . Поэтому становится неудобным употреблять  $k$  как собственное значение. Форма интегрального уравнения (9.2.4) наводит на мысль о следующей замене  $f$ :

$$f(S) = \mu F(S), \quad (9.2.11)$$

где  $\mu$  есть мера отклонения граничных условий (9.2.4) от условий Неймана. Тогда  $\mu$  можно рассматривать как собственное значение. Решение, которое мы получим, даст  $\mu$  как функцию  $k^2$ ; таким образом, это даст ответ на вопрос, какова должна быть величина  $f$  при заданном распределении  $F$ , чтобы  $k^2$  имело заданное значение. Это, конечно, вопрос, с которым часто встречаются на практике. Действительно, если функциональная зависимость  $\mu$  от  $k^2$  известна (если  $f$  — комплексная функция, эта зависимость может быть представлена линиями уровня в комплексной плоскости  $k$  или  $f$  и т. п.), то обычно можно получить обратную зависимость  $k^2$  от  $\mu$ .

Подставляя как (9.2.10), так и (9.2.11) в интегральное уравнение (9.2.4), получаем

$$\psi(\mathbf{r}^S) = -\mu \sum_\alpha A_\alpha(k) \chi_\alpha(S) \int \bar{\chi}_\alpha(S_0) F(S_0) \psi(S_0) dS_0.$$

Разлагая  $\psi(\mathbf{r}^S)$  по функциям  $\chi_\alpha(S)$ ,

$$\psi(\mathbf{r}^S) = \sum_\gamma c_\gamma \chi_\gamma(S),$$

и подставляя в обе части последнего уравнения, имеем

$$c_\alpha = -\mu A_\alpha(k) \sum_\gamma c_\gamma F_{\alpha\gamma} \quad \text{для каждого } \alpha,$$

где

$$F_{\alpha\gamma} = \int \bar{\chi}_\alpha F \chi_\gamma dS. \quad (9.2.12)$$

Снова ненулевые решения этой системы уравнений можно получить только при условии, что определитель системы равен нулю, т. е.

$$\left| F_{\alpha\gamma} + \frac{1}{\mu A_\alpha} \delta_{\alpha\gamma} \right| = 0.$$

Можно получить для этого определителя несколько более симметричную форму

$$\left| \sqrt{A_\alpha A_\gamma} F_{\alpha\gamma} + \frac{1}{\mu} \delta_{\alpha\gamma} \right| = 0. \quad (9.2.13)$$

Это—вековое уравнение для  $1/\mu$ . Сравнивая его со стандартными формами, использованными в предыдущем параграфе, мы видим, что здесь тоже можно использовать и итерационно-пертурбационные формулы (модифицированные или немодифицированные) и формулы Финберга, если провести следующие отождествления:

$$k^2 - k_p^2 - \lambda U_{pp} \rightarrow \frac{1}{\mu} + A_\alpha F_{\alpha\alpha}, \quad -\lambda U_{pq} = \sqrt{A_\alpha A_\gamma} F_{\alpha\gamma}. \quad (9.2.14)$$

Формулы Фредгольма (модифицированные и немодифицированные) и вариационно-пертурбационные формулы можно использовать, если  $E - \varepsilon_p + \lambda B_{pp}$  заменить на  $(1/\mu) + A_\alpha F_{\alpha\alpha}$  и  $\lambda B_{pq}$  на  $\sqrt{A_\alpha A_\gamma} F_{\alpha\gamma}$ . Например, для  $\alpha$ -го собственного значения  $1/\mu_\alpha$  модифицированная итерационно-пертурбационная формула дает:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_\alpha} = & -A_\alpha F_{\alpha\alpha} + \sum_{\gamma \neq \alpha} \frac{A_\alpha A_\gamma F_{\alpha\gamma} F_{\gamma\alpha}}{(1/\mu_\alpha) + A_\gamma F_{\gamma\gamma}} \\ & - \sum_{\substack{\gamma \delta \neq \alpha \\ \delta \neq \gamma}} \frac{A_\alpha A_\gamma A_\delta F_{\alpha\gamma} F_{\gamma\delta} F_{\delta\alpha}}{[(1/\mu_\alpha) + A_\gamma F_{\gamma\gamma}] [(1/\mu_\alpha) + A_\delta F_{\delta\delta}]} + \dots \end{aligned} \quad (9.2.15)$$

Этим мы закончим (кроме примера) наше рассмотрение граничного условия  $(\partial\psi/\partial n) + f\psi = 0$  при малом  $f$ .

Возмущение в граничных условиях,  $f$  велико. Рассмотрим теперь случай, когда  $f$  велико. Соответствующей системой невозмущенных решений будет та, которая удовлетворяет условиям Дирихле. Мы выберем также и функцию Грина, которая удовлетворяет тем же условиям. При таких условиях уравнение (9.2.2), как читатель может проверить, замечается уравнением

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial G_h}{\partial n_0} \psi(\mathbf{r}_0^S) dS_0.$$

Подставляя граничные условия для функции  $\psi$ , получаем аналогично (9.2.3)

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial G_h}{\partial n_0} \cdot \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.2.16)$$

Таким образом, значения  $\psi$  внутри можно снова получить, как только известны значения производной  $\partial\psi/\partial n_0$  на поверхности.

Интегральное уравнение для последней производной получается, если взять нормальную производную от обеих частей, положив

$$\frac{\partial\psi(\mathbf{r}^S)}{\partial n} = V(S); \quad (9.2.17)$$

тогда

$$V(S) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial^2 G_k}{\partial n \partial n_0} \frac{1}{f} V(S_0) dS_0. \quad (9.2.18)$$

Ядро этого интегрального уравнения,  $\frac{\partial^2 G_k}{\partial n \partial n_0}$ , нужно вычислять осторожно, имея в виду разрывность  $G_k$  как функции точки наблюдения, когда точечный источник находится на поверхности (см. § 7.2). Поэтому мы уточним смысл  $\frac{\partial^2 G_k}{\partial n \partial n_0}$  следующим образом:

$$\frac{\partial^2 G_k}{\partial n \partial n_0} = \lim_{\mathbf{r} \rightarrow S} \left[ \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n_0} G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^S) \right],$$

где  $\mathbf{r}$  приближается к  $S$  изнутри. Чтобы вычислить этот предел, удобно сначала исследовать аффино́р

$$\nabla G_k \nabla_0,$$

из которого получается ядро уравнения (9.2.18) как скалярное произведение  $\mathbf{n} \cdot \nabla G_k \nabla_0 \cdot \mathbf{n}_0$ .

Разложение этого аффино́ра по функциям  $\varphi_n$ , удовлетворяющим условиям Дирихле на поверхности  $S$ , следующее:

$$4\pi \sum_n \frac{\nabla \varphi_n(\mathbf{r}) \nabla_0 \bar{\varphi}_n(\mathbf{r}_0)}{k_n^2 - k^2}.$$

Мы выделим из этого разложения члены с большими  $n$ , так как эти члены определяют особенность:

$$4\pi k^2 \sum_n \frac{\nabla \varphi_n(\mathbf{r}) \nabla_0 \bar{\varphi}_n(\mathbf{r}_0)}{k_n^2 (k_n^2 - k^2)} + 4\pi \sum_n \frac{\nabla \varphi_n(\mathbf{r}) \nabla_0 \bar{\varphi}_n(\mathbf{r}_0)}{k_n^2}.$$

Второй член можно исследовать быстро, так как векторные функции

$$\mathbf{v}_n = \frac{\nabla \varphi_n}{k_n} \quad (9.2.19)$$

образуют ортонормальную систему, которую можно использовать для описания любого вектора, циркуляция которого равна нулю (см. § 13.1). Можно легко проверить, используя теорему Грина, что

$$\int \bar{\mathbf{v}}_n \cdot \mathbf{v}_m dV = \delta_{nm}.$$

Полезно ввести понятие сингулярного аффино́ра  $\mathfrak{D}_l$ , определяемого уравнением [см. (13.1.30)]

$$\mathfrak{D}_l(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) = \sum_n \mathbf{v}_n(\mathbf{r}) \mathbf{v}_n(\mathbf{r}_0) = \sum_n \mathbf{v}_n(\mathbf{r}) \int \bar{\mathbf{v}}_n(\mathbf{r}') \cdot \mathfrak{D}_l dV,$$

так что сумма  $\mathfrak{D}_l$  удовлетворяет условию

$$\int \bar{\mathbf{v}}_n(\mathbf{r}) \cdot \mathfrak{D}_l(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) dV = \bar{\mathbf{v}}_n(\mathbf{r}_0).$$

Так как это соотношение справедливо для всех  $n$ , то оно справедливо и для любого безвихревого вектора  $\mathbf{A}$ :

$$\int \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathfrak{D}_l(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0) dV = \mathbf{A}(\mathbf{r}_0), \quad \text{rot } \mathbf{A} = 0. \quad (9.2.20)$$

Более того, так как  $\mathbf{A}$  — любой безвихревой вектор, то отсюда следует, что  $\mathfrak{D}_l$  должен иметь при  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$  особенность, очень похожую на особенность  $\delta$ -функции Дирака, равной нулю везде, кроме  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ . Это можно видеть, выбирая вектор  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , который равен нулю при  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ , но конечен в других точках. Для произвольного  $\mathbf{A}$  уравнение (9.2.20) удовлетворяется, только если  $\mathfrak{D}_l(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$  равно нулю при  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$ .

Это все, в чем мы нуждаемся, чтобы вычислить  $\partial^2 G_k / \partial n \partial n_0$ ; но мы должны добавить, что  $\mathfrak{D}_l(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$  появится снова в гл. 13, где  $\mathfrak{D}_l$  будет рассматриваться как безвихревая часть (называемая там продольной) аффинора  $\circ(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \mathfrak{Z}$ , где  $\mathfrak{Z}$  — единичный оператор (идемфактор) (см. 13.1.31). Кроме того,

$$\mathfrak{G}_k = 4\pi \sum_n \frac{\nabla \varphi_n(\mathbf{r}) \cdot \nabla_0 \bar{\varphi}_n(\mathbf{r}_0)}{k_n^2 (k_n^2 - k^2)} \quad (9.2.21)$$

упоминается в гл. 13 как продольный аффинор Грина.

Уравнения (9.2.16) и (9.2.18) можно теперь переписать, введя в них функцию  $\mathfrak{G}_k$ , причем мы отбрасываем  $\mathfrak{D}_l$ , так как он равен нулю при  $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$ :

$$\nabla \psi(\mathbf{r}) = \frac{k^2}{4\pi} \int \mathfrak{G}_k \cdot \mathbf{n}_0 \frac{1}{f} \frac{\partial \psi}{\partial n_0} dS_0 \quad (9.2.22)$$

и [см. (9.2.18)]

$$V(S) = \frac{k^2}{4\pi} \int \mathbf{n} \cdot \mathfrak{G}_k \cdot \mathbf{n}_0 \frac{1}{f} V(S_0) dS_0. \quad (9.2.23)$$

Мы можем получить вековые уравнения, подобные уравнениям (9.2.7) и (9.2.13). Чтобы получить первое из них, разложим  $\nabla \psi$  по векторам (9.2.19),

$$\nabla \psi = \sum c_p \mathbf{v}_p = \sum \frac{c_p}{k_p} \nabla \varphi_p, \quad (9.2.24)$$

и подставим в (9.2.22). Тогда

$$c_p = \sum_q c_q \frac{k^2}{k_p k_q (k_p^2 - k^2)} \int \frac{\partial \bar{\varphi}_p}{\partial n_0} \frac{1}{f} \frac{\partial \varphi_q}{\partial n_0} dS_0.$$

Характеристическое уравнение, определяющее собственное значение  $k$ , будет иметь вид

$$\left| (k^2 - k_p^2) \delta_{pq} + \left( \frac{1}{f} \right)_{pq} \right| = 0, \quad (9.2.25)$$

где

$$\left( \frac{1}{f} \right)_{pq} = \frac{1}{k_p k_q} \int \frac{\partial \bar{\varphi}_p}{\partial n_0} \frac{1}{f} \frac{\partial \varphi_q}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.2.26)$$

Теперь можно получить различные пертурбационные формулы, установив соответствие со стандартными формами этого уравнения в § 9.1. Итерационно-пертурбационные формулы в этом случае можно вывести, заменив  $f_{pq}$  на  $-(1/f)_{pq}$  в (9.2.8). Условия на сходимость отдельных рядов ограничивают возможные особенности в  $1/f$ , не допуская особенностей, более сильных, чем конечные разрывы.

Чтобы получить вековой определитель, аналогичный (9.2.13), мы должны не только ввести определение (9.2.11),  $f(S) = \mu F(S)$ , но должны также найти разложение  $\mathbf{n} \cdot \mathcal{G}_k \cdot \mathbf{n}_0$ , подобное разложению (9.2.10) для  $G_k$ . Для этой цели заметим, что

$$\mathcal{G}_k = \nabla G_k \nabla_0 - \nabla G_0 \nabla_0.$$

Следовательно, если, как установлено в формуле (7.2.63) [см. также (9.2.10)],  $G_k$  можно разложить в разделяющихся переменных следующим образом:

$$G_k(S, \xi | S_0, \xi_0) = 4\pi \sum_{\alpha} \bar{\chi}_{\alpha}(S) \chi_{\alpha}(S_0) \bar{\Xi}_{\alpha}(\xi, k) \Xi_{\alpha}(\xi_0, k),$$

где  $\xi$  — нормальная к  $S$  координата, то функции  $\chi_{\alpha}$  образуют полную ортонормальную систему относительно всех переменных, кроме  $\xi$ . Форма произведения функций, зависящих от  $\xi$  и  $\xi_0$ , зависит от того, больше  $\xi_0$ , чем  $\xi$ , или меньше. Предположим, что значение  $\xi$  на поверхности  $S$  меньше, чем внутри. В приведенном выше приложении мы использовали выражение, соответствующее случаю  $\xi > \xi_0$ .

Мы можем теперь написать

$$\mathbf{n} \cdot \mathcal{G}_k \cdot \mathbf{n}_0 = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(S) \bar{\chi}_{\alpha}(S_0) \left[ \frac{\partial \Xi_{\alpha}(\xi, k)}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\Xi}_{\alpha}(\xi_0, k)}{\partial \xi_0} - \frac{\partial \Xi_{\alpha}(\xi, 0)}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{\Xi}_{\alpha}(\xi_0, 0)}{\partial \xi_0} \right],$$

где производные вычисляются для  $\xi$  и  $\xi_0$ , лежащих на поверхности, или, в более краткой форме,

$$\mathbf{n} \cdot \mathcal{G}_k \cdot \mathbf{n}_0 = 4\pi \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(S) \bar{\chi}_{\alpha}(S_0) B_{\alpha}(k). \quad (9.2.27)$$

Если теперь в (9.2.23) подставить разложение для  $V$  по функциям  $\chi_{\alpha}$ , то характеристическое уравнение получается окончательно следующим:

$$\left| \mu \hat{\partial}_{\alpha\gamma} - \sqrt{B_{\alpha} B_{\gamma}} \left( \frac{1}{F} \right)_{\alpha\gamma} \right| = 0, \quad (9.2.28)$$

где

$$\left( \frac{1}{F} \right)_{\alpha\gamma} = \int \bar{\chi}_{\alpha} \frac{1}{F} \chi_{\gamma} dS. \quad (9.2.29)$$

Результаты § 9.1 можно теперь применить к вековому уравнению, что уже знакомо читателю.

Подведем итоги обсуждения этого вопроса. Были выведены вековые уравнения, решение которых дает решение скалярного уравнения Гельмгольца  $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ , где  $\psi$  удовлетворяет смешанным граничным условиям:  $(\partial \psi / \partial n) + f \psi = 0$ . Уравнения (9.2.7) и (9.2.13) применимы при малых  $f$ , (9.2.25) и (9.2.28) — при больших. Уравнения (9.2.13) и (9.2.28) более удобны, если скалярное уравнение Гельмгольца можно решить разделением переменных для однородных условий Неймана и Дирихле соответственно. В противном случае надо использовать (9.2.7) и (9.2.25). Когда получено вековое уравнение, можно применять результаты § 9.1. Эти формулы пригодны до тех пор, пока сходятся отдельные ряды, входящие в решение, что будет иметь место в разбираемом случае, если у функции  $f$  нет особенностей, более сильных, чем разрывы. Действительно, если  $f$  имеет особенность типа дельта-функции  $\delta(S - S')$ , то из первоначального интегрального уравнения непосредственно ясно, что решения не существует. Это указывает на то, что если  $f$  (или  $1/f$ ) отличается от нуля только в небольшой области, то практически сходимость в формулах (9.2.25) и (9.2.28) получается плохой.



В качестве примера рассмотрим сумму

$$\sum_{q \neq p} \frac{f_{pq} f_{qp}}{k^2 - k_q^2 - f_{qq}}.$$

Интегралы  $f_{pq}$  и  $f_{qp}$  будут уменьшаться для больших  $q$ , как  $1/k_q$ , так что сходимость обеспечена. Однако эта асимптотическая зависимость не достигается до тех пор, пока длина волны функции  $\varphi_q$  не станет значительно меньше, чем область, в которой  $f$  отлична от нуля. Следовательно,

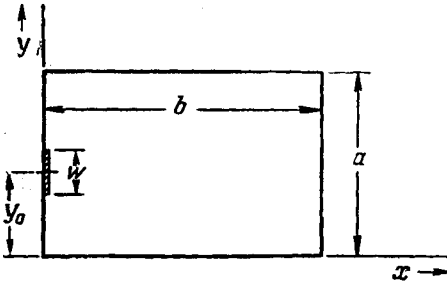


Рис. 9.2. Волны в прямоугольнике со специальными отражающими свойствами вдоль области длины  $w$ .

если такая область невелика, необходимо взять много членов в сумме, прежде чем множитель  $1/k_q^2$  станет существенным и сделает ряд сходящимся. Конечно, если такая область есть просто точка, как в случае дельта-функции, то это никогда не произойдет, и ряд расходится. Способ, которым можно обойти эту трудность в теории возмущений, будет показан на следующем примере.

Мы требуем, чтобы решение скалярного уравнения Гельмгольца удовлетворяло однородным условиям Неймана везде, кроме области на граничной линии  $x=0$  с центром  $y_0$ , т. е. для  $(y_0 - \omega/2) < y < (y_0 + \omega/2)$ . В этой области  $\psi$  удовлетворяет условию  $(\partial\psi/\partial n) + \mu\psi = 0$  или, более точно,  $-(\partial\psi/\partial x) + \mu\psi = 0$ , где  $\mu = \text{const}$ . Другими словами,  $f$  в уравнении (9.2.1) равно нулю везде, за исключением области ширины  $\omega$  с центром в  $y_0$ , где  $f$  равно постоянной  $\mu$ .

**Пример.** Рассмотрим двумерную задачу, в которой граничная поверхность представляет собой прямоугольник со сторонами  $a$  и  $b$  (см. рис. 9.2).

Так как невозмущенную задачу можно решить разделением переменных, в данной задаче удобнее использовать метод, изложенный в тексте после формулы (9.2.9) и приводящий в конце концов к вековому уравнению (9.2.13). Решениями  $\varphi_n$  невозмущенной задачи являются

$$\varphi_{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta}{ab}} \cos\left(\frac{\pi\beta x}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi\alpha y}{a}\right); \quad \alpha \text{ и } \beta - \text{целые.}$$

В соответствии с обозначениями (9.2.9)

$$\chi_\alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon_\alpha}{a}} \cos\left(\frac{\pi\alpha y}{a}\right), \quad \Xi_\beta = \sqrt{\frac{\varepsilon_\beta}{b}} \cos\left(\frac{\pi\beta x}{b}\right)$$

Функцию Грина  $G_h(x, y | x_0, y_0)$  можно получить согласно рецепту, данному в гл. 7:

$$G_h = -4\pi \sum_\alpha \chi_\alpha(y) \chi_\alpha(y_0) \frac{\text{cosec}[\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2} b]}{\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2}} \times \begin{cases} \cos[\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2} x] \cos[\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2} (b - x_0)] & \text{при } x < x_0, \\ \cos[\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2} (b - x)] \cos[\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2} x_0] & \text{при } x > x_0. \end{cases}$$

Полагая на поверхности  $x = x_0 = 0$ , мы получаем

$$G_h(S | S_0) = -4\pi \sum_\alpha \chi_\alpha(y) \chi_\alpha(y_0) \frac{\text{ctg}[\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2} b]}{\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2}}, \quad (9.2.30)$$

так что множитель  $A_\alpha(k)$ , который появляется в формуле (9.2.10), равен

$$A_\alpha(k) = -\frac{\operatorname{ctg} [\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2} b]}{\sqrt{k^2 - (\pi\alpha/a)^2}}.$$

Для векового уравнения (9.2.13) требуется найти, кроме величин  $A_\alpha$ , еще и  $F_{\alpha\gamma}$ , определенные в (9.2.12). В данном случае

$$F_{\alpha\gamma} = \int_{y_0 - w/2}^{y_0 + w/2} \chi_\alpha \chi_\gamma dy = \sqrt{\frac{\varepsilon_\alpha \varepsilon_\gamma}{a^2}} \int_{y_0 - w/2}^{y_0 + w/2} \cos\left(\frac{\pi\alpha y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi\gamma y}{a}\right) dy,$$

или

$$F_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_\alpha \varepsilon_\gamma}{a^2}} \left[ \frac{\sin\left[\frac{\pi}{a}(a+\gamma)y\right]}{\frac{\pi}{a}(a+\gamma)} + \frac{\sin\left[\frac{\pi}{a}(a-\gamma)y\right]}{\frac{\pi}{a}(a-\gamma)} \right]_{y_0 - w/2}^{y_0 + w/2} \quad (9.2.31)$$

и

$$F_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_\alpha}{a} \left[ y + \frac{\sin\frac{2\pi\alpha y}{a}}{2\pi\alpha} \right]_{y_0 - w/2}^{y_0 + w/2} \quad (9.2.32)$$

Эти результаты можно теперь подставить в различные пертурбационные формулы, выведенные в § 9.1. Здесь мы удовлетворимся исследованием итерационно-пертурбационной формулы до второго порядка включительно, которая получится в данном случае из (9.2.15):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_\alpha A_\alpha} = & -\frac{1}{2} \varepsilon_\alpha \left[ \frac{y}{a} + \frac{\sin\frac{2\pi\alpha y}{a}}{2\pi\alpha} \right] - \frac{1}{4} \sum_{\gamma \neq \alpha} \varepsilon_\alpha \varepsilon_\gamma \frac{\operatorname{ctg} \left[ \sqrt{(ka)^2 - (\pi\gamma)^2} \frac{b}{a} \right]}{\sqrt{(ka)^2 - (\pi\gamma)^2}} \times \\ & \times \frac{\left\{ \frac{\sin\left[\pi(a+\gamma)\frac{y}{a}\right]}{\pi(a+\gamma)} + \frac{\sin\left[\pi(a-\gamma)\frac{y}{a}\right]}{\pi(a-\gamma)} \right\}^2}{\frac{1}{\mu_\alpha a} + \frac{1}{2} \varepsilon_\gamma \left[ \frac{y}{a} + \frac{\sin\left(2\pi\gamma\frac{y}{a}\right)}{2\pi\gamma} \right]}; \quad (9.2.33) \end{aligned}$$

здесь в каждую отдельную функцию от  $y$  надо подставить вместо  $y$  пределы  $y_0 + w/2$  и  $y_0 - w/2$ , как указано в (9.2.31) и (9.2.32). Заметим, что в числителе эти подстановки нужно сделать до возведения в квадрат. Сходимость этого ряда хорошая, так как для больших  $\gamma$  члены ряда аппроксимируются выражением

$$\frac{-8\varepsilon_\alpha}{(\pi\gamma)^3} \frac{\left\{ \cos\left(\pi\alpha\frac{y}{a}\right) \sin\left(\pi\gamma\frac{y}{a}\right) \right\}^2}{\frac{1}{\mu_\alpha a} + \frac{w}{a}},$$

или, подставляя пределы,

$$\frac{-8\varepsilon_\alpha [\sin(\pi\gamma\eta_0^+) \cos(\pi\alpha\eta_0^+) - \sin(\pi\gamma\eta_0^-) \cos(\pi\alpha\eta_0^-)]^2}{(\pi\gamma)^3} \frac{1}{\frac{1}{\mu_\alpha a} + \frac{w}{a}}, \quad (9.2.34)$$

где введены сокращенные обозначения

$$\eta_0 = \frac{y_0}{a}; \quad \eta = \frac{y}{a}; \quad \eta_0^+ = \frac{y_0 + w/2}{a}; \quad \eta_0^- = \frac{y_0 - w/2}{a}.$$

Рассмотрим теперь, при каких значениях  $\gamma$  асимптотическая форма  $O(\gamma^{-3})$  слагаемых в (9.2.33) становится существенной, так как тогда мы сможем приблизительно знать, какое количество членов ряда нужно подсчитать, чтобы получить точное значение для суммы. Конечно, необходимо, чтобы  $\mu \gg a$ ,  $\pi\gamma \gg ka$  и  $\pi\gamma b/a \gg 1$ . Другое условие станет более очевидным, если подставить пределы в члены  $\sin[\pi(\alpha \pm \gamma)\eta]/\pi(\alpha \pm \gamma)$ . После подстановки получаем

$$\frac{2\cos[\pi(\alpha \pm \gamma)\eta_0] \sin\left[\pi(\alpha \pm \gamma)\frac{\omega}{2a}\right]}{\pi(\alpha \pm \gamma)}$$

Теперь ясно, что асимптотическая зависимость будет иметь силу, лишь если  $\gamma$  настолько велико, что

$$(\alpha \pm \gamma)\frac{\omega}{a} > 1. \quad (9.2.35)$$

Если это условие не выполняется, т. е. если  $(\alpha \pm \gamma)\omega \ll a$ , то

$$\frac{\sin\left[\pi(\alpha \pm \gamma)\frac{\omega}{2a}\right]}{\pi(\alpha \pm \gamma)} \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \frac{\omega}{2a}$$

и дробь не будет иметь вида  $O(\gamma^{-1})$ , который получится, если удовлетворяется условие (9.2.35).

Таким образом, даже для больших  $\gamma$  члены ряда в (9.2.33) убывают очень медленно до тех пор, пока не начинает удовлетворяться неравенство (9.2.35). Мы видим, что число членов, необходимое для точного вычисления, равно приблизительно  $a/\omega$ , так что ряд (9.2.33) неудобен при малом  $\omega/a$ .

**Формулы для малого  $\omega$ .** Чтобы обойти это затруднение, мы вычтем ряд, полученный суммированием (9.2.34) от единицы до  $\infty$ . Члены оставшегося ряда будут тогда порядка  $\gamma^{-5}$  для больших  $\gamma$ , если удовлетворяется (9.2.35), и порядка  $\gamma^{-3}$  в противном случае, так что ряд вполне пригоден даже, когда  $\omega$  приближается к нулю. Трудности, которые мы имели в первоначальном ряде, теперь перешли в вычитаемый ряд. Более определенно, пусть

$$S(\eta) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi\gamma\eta)}{\gamma^3} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{\omega}{a}. \quad (9.2.36)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_a A_a} &= -\frac{1}{2} \varepsilon_a \left[ \omega + \frac{\sin(\pi a \omega) \cos(2\pi a \eta_0)}{\pi a} \right] + \\ &+ \frac{\varepsilon_a}{\pi^3 [\omega + (1/\mu_a a)]} \left\{ \cos^2(\pi a \eta_0^+) [S(0) - S(2\eta_0^+)] + \cos^2(\pi a \eta_0^-) [S(0) - S(2\eta_0^-)] - \right. \\ &- 2 \cos(\pi a \eta_0^+) \cos(\pi a \eta_0^-) [S(\omega) - S(\eta_0^+ + \eta_0^-)] - \frac{2}{a^3} \sin^2(\pi a \omega) \cos^2(2\pi a \eta_0) \left. \right\} - \\ &- \frac{1}{4} \sum_{\gamma \neq a} \varepsilon_a \varepsilon_\gamma \left\{ \frac{\operatorname{ctg} \left[ \sqrt{(ka)^2 - (\pi\gamma)^2} \frac{b}{a} \right] \left\{ \frac{\sin[\pi(\alpha + \gamma)\eta]}{\pi(\alpha + \gamma)} + \frac{\sin[\pi(\alpha - \gamma)\eta]}{\pi(\alpha - \gamma)} \right\}^2}{\sqrt{(ka)^2 - (\pi\gamma)^2} \left\{ \frac{1}{\mu_a a} + \frac{1}{2} \varepsilon_\gamma \left[ \eta + \frac{\sin(2\pi\gamma\eta)}{2\pi\gamma} \right] \right\}} + \right. \\ &\left. + \frac{4(1 - \delta_{0\gamma})}{(\pi\gamma)^3} \frac{[\cos(\pi a \eta) \sin(\pi\gamma\eta)]^2}{\frac{1}{\mu_a a} + \omega} \right\}, \quad (9.2.37) \end{aligned}$$

где пределы  $\eta = \eta_0^+$ ,  $\eta_0^-$  по-прежнему должны быть подставлены в последней части этого равенства. Множитель  $1 - \epsilon_0 \gamma$  указывает на то, что в сумме опускается член с  $\gamma = 0$ .

Мы перейдем теперь к исследованию поведения правой части равенства (9.2.37) для малого  $\omega$ .

Нам нужны некоторые свойства  $S(\eta)$ . Сумму, полученную двукратным дифференцированием  $S(\eta)$ , можно выразить в замкнутой форме:

$$S''(\eta) = -\pi^2 \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi\gamma\eta)}{\gamma} = \frac{\pi^2}{2} \ln [2(1 - \cos \pi\eta)].$$

Для малого  $\eta$

$$S''(\eta) \underset{\eta \rightarrow 0}{\simeq} \pi^2 \ln(\pi\eta). \tag{9.2.38}$$

Последовательным интегрированием получаем

$$S'(\eta) = -\pi \sum_{\gamma=1}^{\infty} \left[ \sin \frac{\pi\gamma\eta}{\gamma^2} \right] \simeq \pi^2 \eta [\ln \eta + \ln \pi - 1] \tag{9.2.39}$$

и

$$S(\eta) \underset{\eta \rightarrow 0}{\simeq} S(0) + \frac{\pi^2 \eta^2}{2} \left[ \ln \eta - \frac{3}{2} + \ln \pi \right]. \tag{9.2.40}$$

Графики сумм  $S(\eta)$  и  $-\frac{1}{\pi} S'(\eta)$  приведены на рис. 9.3 и 9.4.

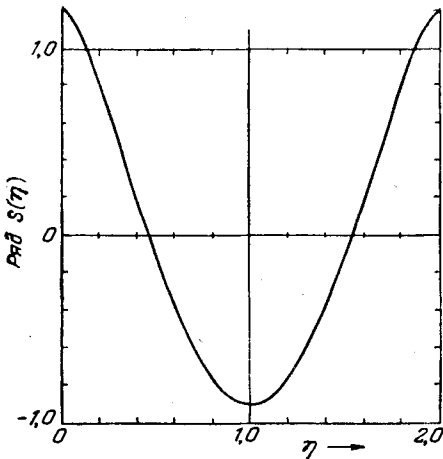


Рис. 9.3. Корректирующий ряд  $S(\eta)$  [определенный формулой (9.2.36)] для эффекта неоднородности граничных условий.

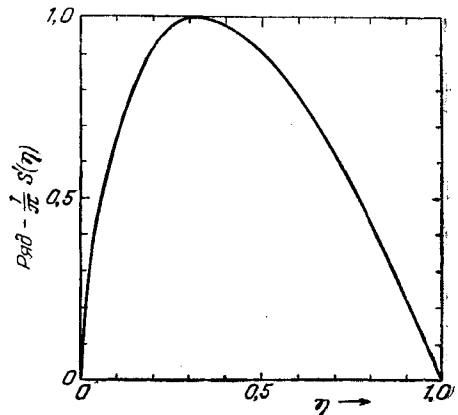


Рис. 9.4. Производная ряда  $S(\eta)$  как функция от  $\eta$ .

Приведенные выше приближенные формулы справедливы в области  $0 \leq \eta \leq 0,5$ . Из равенства (9.2.37) мы можем теперь обнаружить невозможность особенности типа  $\delta$ -функции, т. е. случая, когда  $f(S)$  в (9.2.1) равна  $\delta(y - y_0)$ . Это можно получить из формул (9.2.37) и (9.2.40), полагая  $\omega \rightarrow 0$  и  $\mu_\alpha \rightarrow \infty$ , причем  $\mu_\alpha \omega \rightarrow C_\alpha = \text{const}$ . Тогда из-за наличия  $S(\omega)$  появляется член с логарифмической особенностью, указывающей, возможно, на несостоятельность в этом случае теории возмущений.

Этот результат не случаен, поскольку, как мы покажем сейчас, если  $f(S) = C\delta(S - S')$ , где  $S'$  — точка на поверхности, то не существует ко-

нечного решения интегрального уравнения, определяющего  $\psi$ . Подставляя это выражение для  $f$  в интегральное уравнение (9.2.4), получаем

$$\psi(S) = -\frac{C}{4\pi} G_k(S|S') \psi(S'). \quad (9.2.41)$$

Чтобы определить  $k^2$  (или  $C$ ), мы должны положить  $S = S'$  и найти величину  $k^2$ , которая делает уравнение разрешимым:

$$\frac{4\pi}{C} = -\lim_{S' \rightarrow S} G_k(S|S').$$

В двумерной задаче, рассматриваемой здесь,  $G_k(S|S')$  имеет логарифмическую особенность при  $S = S'$ , независимо от  $k$ , а следовательно, при ненулевых  $C$  не существует решения интегрального уравнения.

**Длинный узкий прямоугольник.** Много членов в рядах теории возмущений нужно вычислять также и при малом значении  $b/a$ , т. е. когда прямоугольник длинный и узкий. Мы можем провести разложение каждого члена в ряд по степеням  $b/a$ . Однако, оказывается, более просто разложить саму функцию Грина. Из (9.2.30) при помощи ряда  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + \dots$  получаем

$$G_k(0, y|0, y_0) \simeq \frac{4\pi}{b} \sum_{\alpha} \frac{\chi_{\alpha}(y) \chi_{\alpha}(y_0)}{\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right)^2 - k^2} + \frac{4\pi b}{3} \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(y) \chi_{\alpha}(y_0).$$

Первая сумма с точностью до множителя  $1/b$  равна функции Грина для одномерной задачи

$$\Gamma_k(y|y_0) = 4\pi \sum_{\alpha} \frac{\chi_{\alpha}(y) \chi_{\alpha}(y_0)}{\left(\frac{\pi\alpha}{a}\right)^2 - k^2}.$$

При этом

$$\frac{d^2 \Gamma_k}{dy^2} + k^2 \Gamma_k = -4\pi \delta(y - y_0).$$

Вторая сумма пропорциональна  $\delta(y - y_0)$ . Поэтому окончательно

$$G_k(0, y|0, y_0) \simeq \frac{1}{b} \Gamma_k(y|y_0) + \frac{4\pi b}{3} \delta(y - y_0). \quad (9.2.42)$$

Если мы возьмем больше членов в разложении котангенса, в (9.2.42) добавятся высшие производные дельта-функции. Подстановка (9.2.42) в интегральное уравнение (9.2.4) дает

$$\psi(y) = -\frac{1}{4\pi b} \int f(y_0) \Gamma_k(y|y_0) \psi(y_0) dy_0 - \frac{b}{3} f(y) \psi(y).$$

Это интегральное уравнение эквивалентно дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2}{dy^2} \left(1 + \frac{b}{3} f\right) \psi + \left(k^2 - \frac{f}{b}\right) \psi = 0 \quad (9.2.43)$$

с граничными условиями

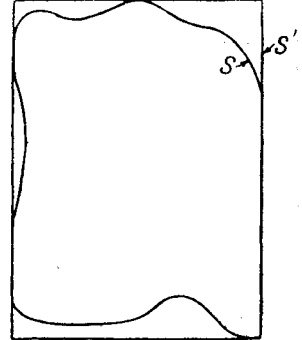
$$\frac{d}{dy} \left(1 + \frac{b}{3} f\right) \psi = 0 \quad \text{при } y = 0 \text{ и } y = a.$$

Если  $f$  — достаточно простая функция, как это имеет место в рассматриваемом случае, то дифференциальное уравнение (9.2.43) можно решить и получить функцию  $\psi$  на поверхности и величину собственного

значения  $k^2$ . Если функция  $\psi$  на поверхности известна, то с помощью (9.2.3) можно получить  $\psi$  внутри области. Мы видим, таким образом, что если  $b$  достаточно мало, то эффект изменения граничных условий настолько локализован, что учитывается дифференциальным уравнением лучше, чем интегральным.

**Возмущение формы границы.** Рассмотрим теперь, как отражаются на собственных значениях и собственных функциях изменения в форме граничной поверхности. Пусть  $S'$  — первоначальная поверхность, а  $S$  — искривленная (см. рис. 9.5).

Аналогично, область, ограниченную поверхностью  $S'$ , обозначим через  $R'$ , а область, ограниченную поверхностью  $S$ , — через  $R$ . На чертеже  $R$  заключена внутри  $R'$ . Это существенно, если мы хотим выразить собственные функции для области  $R$  через собственные функции области  $R'$ . Мы ограничимся снова рассмотрением уравнения Гельмгольца и однородных граничных условий Неймана или Дирихле. Предположим, что собственные функции  $\varphi_n$ , удовлетворяющие этим граничным условиям на поверхности  $S'$ , и соответствующие им собственные значения  $k_n^2$  известны, так что



$$\nabla^2 \varphi_n + k_n^2 \varphi_n = 0. \quad (9.2.44)$$

Займемся теперь выводом интегрального уравнения для функции  $\psi$ , удовлетворяющей граничным условиям на поверхности  $S$  и уравнению

Р и с. 9.5. Возмущение формы границы от простой формы  $S'$  к искривленной  $S$ .

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0.$$

Интегральное уравнение вытекает из интегрального представления функции  $\psi$  через функцию Грина  $G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0)$ , удовлетворяющую граничным условиям на  $S'$ , и через саму функцию  $\psi$ , которое можно получить прямо применением теоремы Грина к уравнению (9.2.2):

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left\{ G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^S) \frac{\partial \psi}{\partial n_0} - \psi \frac{\partial G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^S)}{\partial n_0} \right\} dS_0. \quad (9.2.45)$$

Мы обращаем внимание на то, что этот интеграл представляет  $\psi$  *только внутри*  $S$ , будучи равным нулю вне ее.

Теперь нужно уточнить граничные условия. Рассмотрим сначала однородные условия Неймана на поверхности  $S$ . Выберем  $G_k$  и  $\varphi_n$  удовлетворяющими однородным условиям Неймана на поверхности  $S'$ ; тогда (9.2.45) приобретает вид

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \psi \frac{\partial G_k(\mathbf{r} | \mathbf{r}_0^S)}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.2.46)$$

Мы видим опять, что если функция  $\psi$  на поверхности  $S$  известна, то ее можно вычислить для любого  $\mathbf{r}$  внутри поверхности с помощью (9.2.46). Интегральное уравнение получится, если взять  $\mathbf{r}$  лежащим на поверхности  $S$ :

$$\psi(S) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \psi(S_0) \frac{\partial G_k(S | S_0)}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.2.47)$$

Сведем затем равенства (9.2.46) и (9.2.47) к эквивалентным им вектовым уравнениям, к которым можно применить технику, описанную в § 9.1. Так как функция, определяемая интегралом в (9.2.46), равна нулю вне  $S$  и, следовательно, имеет разрыв при переходе через  $S$ , ее разложение по функциям  $\varphi_n$  сходится не слишком хорошо. Это приводит к мысли, что разложение по функциям, равным  $\varphi_n$  внутри области, ограниченной  $S$ , и нулю вне этой области, будет более подходящим. Мы обозначим эти функции через  $\Phi_n$ . Пусть тогда

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_p c_p \Phi_p. \quad (9.2.48)$$

Подставляем (9.2.48) в обе части равенства (9.2.46) и используем разложения (предполагая, что  $\varphi_p$  действительны)

$$G_k = 4\pi \sum_q \frac{\varphi_q(\mathbf{r}_0) \varphi_q(\mathbf{r})}{k_q^2 - k^2}$$

и

$$\Phi_p = \sum_q N_{qp} \varphi_q, \quad N_{pq} = \int_R \varphi_p \Phi_q dV, \quad (9.2.49)$$

где значок  $R$  означает, что интеграл берется только по области  $R$ . Получается следующая система уравнений для вычисления  $c_p$ :

$$\sum_p c_p [N_{qp} (k^2 - k_q^2) - A_{qp}] = 0 \text{ для каждого } q, \quad (9.2.50)$$

где

$$A_{qp} = \int \frac{\partial \varphi_q}{\partial n} \varphi_p dS. \quad (9.2.51)$$

Уравнения (9.2.50) — точно такие же, как уравнения (9.1.95), полученные при рассмотрении теории возмущений в случае неортогональных функций. Мы отождествим

$$EN_{pp} - H_{pp} \text{ с } (k^2 - k_p^2) N_{pp} - A_{pp}$$

и

$$H_{pq} - EN_{pq} \text{ с } A_{pq} - (k^2 - k_p^2) N_{pq}.$$

Теперь можно непосредственно использовать выражение (9.1.98) для того, чтобы получить разложение функции  $\psi$ . Формула второго порядка для  $\psi$  дает

$$\begin{aligned} \psi = \Phi_n + \sum_{p \neq n} \frac{A_{pn} - (k^2 - k_p^2) N_{pn}}{N_{pp} (k^2 - k_p^2) - A_{pp}} \Phi_p + \\ + \sum_{\substack{q, p \neq n \\ q \neq p}} \frac{[A_{pq} - (k^2 - k_p^2) N_{pq}] [A_{qn} - (k^2 - k_q^2) N_{qn}]}{[N_{pp} (k^2 - k_p^2) - A_{pp}] [N_{qq} (k^2 - k_q^2) - A_{qq}]} \Phi_p. \end{aligned} \quad (9.2.52)$$

Формулу (9.1.99) невозможно использовать для вычисления собственного значения точнее, чем во втором порядке, поскольку, как мы увидим ниже, второй ряд в (9.2.52) сходится только в среднем и поэтому не может быть вычислен на граничной поверхности прямой подстановкой. Однако существует способ улучшения сходимости; мы рассмотрим его позже. Выражение для  $k^2$  второго порядка точности можно получить из фор-

мулы (9.1.99):

$$(k^2 - k_n^2) N_{nn} = A_{nn} + \sum_{p \neq n} \frac{[A_{np} - (k^2 - k_n^2) N_{np}] [A_{pn} - (k^2 - k_p^2) N_{pn}]}{N_{pp} (k^2 - k_p^2) - A_{pp}}. \quad (9.2.53)$$

Так как будет доказана невозможность получить подобные формулы для членов более высокого порядка, важно иметь выражение для  $k^2 - k_n^2$  через функцию  $\psi$ , которое можно получить, минуя формулу (9.2.52). Мы начнем с дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют  $\psi$  и  $\varphi_n$ :

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0, \quad \nabla^2 \varphi_n + k_n^2 \varphi_n = 0.$$

Из них сразу следует, что

$$\psi \nabla^2 \varphi_n - \varphi_n \nabla^2 \psi = (k^2 - k_n^2) \varphi_n \psi.$$

Интегрируя по области  $R$ , используя теорему Грина и подставляя граничные условия для  $\psi$ , имеем

$$\int_S \psi \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} dS = (k^2 - k_n^2) \int_R \psi \varphi_n dV.$$

Напишем  $\psi = \varphi_n + (\psi - \varphi_n)$ . Тогда

$$(k^2 - k_n^2) N_{nn} = A_{nn} - (k^2 - k_n^2) \int_R \varphi_n (\psi - \varphi_n) dV + \int_S (\psi - \varphi_n) \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} dS. \quad (9.2.54)$$

Если члены нулевого и первого порядка в (9.2.52) подставить в это уравнение, то получается уравнение (9.2.53).

**Вычисление интегралов.** Для того чтобы рассмотреть важный вопрос о сходимости рядов (9.2.52) и (9.2.53), необходимо оценить величину интегралов  $N_{pq}$  и  $A_{pq}$ . Сначала мы покажем, что объемные интегралы  $N_{pq}$  можно выразить через поверхностные интегралы. Из уравнений для функций  $\varphi_p$  и  $\varphi_q$  получаем сразу

$$\varphi_q \nabla^2 \varphi_p - \varphi_p \nabla^2 \varphi_q = (k_q^2 - k_p^2) \varphi_p \varphi_q.$$

Интегрируя по области  $R$  и используя теорему Грина, находим

$$N_{pq} = \frac{A_{pq} - A_{qp}}{k_q^2 - k_p^2}. \quad (9.2.55)$$

Обращаясь теперь к  $N_{pp}$ , заметим, что соотношение между  $N_{pp}$  и производной по  $k^2$  от  $A_{pq}$  поддается равенством (9.2.55). Рассмотрим поэтому уравнение для  $\partial \varphi / \partial (k^2)$ :

$$\nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial (k^2)} + k^2 \frac{\partial \varphi}{\partial (k^2)} = -\varphi.$$

Комбинируя это уравнение с уравнением для  $\bar{\varphi}$ , получаем

$$-\bar{\varphi} \nabla^2 \frac{\partial \varphi}{\partial (k^2)} + \frac{\partial \varphi}{\partial (k^2)} \nabla^2 \bar{\varphi} = \bar{\varphi} \varphi.$$

Интегрируя по области  $R$  и подставляя  $k^2 = k_p^2$ , получаем величину  $N_{pp}$ :

$$N_{pp} = \int_S \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial (k^2)} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial n} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial n \partial (k^2)} \bar{\varphi} \right]_{k^2=k_p^2} dS. \quad (9.2.56)$$

Это совершенно общий результат, он применим, в частности, и в случае разделяющихся переменных, который может служить поэтому иллюстрацией. Между прочим, формула (9.2.56) часто дает простейший способ вычисления нормирующего интеграла для случая разделяющихся



переменных, так как тогда она применима к каждой из собственных функций, дающих в произведении решение многомерной задачи. Для каждого из этих сомножителей поверхностный интеграл сводится к величине, получаемой подстановкой пределов изменения переменной, от которой эта собственная функция зависит, так что нормирующий интеграл можно получить без интегрирования! Чтобы проиллюстрировать это, найдем нормирующий интеграл для функции

$$\varphi_p = \cos \frac{p\pi x}{b},$$

которая удовлетворяет граничным условиям Неймана при  $x=0$  и  $x=b$ . Пусть  $\varphi$  в (9.2.56) равна  $\cos kx$ , так что  $k_p = \frac{p\pi}{b}$ . Тогда

$$\left[ \frac{\partial \varphi}{\partial (k^2)} \right]_{k=k_p} = -\frac{bx}{2\pi p} \sin \frac{p\pi x}{b}.$$

Заметив, что для этой задачи  $\partial/\partial n = \partial/\partial x$ , приведем уравнение (9.2.56) к виду

$$N_{pp} = \frac{1}{2} \left[ x \sin^2 \left( \frac{p\pi x}{b} \right) + x \cos^2 \left( \frac{p\pi x}{b} \right) + \frac{b}{\pi p} \sin \frac{p\pi x}{b} \cos \frac{p\pi x}{b} \right]_0^b,$$

так что  $N_{pp} = b/2$ , как и должно быть. Более сложный пример будет разобран ниже, когда будут рассмотрены конкретные задачи теории возмущений границы.

Показав, что мы можем ограничить наши рассуждения поверхностными интегралами, мы обратимся теперь к способу, которым должна быть задана поверхность и вычислены нормальная производная и элемент площади поверхности. Предположим, что невозмущенная поверхность может быть определена заданием одной (скажем  $\xi_1$ ) из трех переменных  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ , в которых уравнение Гельмгольца разделяется. Тогда уравнение для возмущенной поверхности можно записать так:

$$S(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$

где

$$S = \xi_1 - c - f(\xi_2, \xi_3),$$

а  $c$  — значение  $\xi_1$  на невозмущенной поверхности; функция  $f$  описывает возмущение. Встречающаяся в формулах величина  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$  в терминах  $S$  оказывается такой:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = h_2 h_3 \nabla \varphi \cdot \nabla S d\xi_2 d\xi_3$$

п.

$$\nabla \varphi \cdot \nabla S = \frac{1}{h_1^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} - \frac{1}{h_2^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_2} \frac{\partial f}{\partial \xi_2} - \frac{1}{h_3^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_3} \frac{\partial f}{\partial \xi_3}, \quad (9.2.57)$$

где после того, как произведено дифференцирование,  $\xi_1$  надо заменить на  $c + f(\xi_2, \xi_3)$ . Область, пробегаемая переменными  $\xi_2$  и  $\xi_3$ , как раз такая, которая требуется для описания первоначальной поверхности  $S'$ .

**Сходимость.** Сходимость различных рядов в (9.2.52) и (9.2.53) определяется поведением элементов  $A_{pq}$  при больших  $k_p$  и  $k_q$ . Это можно увидеть более ясно, если выписать  $A_{pq}$  в явной форме. Пусть

$$\varphi_p(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \chi_p(\xi_2, \xi_3) X_p(\xi_1).$$

Тогда

$$A_{pq} = \int \int h_2 h_3 \chi_q(\xi_2, \xi_3) \left\{ X_q [c + f(\xi_2, \xi_3)] \left[ \frac{1}{h_1^2} \chi_p(\xi_2, \xi_3) \left( \frac{dX_{1p}}{d\xi_1} \right)_{\xi_1=c+f} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{h_2^2} X_{1p} [c + f(\xi_2, \xi_3)] \frac{\partial f}{\partial \xi_2} \frac{\partial \chi_p}{\partial \xi_2} - \frac{1}{h_3^2} X_{1p} [c + f(\xi_2, \xi_3)] \frac{\partial f}{\partial \xi_3} \frac{\partial \chi_p}{\partial \xi_3} \right] \right\} d\xi_2 d\xi_3.$$

Таким образом,  $A_{pq}$  пропорционально коэффициенту в разложении функции от  $\xi_2$  и  $\xi_3$  в фигурных скобках по системе функций  $\chi_q(\xi_2, \xi_3)$ . Вообще говоря, мы знаем, что если эта функция достаточно гладкая,  $A_{pq}$  быстро уменьшается при больших  $k_p$  и  $k_q$ . Если бы длина волны, связанная с  $\chi_q$ , была значительно меньше, чем изменение функции, быстрое колебание  $\chi_q$  привело бы к исчезновению интеграла. Отклонения от гладкой зависимости могут встречаться, если  $f(\xi_2, \xi_3)$  — не гладкая функция, и будут встречаться, поскольку  $X_{1q} [c + f(\xi_2, \xi_3)]$  колеблется все быстрее и быстрее при возрастании  $q$ . Мы можем рассмотреть каждую возможность отдельно, если предположим, что особенности функции  $f$  изолированные, так что ее можно разбить на гладкие куски, а все особенности ее будут находиться в местах соединения этих кусков. Эффекты, возникающие вследствие колебаний  $X$ , упомянутых выше, можно вычислить тогда отдельно для каждой такой области, что непосредственно приводит к рассмотрению следующего интеграла:

$$I = \int \int h_2 h_3 \chi_q(\xi_2, \xi_3) X_{1q} [c + f(\xi_2, \xi_3)] d\xi_2 d\xi_3.$$

$A_{pq}$  пропорционально  $I$ , когда  $q$  настолько велико, что остаток подинтегрального выражения медленно меняется на протяжении многих колебаний  $\chi_q$  и может быть поэтому приближенно заменен постоянной. Интеграл  $I$  мы оценим в частном случае декартовых координат. Это не приводит к потере общности; для достаточно больших значений  $q$  и, следовательно, частых колебаний  $\chi_q$  кривизна граничной поверхности не играет роли. Действительно, в § 6.3 мы подробно доказали эту теорему, сравнивая ряды Фурье с другими рядами по ортогональным функциям. Таким образом,

$$I \simeq \iint \cos\left(\frac{\pi q_3 \xi_3}{a_3}\right) \cos\left(\frac{\pi q_2 \xi_2}{a_2}\right) \cos\left\{\frac{\pi q_1}{a_1} [c + f(\xi_2, \xi_3)]\right\} d\xi_1 d\xi_2,$$

где  $k_q^2 = \pi^2 \left[ \left(\frac{q_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{a_2}\right)^2 + \left(\frac{q_3}{a_3}\right)^2 \right]$  и в качестве функций  $\varphi_q$  взяты функции, удовлетворяющие условиям Неймана. Используя правило сложения косинусов, можно записать  $I$  в виде суммы нескольких членов, общий член которой есть

$$I' = \iint \cos\left[\frac{\pi q_2}{a_2} \xi_2 \pm \frac{\pi q_3}{a_3} \xi_3 \pm \frac{\pi q_1}{a_1} (c + f)\right] d\xi_1 d\xi_2,$$

где знаки плюс и минус указывают, что в  $I$  могут встречаться различные комбинации членов. Величина  $I'$  может быть оценена по методу перевала. Прежде всего запишем  $I'$  в комплексной форме:

$$I' = \text{Re} \left\{ \iint \exp i \left[ \pm \frac{\pi q_2}{a_2} \xi_2 \pm \frac{\pi q_3}{a_3} \xi_3 \pm \frac{\pi q_1}{a_1} (c + f) \right] d\xi_1 d\xi_2 \right\}.$$

Мы разложим экспоненту в окрестности тех значений  $\xi_2$  и  $\xi_3$ ,  $\xi_2'$  и  $\xi_3'$ , для которых ее градиент равен нулю. Следовательно,

$$\frac{q_2}{a_2} = \pm \frac{q_1}{a_1} \frac{\partial f}{\partial \xi_2'}; \quad \frac{q_3}{a_3} = \pm \frac{q_1}{a_1} \frac{\partial f}{\partial \xi_3'}.$$

Всегда можно найти отношения  $q_2/q_1$  и  $q_3/q_1$  так, что эти уравнения будут удовлетворяться в каждой точке поверхности. Этим не исчерпываются все возможные значения отношений, а поэтому верхняя грань для  $I'$  получится, если мы предположим, что последним равенствам можно удовлетворять всегда. Мы можем теперь разложить экспоненту в степенной ряд в окрестности  $\xi'_2$  и  $\xi'_3$ :

$$\pm \frac{\pi q_2}{a_2} \xi'_2 \pm \frac{\pi q_3}{a_3} \xi'_3 + \frac{\pi q_1}{a_1} [c + f(\xi'_2, \xi'_3)] + \frac{i}{2} \frac{\pi q_1}{a_1} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \xi'^2_2} (\xi_2 - \xi'_2)^2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \xi'_2 \partial \xi'_3} (\xi_2 - \xi'_2) (\xi_3 - \xi'_3) + \frac{\partial^2 f}{\partial \xi'^2_3} (\xi_3 - \xi'_3)^2 \right|,$$

причем контуры интегрирования на комплексных плоскостях  $\xi_2$  и  $\xi_3$  выбираются так, чтобы получить «наибыстрейший спуск»<sup>1)</sup>. Затем можно приблизительно вычислить интегралы, распространив область интегрирования от минус до плюс бесконечности, так что

$$|I'| \leq \frac{2a_1}{q_1} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial \xi'^2_2} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi'^2_3} - \left( \frac{\partial^2 f}{\partial \xi'_2 \partial \xi'_3} \right)^2 \right|^{-1/2}. \quad (9.2.58)$$

Отсюда можно заключить, что  $I$  и, следовательно,  $A_{pq}$  имеют порядок  $1/q_1$  при  $q_1 \rightarrow \infty$ , или

$$A_{pq} \underset{k_q \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{k_q}\right). \quad (9.2.59)$$

Этот результат перестает быть верным, если множитель, стоящий под знаком модуля в формуле (9.2.58), окажется равным нулю, как это случается для отдельных точек (которые должны быть седловыми точками) на граничной поверхности, а следовательно, только для определенных значений отношений  $q_3$  и  $q_2$  к  $q_1$ . Ввиду последнего ограничения эти исключительные случаи не играют настолько заметной роли, чтобы изменить скорость сходимости ряда (9.2.53) по сравнению с той, которая предсказывается формулой (9.2.59).

Почти таким же способом, как выше, можно получить поведение  $A_{pq}$  для больших  $k_p$ . Имеется, однако, дополнительная зависимость, возникающая из-за производных от  $\varphi_p$  и приводящая к множителю  $k_p$ . Следовательно,

$$A_{pq} \underset{k_p \rightarrow \infty}{=} O(1). \quad (9.2.60)$$

Если же и  $k_p$  и  $k_q$  одновременно велики, то получается

$$A_{pq} \underset{k_p, k_q \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{k_p}{k_p \pm k_q}\right), \quad (9.2.61)$$

где знаки плюс и минус указывают, что встречаются обе комбинации  $k_p$  и  $k_q$ .

Формулы (9.2.59) — (9.2.61) дают асимптотическую зависимость, возникающую из-за наличия таких членов, как  $X_q(c + f)$ . Мы обсудим теперь ограничения, возникающие из-за особенностей функции  $f$ . Здесь важными членами являются производные  $\partial f / \partial \xi_1$  и  $\partial f / \partial \xi_2$ . Следовательно, если  $f$  имеет конечные разрывы, эти производные заключают в себе дельта-функции по переменным  $\xi_1$  и  $\xi_2$  соответственно, и, значит,

$$A_{pq} \underset{k_p, k_q \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{k_p}{k_p \pm k_q}\right);$$

<sup>1)</sup> Это чисто описательное выражение. Не путать с методом «наискорейшего спуска», который состоит в отыскании минимума функции (или функционала) последовательными сдвигами по нормали к линиям уровня. — *Прим. перев.*

это также имеет место, если только одна из пары величин  $k_p$  и  $k_q$  стремится к бесконечности. Если  $f$  непрерывна, но имеет разрывный градиент, то

$$A_{pq} \underset{k_p, k_q \rightarrow \infty}{=} O \left[ \frac{k_p}{(k_p \pm k_q)^2} \right]$$

и т. д. Видно, что никакой характер особенностей  $f$  не приводит к более медленному асимптотическому убыванию, чем (9.2.61). Следовательно, мы можем считать, что формулы (9.2.59) — (9.2.61) описывают асимптотическую зависимость  $A_{pq}$ .

Мы можем, наконец, дать асимптотическую зависимость коэффициентов при  $\Phi_p$  в (9.2.52) и слагаемых в (9.2.53). Отдельные множители ведут себя следующим образом:

$$\begin{aligned} A_{np} - (k^2 - k_n^2) N_{np} \underset{k_p \rightarrow \infty}{\simeq} A_{np} &= O \left( \frac{1}{k_p} \right), \\ A_{pn} - (k^2 - k_p^2) N_{pn} \underset{k_p \rightarrow \infty}{\simeq} A_{pn}, \\ (k^2 - k_p^2) N_{pp} - A_{pp} &= O(k_p^2), \\ A_{pq} - (k^2 - k_p^2) N_{pq} \underset{k_p, k_q \rightarrow \infty}{=} &O(1). \end{aligned}$$

Подставляя эти асимптотические выражения в формулу (9.2.53) для  $k^2 - k_n^2$ , мы видим, что слагаемые уменьшаются как  $1/k_p^4$ , когда  $k_p$  возрастает. Этого достаточно для сходимости ряда. Ряд для следующего порядка может сходиться условно; сумма абсолютных величин его членов расходится логарифмически. Эта расходимость возникает вследствие того, что ряд для членов до второго порядка в волновой функции сходится только в среднем, т. е. сумма квадратов коэффициентов при  $\varphi_p$  сходится, что можно проверить следующим образом. Если данные выше асимптотические результаты подставить в члены второго порядка (9.2.52), то коэффициентом при  $\Phi_p$  при больших  $k_p$  будет  $[\ln(k_p)]/k_p^2$ ; сумма  $\sum [\ln^2(k_p)]/k_p^4$  сходится.

**Улучшение сходимости.** Предыдущие рассмотрения должны привести нас к заключению, что получить явное разложение собственной функции  $\psi$  по членам невозмущенного типа невозможно. В случае итерационно-пертурбационной формулы мы должны представить хуже всего сходящуюся часть ряда в замкнутой форме, с тем чтобы остаток сходил достаточно быстро для того, чтобы можно было провести следующую итерацию. Часто это можно сделать подбором. Однако есть и более систематический метод, основанный на интегральном уравнении (9.2.47). Прежде всего выделим  $\varphi_n$ , так как это, конечно, главный член. Это даст

$$\begin{aligned} \psi - \varphi_n &= -\frac{1}{4\pi} \oint_S (\psi - \varphi_n) \frac{\partial}{\partial n_0} G_R(S|S_0) dS_0 - \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \oint_S G_R(S|S_0) \frac{\partial \varphi_n}{\partial n_0} dS_0 + (k^2 - k_n^2) \int_R \varphi_n G_R dV_0. \end{aligned} \quad (9.2.62)$$

Мы можем отсюда получить первый ряд в (9.2.52), пренебрегая поверхностным интегралом, содержащим  $\psi - \varphi_n$ . Итерационный процесс в основном состоит в том, что полученный при этом результат для  $\psi - \varphi_n$  подставляется затем в правую часть (9.2.62). Мы видим сразу же, что источником всех наших неприятностей является плохая сходимость  $\partial G_R / \partial n_0$ .

Сделаем поэтому подстановку

$$\frac{\partial G_k}{\partial n_0} = \frac{\partial G_0}{\partial n_0} + \frac{\partial}{\partial n_0} (G_k - G_0).$$

Здесь  $G_0$  — функция Грина для уравнения Лапласа. Если  $G_0$  можно выразить в замкнутой форме, а не посредством ряда, то мы сможем продолжать наш итерационный процесс.  $\partial(G_k - G_0)/\partial n_0$  можно представить в виде ряда, так как сходимость последнего теперь будет соответствовать требованиям. Результат итерационного процесса можно выразить следующим образом. Пусть  $\psi = \varphi_n = \sum \chi_p$ , где  $\chi_p$  удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\chi_{p+1} = -\frac{1}{4\pi} \oint \chi_p \frac{\partial G_0}{\partial n_0} dS_0 - \frac{1}{4\pi} \oint \chi_p \frac{\partial (G_k - G_0)}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.2.63)$$

Первый член в правой части нельзя вычислять разложением в ряд по  $\varphi_n$ . Нужно применить непосредственное интегрирование или численные методы. Во втором интеграле (9.2.63) можно использовать представление рядом и интегрировать ряд почленно.

**Возмущения границ для условий Дирихле.** Мы используем те же обозначения, что и раньше. Интегральное уравнение, определяющее  $\psi$ , можно получить непосредственно из уравнения (9.2.45), положив  $\psi = 0$  на поверхности:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint G_k(\mathbf{r} | S_0) \frac{\partial \psi}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.2.64)$$

Мы не будем пытаться получать волновую функцию с точностью выше первого порядка, а собственное значение выше второго, ввиду возникающих трудностей в сходимости. Они имеют еще более непримиримый характер, чем для условий Неймана, рассмотренных выше.

Чтобы получить поправку первого порядка для функции  $\psi$ , выделим в правой части равенства (9.2.64) член, пропорциональный невозмущенной собственной функции  $\varphi_n$ :

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\oint \varphi_n \frac{\partial \psi}{\partial n} dS}{k_n^2 - k^2} \varphi_n + \sum_{p \neq n} \frac{\oint \varphi_p \frac{\partial \psi}{\partial n} dS}{k_p^2 - k^2} \varphi_p.$$

Мы можем упростить коэффициент при  $\varphi_n$ , заметив, что

$$(k^2 - k_n^2) \int \varphi_n \psi dV = \int [\psi \nabla^2 \varphi_n - \varphi_n \nabla^2 \psi] dV = - \oint \varphi_n \frac{\partial \psi}{\partial n} dS. \quad (9.2.65)$$

Следовательно,

$$\psi(\mathbf{r}) = -\varphi_n \int \psi \varphi_n dV + \sum_{p \neq n} \frac{\oint \varphi_p \frac{\partial \psi}{\partial n} dS}{k_p^2 - k^2} \varphi_p.$$

Поправка первого порядка для  $\psi$  получается подстановкой  $\varphi_n$  в правую часть равенства вместо  $\psi$ :

$$\psi(\mathbf{r}) \simeq N_{nn} \varphi_n + \sum_{p \neq n} \frac{A_{np}}{k_p^2 - k^2} \varphi_p, \quad (9.2.66)$$

здесь  $N_{nn}$  и  $A_{np}$  определяются формулами (9.2.49) и (9.2.51). Поверхностный интеграл имеет порядок  $1/k_p$  для больших  $k_p$ . Ряд в (9.2.66) сходится, таким образом, достаточно быстро, чтобы определить величину

объемного интеграла  $\int \psi \varphi_n dV$  в (9.2.65):

$$\int \psi \varphi_n dV = N_{nn}^2 + \sum_{p \neq n} \frac{A_{np} N_{np}}{k_p^2 - k^2} \simeq N_{nn}^2, \quad (9.2.67)$$

где указано приближенное значение интеграла с точностью до первого порядка, так как этого вполне достаточно, чтобы вычислить  $k^2 - k_n^2$  до второго порядка.

Ряд в (9.2.66) нельзя дифференцировать. Мы должны, следовательно, определить величину  $\partial\psi/\partial n$  в формуле (9.2.65) другим путем. Рассмотрим интегральное уравнение, определяющее  $\nabla\psi$ :

$$\nabla\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \oint \nabla G_k(\mathbf{r}|S_0) \frac{\partial\psi}{\partial n_0} dS_0. \quad (9.2.68)$$

Это представление  $\nabla\psi$  обращается в нуль вне  $S$  и потому разрывно, так как  $\nabla\psi$  не равно нулю на  $S$ . Мы используем подобное представление для  $\nabla\varphi_n$  и образуем  $\nabla\psi - \nabla\varphi_n$ , «протолкнув» разрывность в более высокий порядок. Из теоремы Грина и уравнений для  $\varphi_n$  и  $G_k$  мы имеем

$$4\pi \nabla\varphi_n(\mathbf{r}) = (k_n^2 - k^2) \int \nabla G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \varphi_n(\mathbf{r}_0) dV_0 + \\ + \oint \left[ \nabla G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \frac{\partial\varphi_n}{\partial n_0} - \varphi_n \nabla \frac{\partial G_k(\mathbf{r}|S_0)}{\partial n_0} \right] dS_0.$$

Следовательно,

$$\nabla(\psi - \varphi_n) = \frac{1}{4\pi} \oint \varphi_n \nabla \frac{\partial G_k}{\partial n_0} dS_0 + \frac{k^2 - k_n^2}{4\pi} \int \nabla G_k(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) \varphi_n(\mathbf{r}_0) dV_0 + \\ + \frac{1}{4\pi} \oint \nabla G_k(\mathbf{r}|S_0) \left( \frac{\partial\psi}{\partial n_0} - \frac{\partial\varphi_n}{\partial n_0} \right) dS_0. \quad (9.2.69)$$

Первое приближение для  $\nabla(\psi - \varphi_n)$  получается, если в правую часть (9.2.69) подставить  $\varphi_n$  вместо  $\psi$ . Мы должны также произвести замену  $\nabla\nabla_0 G_k$  на  $\nabla\nabla_0(G_k - G_0)$ , которая была уже сделана раньше в этой главе. Рядом для  $\nabla\psi$  до первого порядка будет тогда

$$\nabla\psi \simeq \nabla\varphi_n + \sum_{p \neq n} \frac{\left[ k^2 \frac{A_{pn}}{k_p^2} + (k^2 - k_n^2) N_{pn} \right]}{k_p^2 - k^2} \nabla\varphi_p, \quad (9.2.70)$$

где  $N_{pn}$  выражено через поверхностные интегралы формулой (9.2.55). Коэффициент при  $\nabla\varphi_p$  имеет порядок  $1/k_p^4$  для больших  $k_p$  и, таким образом, ряд сходится достаточно быстро для того, чтобы его можно было подставить в (9.2.65). Окончательно мы получаем для  $k^2 - k_n^2$ :

$$(k^2 - k_n^2) N_{nn} \simeq -A_{nn} + \sum_{p \neq n} \frac{A_{pn} [k^2 A_{pn} + (k^2 - k_n) k_p^2 N_{pn}]}{k_p^2 (k_p^2 - k^2)}. \quad (9.2.71)$$

Ряд сходится. В формулах (9.2.66) и (9.2.70) волновая функция и ее градиент выражаются рядами, которые сходятся в среднем, в то время как ряд (9.2.71) для собственного значения сходится абсолютно.

**Специальный класс граничных возмущений.** Из предыдущего следует, что для общих поверхностных возмущений трудности, связанные со сходимостью, препятствуют получению явного разложения собственных значений и собственных функций по системе невозмущенных собственных функций. Имеется, однако, особый вид граничных изменений, для которых достигается достаточная сходимость во всех порядках возмущения. Чтобы

выяснить, какими должны быть эти поверхности, мы вернемся к оценке поведения  $A_{pq}$  при больших  $k_p$  и  $k_q$ , выведенной из формулы (9.2.58). Мы напоминаем, что существование контура, для которого фаза

$$\pm \frac{\pi q_2}{a_2} \xi_2 \pm \frac{\pi q_3}{a_3} \xi_3 + \frac{\pi q_1}{a_1} [c + f(\xi_2, \xi_3)]$$

имеет нулевой градиент, привело к оценкам (9.2.59) — (9.2.61), на которых основаны рассуждения о сходимости. Ясно, что сходимость можно было бы улучшить, если бы  $f(\xi_2, \xi_3)$  была *линейной функцией от  $\xi_2$  и  $\xi_3$* , так как тогда не было бы точки на поверхности, в которой градиент фазы был бы равен нулю, за исключением совсем особых отношений  $q_2/q_1$  и  $q_3/q_1$ , которые не влияют на сходимость в целом. В таком случае из (9.2.58) можно легко видеть, что  $A_{pn} = O(k_p^{-2})$  при  $k_p \rightarrow \infty$  и т. д. Это асимптотическое поведение обеспечивает сходимость ряда для собственных значений во всех порядках аппроксимации. Пример поверхностного возмущения такого специального вида приведен на рис. 9.6, где четырехугольник  $ABCD'$  представляет возмущенную форму прямоугольника  $ABCD$ . В трехмерном пространстве прямоугольник следует заменить параллелепипедом, а линию  $AD'$  — плоскостью, образующей определенный

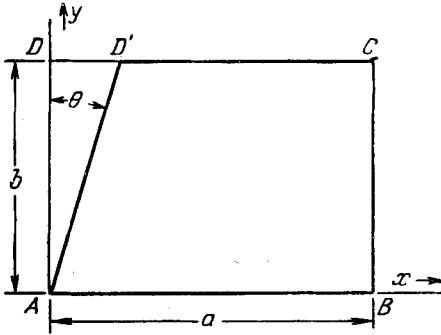


Рис. 9.6. Возмущение граничной поверхности отклонением стороны  $AD$  на угол  $\theta$ .

угол  $\theta$  с одной из его граней. Можно легко придумать соответствующие возмущения и в других координатных системах. Теперь мы доведем до конца вычисление элементов  $A_{nn}$  и  $N_{rr}$  в указанном выше случае как для того, чтобы проверить наши рассуждения, так и для иллюстрации общей теории. В качестве граничных условий возьмем однородные условия Неймана.

Невозмущенные собственные функции равны

$$\varphi_{pq} = \sqrt{\frac{\varepsilon_p \varepsilon_q}{ab}} \cos \frac{\pi p y}{a} \cos \frac{\pi q x}{b}, \quad p \text{ и } q \text{ — целые,}$$

$$k_n^2 = \left(\frac{\pi p}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi q}{b}\right)^2,$$

где двойной индекс  $(pq)$  заменяет одинарный, как в формуле для  $A_{ps}$ . Подобным образом  $\varphi_r$  равно

$$\varphi_{st} = \sqrt{\frac{\varepsilon_s \varepsilon_t}{ab}} \cos \frac{\pi s y}{a} \cos \frac{\pi t x}{b}, \quad s \text{ и } t \text{ — целые.}$$

Интеграл для  $A_{ps}$  можно получить, вычисляя нормальную производную согласно формуле (9.2.57). Для нечетных  $p+s$

$$A_{nr} = \frac{\pi}{ab} \sqrt{\varepsilon_p \varepsilon_q \varepsilon_s \varepsilon_t} \int_0^a \left\{ \left[ \frac{q}{b} \sin \left( \frac{\pi q y \operatorname{tg} \theta}{b} \right) \cos \left( \frac{\pi p y}{a} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{p}{a} \operatorname{tg} \theta \sin \left( \frac{\pi p y}{a} \right) \cos \left( \frac{\pi q y \operatorname{tg} \theta}{b} \right) \right] \cos \left( \frac{\pi s y}{a} \right) \cos \left( \frac{\pi t y \operatorname{tg} \theta}{b} \right) \right\} dy.$$

Непосредственное интегрирование дает

$$A_{nr} = \frac{1}{2} \frac{\text{tg} \theta}{ab} \sqrt{\varepsilon_p \varepsilon_q \varepsilon_s \varepsilon_t} \left\{ \sin^2 \left[ \frac{\pi a (q+t) \text{tg} \theta}{2b} \right] \times \right. \\ \times \left[ \frac{p(p+s) - q(q+t) \left(\frac{a}{b}\right)^2}{(p+s)^2 - \left[(q+t) \frac{a}{b} \text{tg} \theta\right]^2} + \frac{p(p-s) - q(q+t) \left(\frac{a}{b}\right)^2}{(p-s)^2 - \left[(q+t) \frac{a}{b} \text{tg} \theta\right]^2} \right] + \\ \left. + \sin^2 \left[ \frac{\pi a (q-t) \text{tg} \theta}{2b} \right] \left[ \frac{p(p+s) - q(q-t) \left(\frac{a}{b}\right)^2}{(p+s)^2 - \left[(q-t) \frac{a}{b} \text{tg} \theta\right]^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{p(p-s) - q(q-t) \left(\frac{a}{b}\right)^2}{(p-s)^2 - \left[(q-t) \frac{a}{b} \text{tg} \theta\right]^2} \right] \right\}.$$

Выражение для  $N_{nn}$  имеет вид

$$N_{nn} = \frac{\varepsilon_p \varepsilon_q}{2ab} \left\{ \frac{ba}{2\varepsilon_p \varepsilon_q} - \frac{a^2 \text{tg} \theta}{4\varepsilon_p \varepsilon_q} + \frac{b^2 \sin^2 \left( \pi q \frac{a}{b} \text{tg} \theta \right)}{4\pi^2 q^2 \text{tg} \theta} \left[ 1 - \frac{\left(\frac{q}{b}\right)^2 \text{tg}^2 \theta}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{q}{b}\right)^2 \text{tg}^2 \theta} \right] \right\}.$$

Мы можем немедленно убедиться, что  $A_{nr} = O(1/k_r)$ , в то время как в случае двумерной задачи для общего случая произвольной поверхности  $A_{nr} = O(1/\sqrt{k_r})$ . Мы замечаем также, что для низшего состояния колебаний прямоугольника (при  $p = q = 0$ )  $A_{nr}$  равны нулю; следовательно, во всех порядках отсутствует изменение частоты. Это, конечно, правильно, так как  $\varphi = \text{const}$  будет удовлетворять условиям Неймана и на возмущенной поверхности.

### 9.3. Приложение методов теории возмущений к изучению рассеяния и дифракции

В §§ 9.1 и 9.2 мы делали упор на применение теории возмущений к определению собственных значений и собственных функций. Здесь мы рассмотрим задачи, в которых собственные значения образуют непрерывный спектр.

Так как собственные значения могут быть какими угодно, то наше внимание будет теперь сосредоточено на волновых функциях, которые должны быть описаны в области, простирающейся обычно до бесконечности (непрерывный спектр и возникает вследствие этого). Существует связь между поведением волновой функции на бесконечности и свойствами среды, в которой распространяются волны, что представляет очень большой интерес. Поведение на бесконечности обычно наблюдается экспериментально; свойства же среды, как правило, выводятся из измерений, сравнивая теоретические предсказания, полученные в предположении, что среда обладает теми или иными свойствами, с результатами эксперимента (см. дальнейшие рассуждения в §§ 11.3 и 12.3).

Наиболее распространенными являются следующие условия эксперимента: излучение источника, обычно помещенного в бесконечности, направ