При помощи этого ряда найти выражение для потенциала скоростей потока несжимаемой жидкости, обтекающего тор $\mu=\mu_0$, если известно, что на бесконечности вектор скорости имеет величину v_0 и направлен вдоль оси этого тора.

10.38. Проводящий эллипсоид с осями $\lambda_0, \sqrt{\lambda_0^2-b^2}, \sqrt{\lambda_0^2-c^2}$ поддерживается при нулевом потенциале. Эллипсоид помещен в первоначально однородное поле напряженности E, причем самая длинная из его осей параллельна вектору напряженности. Показать, что потенциал вне эллипсоида равен

$$\psi = -Ez + E\frac{\lambda\mu\nu}{bc}\,\frac{D(b/c, \arcsin c/\lambda)}{D(b/c, \arcsin c/\lambda_0)},$$

где λ, μ, ν — эллипсоидальные координаты (см. стр. 289) и

$$D(k, \psi) = \int_0^{\psi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Найти заряд, индуцированный на эллипсоиде. Найти потенциал скоростей для соответствующей гидродинамической задачи.

Тригонометрические и гиперболические функции

Тригонометрические функции (см. Приложение, табл. I — V).

$$\cos z = 1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4 - \ldots = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) = \operatorname{ch}(iz),$$

$$\sin z = z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5 - \ldots = \frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}) = -i\operatorname{sh}(iz),$$

$$\sin^2 z+\cos^2 z = 1, \quad \sin(x+y) = \sin x\cos y+\cos x\sin y,$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y-\sin x\sin y,$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\cos(x+y)+\frac{1}{2}\cos(x-y),$$

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\sin(x+y)+\frac{1}{2}\sin(x-y),$$

$$\sin x\sin y = -\frac{1}{2}\cos(x+y)+\frac{1}{2}\cos(x-y),$$

$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z, \quad \frac{d}{dz}\sin z = \cos z,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{izt}\,dt\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,e^{-itu}\,du = 2\pi f(z) \text{ — интеграл Фурье.}$$

Для $m=2, 4, 6, \ldots$

$$\cos^m z = \frac{1}{2^{m-1}}\left[\cos mz + m\cos(m-2)z + \frac{m(m-1)}{2!}\cos(m-4)z + \ldots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{1}{2}m+1\right)}{2\left(\frac{1}{2}m\right)}\right],$$

$$\sin^m z=\frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{1}{2}m+1\right)}{2\left(\frac{1}{2}m\right)!}-\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{1}{2}m+2\right)}{\left(\frac{1}{2}m-1\right)!}\cos 2z+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots-(-1)^{\frac{1}{2}m}m\cos(m-2)z+(-1)^{\frac{1}{2}m}\cos mz\right],$$

$$\cos(mz)=\cos^m z-\frac{m(m-1)}{2!}\cos^{m-2}z\sin^2 z+\ldots+(-1)^{\frac{1}{2}m}\sin^m z,$$

$$\sin(mz)=m\cos^{m-1}z\sin z-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{m-3}z\sin^3 z+\ldots$$

$$\ldots-(-1)^{\frac{1}{2}m}m\cos z\sin^{m-1}z.$$

Для $m=1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$

$$\cos^m z=\frac{1}{2^{m-1}}\left[\cos mz+m\cos(m-2)z+\frac{m(m-1)}{2!}\cos(m-4)z+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\right)!}\cos z\right],$$

$$\sin^m z=\frac{1}{2^{m-1}}\left[\frac{m\ldots\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\right)!}\sin z-\frac{m\ldots\left(\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}\right)!}\sin 3z+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots-(-1)^{\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}}m\sin(m-2)z+(-1)^{\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}}\sin mz\right],$$

$$\cos(mz)=\cos^m z-\frac{m(m-1)}{2!}\cos^{m-2}z\sin^2 z+\ldots+(-1)^{\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}}m\cos z\sin^{m-1}z,$$

$$\sin(mz)=m\cos^{m-1}z\sin z-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\cos^{m-3}z\sin^3 z+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}}\sin^m z.$$

Гиперболические функции.

$$\operatorname{ch} z=1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\ldots=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})=\cos(iz),$$

$$\operatorname{sh} z=z+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\ldots=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})=-i\sin(iz),$$

$$\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1,\qquad \frac{d}{dz}\operatorname{ch} z=\operatorname{sh} z,\qquad \frac{d}{dz}\operatorname{sh} z=\operatorname{ch} z.$$

Производящие функции, связывающие гиперболические и тригонометрические функции

$$\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u-\cos z}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n e^{-nu}\cos(nz),\qquad \frac{e^{-u}\sin z}{\operatorname{ch} u-\cos z}=2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nu}\sin(nz).$$

Функции Бесселя

[См. формулу (5.3.63) и следующие, таблицы X и XI Приложения.]

$$J_m(z)=\frac{1}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^m\left[1-\frac{(z/2)^2}{1!\,(m+1)}+\frac{(z/2)^4}{2!\,(m+1)(m+2)}-\ldots\right]\simeq$$

$$\underset{z\to\infty}{\simeq}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left[z-\frac{1}{2}\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)\right],\quad \operatorname{Re} z>0,$$

$$N_n(z)=\frac{1}{\pi}\left[2\ln\left(\frac{z}{2}\right)+\gamma-\psi(n+1)\right]J_n(z)-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!\,(z/2)^{n-2m}}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{(z/2)^{n+2m}}{m!\,(n+m)!}\left[\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r+n}\right)\right]\simeq$$

$$\simeq\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}[\ln z-0{,}11593], & n=0,\quad z\to 0,\\[2mm] -\dfrac{(n-1)!}{\pi}\left(\dfrac{2}{z}\right)^n, & n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ z\to 0,\\[2mm] \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}}\sin\left[z-\dfrac{1}{2}\pi\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\right], & \operatorname{Re} z>0,\quad z\to\infty.\end{cases}$$

$$J_{-m}(z)=(-1)^m J_m(z),\quad N_{-m}(z)=(-1)^m N_m(z),$$

$$N_{m-1}(z)\,J_m(z)-N_m(z)\,J_{m-1}(z)=\Delta(J_m,\ N_m)=2/\pi z,$$

$$e^{iz\cos\varphi}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{im\left(\varphi+\frac{1}{2}\pi\right)}J_m(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m i^m\cos(m\varphi)\,J_m(z),$$

$$H_m(z)=J_m(z)+iN_m(z)\underset{z\to\infty}{\simeq}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{iz-\frac{1}{2}\pi i\left(m+\frac{1}{2}\right)}.$$

См. также таблицы в конце гл. 11.

Общие формулы, относящиеся к функциям Бесселя. Если $Z_m(z)=aJ_m(z)+bN_m(z)$ и $Y_m(z)=cJ_m(z)+dN_m(z)$, где a, b, c, d не зависят от m и z, то

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(z\frac{dZ_m}{dz}\right)+\left(1-\frac{m^2}{z^2}\right)Z_m=0 \text{ — уравнение Бесселя,}$$

$$(2m/z)\,Z_m(z)=Z_{m-1}(z)+Z_{m+1}(z),$$

$$2\frac{d}{dz}Z_m(z)=Z_{m-1}(z)-Z_{m+1}(z),$$

$$\int z^{m+1}Z_m\,dz=z^{m+1}Z_{m+1}(z),\qquad \int z^{-m+1}Z_m\,dz=-z^{-m+1}Z_{m-1}(z),$$

$$(\alpha^2-\beta^2)\int Z_m(\alpha z)\,Y_m(\beta z)\,z\,dz=\beta z Z_m(\alpha z)\,Y_{m-1}(\beta z)-\alpha z Z_{m-1}(\alpha z)\,Y_m(\beta z),$$

$$\int[Z_0(\alpha z)]^2\,z\,dz=\frac{1}{2}z^2\,[Z_0^2(\alpha z)+Z_1^2(\alpha z)],$$