Производящие функции, связывающие гиперболические и тригонометрические функции

$$\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u - \cos z} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n e^{-nu} \cos(nz), \qquad \frac{e^{-u}\sin z}{\operatorname{ch} u - \cos z} = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nu} \sin(nz).$$

Функции Бесселя

[См. формулу (5.3.63) и следующие, таблицы X и XI Приложения.]

$$J_m(z) = \frac{1}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^m \left[1 - \frac{(z/2)^2}{1!\,(m+1)} + \frac{(z/2)^4}{2!\,(m+1)(m+2)} - \ldots\right] \simeq$$

$$\underset{z\to\infty}{\simeq} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left[z - \frac{1}{2}\pi\left(m + \frac{1}{2}\right)\right], \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

$$N_n(z) = \frac{1}{\pi}\left[2\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - \psi(n+1)\right] J_n(z) - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!\,(z/2)^{n-2m}} -$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(z/2)^{n+2m}}{m!\,(n+m)!}\left[\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+n}\right)\right] \simeq$$

$$\simeq \begin{cases} \frac{2}{\pi}[\ln z - 0{,}11593], & n = 0, \quad z \to 0, \\ -\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^n, & n = 1, 2, 3, \ldots, \; z \to 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left[z - \frac{1}{2}\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)\right], & \operatorname{Re} z > 0, \quad z \to \infty. \end{cases}$$

$$J_{-m}(z) = (-1)^m J_m(z), \quad N_{-m}(z) = (-1)^m N_m(z),$$

$$N_{m-1}(z)\,J_m(z) - N_m(z)\,J_{m-1}(z) = \Delta(J_m, N_m) = 2/\pi z,$$

$$e^{iz\cos\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\left(\varphi + \frac{1}{2}\pi\right)} J_m(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \cos(m\varphi)\, J_m(z),$$

$$H_m(z) = J_m(z) + iN_m(z) \underset{z\to\infty}{\simeq} \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{iz - \frac{1}{2}\pi i\left(m + \frac{1}{2}\right)}.$$

См. также таблицы в конце гл. 11.

Общие формулы, относящиеся к функциям Бесселя. Если $Z_m(z) = aJ_m(z) + bN_m(z)$ и $Y_m(z) = cJ_m(z) + dN_m(z)$, где a, b, c, d не зависят от m и z, то

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\left(z\frac{dZ_m}{dz}\right) + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right)Z_m = 0 - \text{ уравнение Бесселя},$$

$$(2m/z)\,Z_m(z) = Z_{m-1}(z) + Z_{m+1}(z),$$

$$2\frac{d}{dz}Z_m(z) = Z_{m-1}(z) - Z_{m+1}(z),$$

$$\int z^{m+1} Z_m\, dz = z^{m+1} Z_{m+1}(z), \qquad \int z^{-m+1} Z_m\, dz = -z^{-m+1} Z_{m-1}(z),$$

$$(\alpha^2 - \beta^2)\int Z_m(\alpha z)\,Y_m(\beta z)\,z\,dz = \beta z Z_m(\alpha z)\,Y_{m-1}(\beta z) - \alpha z Z_{m-1}(\alpha z)\,Y_m(\beta z),$$

$$\int [Z_0(\alpha z)]^2\, z\, dz = \frac{1}{2} z^2 [Z_0^2(\alpha z) + Z_1^2(\alpha z)],$$

$$\int [Z_m(\alpha z)]^2 z\,dz = \frac{1}{2} z^2 [Z_m^2(\alpha z) - Z_{m-1}(\alpha z) Z_{m+1}(\alpha z)],$$

$$\frac{d}{dz}[z^{m+1} Z_{m+1}(z)] = z^{m+1} Z_m(z), \qquad \frac{d}{dz}[z^{-m+1} Z_{m-1}(z)] = -z^{-m+1} Z_m(z).$$

Соотношения, содержащие разложения в ряды. Если r, r_0, $R = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\varphi}$ являются сторонами треугольника, причем угол между r и r_0 равен φ, а угол между r_0 и R равен ψ, то

$$e^{i\nu\psi} Z_\nu(kR) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\varphi} J_m(kr) Z_{\nu+m}(kr_0),$$

где $0 < r < r_0$, $0 < \psi < \frac{1}{2}\pi$, ν — вещественное число, $e^{2i\psi} = \dfrac{r_0 - re^{-i\varphi}}{r_0 - re^{i\varphi}}$

$$Z_0(kR) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos(n\varphi) \cdot \begin{cases} J_n(kr) Z_n(kr_0), & r_0 > r, \\ J_n(kr_0) Z_n(kr), & r_0 < r, \end{cases}$$

$$\frac{Z_\nu(kR)}{R^\nu} = \frac{\sqrt{2\pi}}{(krr_0)^\nu} \sum_{m=0}^{\infty} (\nu + m) T_m^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\varphi) J_{\nu+m}(kr) Z_{\nu+m}(kr_0), \quad r_0 > r > 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right) = \begin{cases} [1-(x/b)^2]^\sigma & ,0 < |x| < b, \\ 0, & b < |x| < a, \end{cases}$$

где

$$B_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{b}{a}\,\frac{\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma\left(\sigma+\frac{3}{2}\right)}, \quad B_n = \sqrt{\pi}\,\frac{b}{a}\,\frac{\Gamma(\sigma+1)}{(\pi nb/2a)^{\sigma+\frac{1}{2}}} J_{\sigma+\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi nb}{a}\right).$$

Гиперболические функции Бесселя.

$$I_m(z) = (1/i)^m J_m(iz) \underset{z\to\infty}{\simeq} \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z,$$

$$K_m(z) = \frac{1}{2}\pi i^{m+1}[J_m(iz) + iN_m(iz)] \underset{z\to\infty}{\simeq} \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z},$$

$$I_{-m}(z) = I_m(z), \quad K_m(z) = K_{-m}(z),$$

$$I_m(z) K_{m-1}(z) + I_{m-1}(z) K_m(z) = -\Delta(I_m, K_m) = 1/z,$$

$$I_{m-1}(z) - I_{m+1}(z) = \frac{2m}{z} I_m(z), \quad I_{m-1}(z) + I_{m+1}(z) = 2\frac{d}{dz} I_m(z).$$

Определенные интегралы, содержащие функции Бесселя.

$$J_m(z) = \frac{1}{2\pi i^m}\int_0^{2\pi} e^{iz\cos u}\cos(mu)\,du = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{(z/2)^m}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\cos(z\cos u)\sin^{2m}u\,du;$$

$$J_0(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos(zu)}{\sqrt{1-u^2}}\,du, \quad N_0(z) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos(z\operatorname{ch} u)\,du;$$

$$H_0(kx) = \frac{-i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik\sqrt{x^2+t^2}}}{\sqrt{x^2+t^2}}\,dt, \quad K_0(kx)=\int_0^{\infty}\frac{\cos(xt)}{\sqrt{k^2+t^2}}\,dt=\int_1^{\infty}\frac{e^{-kxu}}{\sqrt{u^2-1}}\,du;$$

$$J_m(z)=\frac{2(2/z)^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_1^{\infty}\frac{\sin(zt)}{(t^2-1)^{m+\frac{1}{2}}}\,dt;$$

$$N_m(z)=\frac{-2(2/z)^m}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_1^{\infty}\frac{\cos(zt)}{(t^2-1)^{m+\frac{1}{2}}}\,dt;$$

$$K_{m-n}(kx)=\frac{2^n\Gamma(n+1)}{k^n x^{m-n}}\int_0^{\infty}\frac{J_m(kt)\,t^{m+1}}{(t^2+x^2)^{n+1}}\,dt;$$

$$I_{\frac{1}{2}m}\left(\frac{1}{2}kx\right)K_{\frac{1}{2}m}\left(\frac{1}{2}kx\right)=\int_0^{\infty}\frac{J_\nu(kt)}{\sqrt{t^2+x^2}}\,dt;$$

$\int_0^{\infty} e^{-at}J_m(bt)\frac{dt}{t}=\frac{1}{mb^m}\left[\sqrt{a^2+b^2}-a\right]^m$, a и b—вещественные и положительные числа,

$$\int_0^{\infty} e^{-at}J_m(bt)\,t^m\,dt=\frac{(2b)^m\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(a^2+b^2)^{m+\frac{1}{2}}},$$

$$J_{m-n-1}(ax)=\frac{a^{n+1}x^{m-n-1}}{2^n\Gamma(n+1)}\int_0^{\infty}\frac{J_m\left(a\sqrt{t^2+x^2}\right)}{(t^2+x^2)^{\frac{1}{2}m}}\,t^{2n+1}\,dt; \qquad \frac{1}{2}m-\frac{1}{4}>n>-1;$$

$$\frac{e^{iuv}}{v}=\int_0^{\infty}\frac{J_0(tv)}{\sqrt{t^2-u^2}}\,t\,dt;$$

$$\int_0^{\pi/2}J_\mu(z\sin u)\sin^{\mu+1}u\cos^{2\nu+1}u\,du=\frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{z^{\nu+1}}J_{\mu+\nu+1}(z);$$

$$K_{m-n-1}(ax)=\frac{a^{n+1}x^{m-n-1}}{2^n\Gamma(n+1)}\int_0^{\infty}\frac{K_m\left(a\sqrt{t^2+x^2}\right)}{(t^2+x^2)^{\frac{1}{2}m}}\,t^{2n+1}\,dt, \qquad n>-1;$$

$$\int_0^{\infty}J_{m+1}(at)\,J_n(bt)\,t^{n-m}\,dt=\begin{cases}0, & b>a\geqslant 0;\\ \dfrac{(a^2-b^2)^{m-n}\,b^n}{2^{m-n}a^{m+1}\Gamma(m-n+1)}, & a\geqslant b\geqslant 0;\end{cases}$$

a, b, m, n — вещественные числа, $m+1>n>-1$;

$$\int_0^\infty J_m(bt)\,J_n\left(a\sqrt{t^2+x^2}\right)(t^2+x^2)^{-\frac{1}{2}n}t^{m+1}\,dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & b > a \geqslant 0, \\ \dfrac{b^m}{a^n}\left[\dfrac{1}{x}\sqrt{a^2-b^2}\right]^{n-m-1} J_{n-m-1}\left(x\sqrt{a^2-b^2}\right), & a > b \geqslant 0, \end{cases}$$

x, a, b, m, n — вещественные числа, $n > m > -1$.

$$\int_0^\infty \frac{[J_m(\sqrt{t^2+z^2})]^2}{(t^2+z^2)^m}\,t^{2m-2}\,dt = \int_z^\infty \frac{[J_m(u)]^2}{u^{2m-1}}\,(u^2-z^2)^{m-\frac{3}{2}}\,du =$$

$$= \frac{\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)}{2z^{m+1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,S_m(2z), \quad \operatorname{Re} m > \frac{1}{2}, \operatorname{Re} z > 0,$$

где

$$S_m(z) = \frac{2\,(z/2)^m}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin(z\cos u)\sin^{2m} u\,du =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n\,(z/2)^{m+2n+1}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(m+n+\frac{3}{2}\right)} \underset{z\to\infty}{\simeq}$$

$$\underset{z\to\infty}{\simeq} \frac{(z/2)^{m-1}}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} + \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left[z-\frac{1}{2}\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)\right], \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} [J_1(x\sin\theta)]^2\,\frac{d\theta}{\sin\theta} = \int_0^1 \frac{[J_1(xu)]^2}{u\sqrt{1-u^2}}\,du = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x}J_1(2x).$$

$$\int_0^\infty e^{-at}N_0(bt)\,dt = -\frac{2/\pi}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left[\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{a}\right],$$

a, b — вещественные и положительные.

$$\int_0^\infty J_m(tz)\,t\,dt \int_0^\infty J_m(tu)\,F(u)\,u\,du = F(z) \text{— интеграл Фурье—Бесселя.}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_m(z\sin\vartheta)\sin^{m+1}\vartheta\cos^{2n+1}\vartheta\,d\vartheta = \frac{2^n\Gamma(n+1)}{z^{n+1}}\,J_{m+n+1}(z),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} J_m(a\sin\theta)\,J_n(b\cos\theta)\sin^{m+1}\theta\cos^{n+1}\theta\,d\theta = a^m b^n\,\frac{J_{m+n+1}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)}{(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(m+n+1)}},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(a\cos\theta)\cos(b\sin\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\,\pi J_0\left(\sqrt{a^2+b^2}\right),$$

$$\int_0^\pi e^{iz\cos\vartheta\cos u} J_m(z\sin\vartheta\sin u)\, P_n^m(\cos u)\sin u\, du = i^{n-m}\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\, P_n^m(\cos\vartheta)\, J_{n+\frac{1}{2}}(z).$$

Функции Лежандра

[См. (5.3.36) и стр. 726 тома I; см. также Приложение, табл. VI—IX и XIII.]

$$P_n^m(z) = (1-z^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z) = (1-z^2)^{\frac{1}{2}m}\,T_{n-m}^m(z) =$$

$$= \frac{(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}}{2^n n!}\frac{d^{m+n}}{dz^{m+n}}(z^2-1)^n = \qquad (m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ m\leqslant n)$$

$$= \frac{(n+m)!\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}}{2^m m!\,(n-m)!}\,F\left(m-n,\ m+n+1\,|\,m+1\,|\,\frac{1-z}{2}\right) =$$

$$= \frac{i^n\,(2n)!}{2^n n!\,(n-m)!}(z^2-1)^{\frac{1}{2}m}\, z^{n-m} F\left(\frac{m-n}{2},\ \frac{m-n+1}{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}-n\,\middle|\,\frac{1}{z^2}\right),$$

$$P_{m+2l+1}^m(0) = 0,\qquad P_{m+2l}^m(0) = \frac{(-1)^l\,(2m+2l)!}{2^{m+2l}\,l!\,(m+l)!}.$$

Для $z=\cos\vartheta$

$$P_0^0 = 1,\quad P_1^0 = z = \cos\vartheta,\quad P_2^0 = \frac{1}{2}(3z^2-1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\vartheta + 1),$$

$$P_3^0 = \frac{1}{2}(5z^3-3z) = \frac{1}{8}(5\cos 3\vartheta + 3\cos\vartheta),\ \ldots,$$

$$P_1^1 = \sqrt{1-z^2} = \sin\vartheta,\quad P_2^1 = 3z\sqrt{1-z^2} = \frac{3}{2}\sin 2\vartheta,$$

$$P_3^1 = \frac{3}{2}\sqrt{1-z^2}\,(5z^2-1) = \frac{3}{8}(\sin\vartheta + 5\sin 3\vartheta),\ \ldots,$$

$$P_2^2 = 3(1-z^2) = \frac{3}{2}(1-\cos 2\vartheta),$$

$$P_3^2 = 15z(1-z^2) = \frac{15}{4}(\cos\vartheta - \cos 3\vartheta),\ \ldots,$$

$$P_3^3 = 15(1-z^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{15}{4}(3\sin\vartheta - \sin 3\vartheta),\ \ldots.$$

$$(2n+1)\sqrt{1-z^2}\,P_n^m(z) = P_{n+1}^{m+1}(z) - P_{n-1}^{m+1}(z) =$$
$$= (n+m)(n+m-1)\,P_{n-1}^{m-1}(z) - (n-m+1)(n-m+2)\,P_{n+1}^{m-1}(z),$$

$$(2n+1)\,zP_n^m(z) = (n-m+1)\,P_{n+1}^m(z) + (n+m)\,P_{n-1}^m(z).$$

$$(1-z^2)\frac{d}{dz}P_n^m(z) = (n+1)\,zP_n^m(z) - (n-m+1)\,P_{n+1}^m(z),$$

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}P_n^m(z)\right] = -(n-m+1)(n+m)(1-z^2)^{\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}}\,P_n^{m-1}(z).$$