$$\int_0^\pi e^{iz\cos\vartheta\cos u} J_m(z\sin\vartheta\sin u)\, P_n^m(\cos u)\sin u\,du = i^{n-m}\sqrt{\frac{2\pi}{z}}\, P_n^m(\cos\vartheta)\, J_{n+\frac{1}{2}}(z).$$

Функции Лежандра

[См. (5.3.36) и стр. 726 тома I; см. также Приложение, табл. VI — IX и XIII.]

$$P_n^m(z) = (1-z^2)^{\frac{1}{2}m}\frac{d^m}{dz^m}P_n(z) = (1-z^2)^{\frac{1}{2}m}\, T_{n-m}^m(z) =$$

$$= \frac{(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}}{2^n n!}\frac{d^{m+n}}{dz^{m+n}}(z^2-1)^n = \qquad (m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ m\leqslant n)$$

$$= \frac{(n+m)!\,(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}}{2^m m!\,(n-m)!}\, F\left(m-n,\ m+n+1\,\middle|\,m+1\,\middle|\,\frac{1-z}{2}\right) =$$

$$= \frac{i^n\,(2n)!}{2^n n!\,(n-m)!}(z^2-1)^{\frac{1}{2}m} z^{n-m} F\left(\frac{m-n}{2},\ \frac{m-n+1}{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}-n\,\middle|\,\frac{1}{z^2}\right),$$

$$P_{m+2l+1}^m(0) = 0, \quad P_{m+2l}^m(0) = \frac{(-1)^l\,(2m+2l)!}{2^{m+2l}\,l!\,(m+l)!}.$$

Для $z = \cos\vartheta$

$$P_0^0 = 1, \quad P_1^0 = z = \cos\vartheta, \quad P_2^0 = \frac{1}{2}(3z^2-1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\vartheta + 1),$$

$$P_3^0 = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z) = \frac{1}{8}(5\cos 3\vartheta + 3\cos\vartheta), \ \ldots,$$

$$P_1^1 = \sqrt{1-z^2} = \sin\vartheta, \quad P_2^1 = 3z\sqrt{1-z^2} = \frac{3}{2}\sin 2\vartheta,$$

$$P_3^1 = \frac{3}{2}\sqrt{1-z^2}\,(5z^2-1) = \frac{3}{8}(\sin\vartheta + 5\sin 3\vartheta), \ \ldots,$$

$$P_2^2 = 3(1-z^2) = \frac{3}{2}(1-\cos 2\vartheta),$$

$$P_3^2 = 15z(1-z^2) = \frac{15}{4}(\cos\vartheta - \cos 3\vartheta), \ \ldots,$$

$$P_3^3 = 15(1-z^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{15}{4}(3\sin\vartheta - \sin 3\vartheta), \ \ldots .$$

$$(2n+1)\sqrt{1-z^2}\,P_n^m(z) = P_{n+1}^{m+1}(z) - P_{n-1}^{m+1}(z) =$$
$$= (n+m)(n+m-1)\,P_{n-1}^{m-1}(z) - (n-m+1)(n-m+2)\,P_{n+1}^{m-1}(z),$$

$$(2n+1)\,zP_n^m(z) = (n-m+1)\,P_{n+1}^m(z) + (n+m)\,P_{n-1}^m(z).$$

$$(1-z^2)\frac{d}{dz}P_n^m(z) = (n+1)\,zP_n^m(z) - (n-m+1)\,P_{n+1}^m(z),$$

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)^{\frac{1}{2}m}P_n^m(z)\right] = -(n-m+1)(n+m)(1-z^2)^{\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}}\,P_n^{m-1}(z).$$

$$\int_{-1}^{1} P_n^m(z) P_l^m(z)\,dz = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{nl},$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{P_n^m(z) P_n^k(z)}{1-z^2}\,dz = \frac{1}{m}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}\delta_{mk},$$

$$\frac{2^m\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\sin^m\vartheta}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)[1+h^2-2h\cos\vartheta]^{m+\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_{n+m}^m(\cos\vartheta),$$

$$P_n^m(z) = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}(1-z^2)^{-\frac{1}{2}m}\int_z^1 du_1 \int_{u_1}^1 du_2 \ldots \int_{u_{m-1}}^1 du_m\, P_n(u_m).$$

Зональные гармоники: $P_n(z) = P_n^0(z) = T_n^0(z)$ (см. стр. 695 тома I).

$$P_{2n}(z) = (-1)^n\frac{(2n)!}{[2^n n!]^2}F\left(-n,\ n+\frac{1}{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}\,\middle|\,z^2\right),$$

$$P_{2n+1}(z) = (-1)^n\frac{(2n+1)!}{[2^n n!]^2}zF\left(-n,\ n+\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{3}{2}\,\middle|\,z^2\right),$$

$$(2n+1)z^{2n} = P_0(z) + \frac{5\cdot 2n}{2n+3}P_2(z) + \frac{9\cdot 2n(2n-2)}{(2n+3)(2n+5)}P_4(z) + \ldots,$$

$$(2n+3)z^{2n+1} = 3P_1(z) + \frac{7\cdot 2n}{2n+5}P_3(z) + \frac{11\cdot 2n(2n-2)}{(2n+5)(2n+7)}P_5(z) + \ldots,$$

$$\frac{d}{dz}P_n(z) = (2n-1)P_{n-1}(z) + (2n-5)P_{n-3}(z) + (2n-9)P_{n-5}(z) + \ldots,$$

$$\frac{2/\pi}{\sin\vartheta} = P_0(\cos\vartheta) + 5\left(\frac{1}{2}\right)^2 P_2(\cos\vartheta) + 9\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 P_4(\cos\vartheta) + $$
$$+ 13\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 P_6(\cos\vartheta) + \ldots,$$

$$\int (2n+1)P_n(z)\,dz = [P_{n+1}(z) - P_{n-1}(z)],$$

когда $n=0$, $P_{-1}(z)$ следует считать равным 1;

$$\int_0^{\pi} P_{2n}(\cos\vartheta)\,d\vartheta = \pi\left\{\frac{(2n)!}{[2^n n!]^2}\right\}^2,$$

$$\int_0^{\pi} P_{2n+1}(\cos\vartheta)\cos\vartheta\,d\vartheta = \pi\frac{(2n)!\,(2n+2)!}{[2^n n!\,2^{n+1}(n+1)!]^2};$$

$$\int_0^{\pi} P_n(\cos\vartheta)\sin(m\vartheta)\,d\vartheta =$$

$$= \begin{cases} 2\dfrac{(m+n-1)(m+n-3)\ldots(m-n+1)}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m-n)}, & \text{если } n<m, \text{ а } (n+m) \text{ нечетно,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

$$P_n[\cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0)] =$$

$$= P_n(\cos\vartheta)P_n(\cos\vartheta_0) + 2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\vartheta)P_n^m(\cos\vartheta_0)\cos[m(\varphi-\varphi_0)].$$

Если $Z_n(\vartheta_0, \varphi_0) = a_0 P_n(\cos\vartheta_0) + \sum_{m=1}^{n} a_m \cos(m\varphi_0 + \alpha_m) P_n^m(\cos\vartheta_0)$, то

$$\int_0^{2\pi} d\varphi_0 \int_0^{2\pi} Z_n(\vartheta_0, \varphi_0) P_n[\cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi-\varphi_0)]\sin\vartheta_0\, d\vartheta_0 = \frac{4\pi}{2n+1} Z_n(\vartheta, \varphi).$$

$$\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\right] P_n(\cos\vartheta) = \begin{cases} 1/\sqrt{\cos\beta-\cos\vartheta}, & 0 \leqslant \beta < \vartheta \leqslant \pi, \\ 0, & 0 \leqslant \vartheta < \beta \leqslant \pi; \end{cases}$$

$$\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta\right] P_n(\cos\vartheta) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant \beta < \vartheta \leqslant \pi, \\ 1/\sqrt{\cos\vartheta-\cos\beta}, & 0 \leqslant \vartheta < \beta \leqslant \pi. \end{cases}$$

Функции Лежандра второго рода [см. формулу (5.3.41) и следующие].

$$Q_n^m = (-1)^m (z^2-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m}{dz^m} Q_n(z) = (-1)^m (z^2-1)^{\frac{1}{2}m} V_{n-m}^m(z) =$$

$$= (z^2-1)^{\frac{1}{2}m} \frac{2^m \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(n+m)!}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)(2z)^{n+m+1}} F\left(\frac{n+m+1}{2}, \frac{n+m+2}{2}\middle| n+\frac{3}{2}\middle|\frac{1}{z^2}\right),$$

$$Q_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}\left[(z^2-1)^n \ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right] - \frac{1}{2} P_n(z)\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right).$$

Для того чтобы функция Q была однозначной, мы проводим разрез по вещественной оси между точками $+1$ и -1.

Для $z = \operatorname{ch}\mu$, $\operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}\mu\right) = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$,

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \ln\left[\operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}\mu\right)\right] = 2\operatorname{Arth}(e^{-\mu}):$$

$$Q_0^0 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \ln\left[\operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}\mu\right)\right],$$

$$Q_1^0 = \frac{1}{2} z\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - 1 = \operatorname{ch}\mu\ln\left[\operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}\mu\right)\right] - 1,$$

$$Q_2^0 = \frac{1}{4}(3z^2-1)\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - \frac{3}{2}z = \frac{1}{8}[3\operatorname{ch}(2\mu)+1]\ln\left[\operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}\mu\right)\right] - \frac{3}{2}\operatorname{ch}\mu,$$

$$Q_1^1 = \sqrt{z^2-1}\left[\frac{z}{z^2-1} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right] = \operatorname{cth}\mu - \operatorname{sh}\mu\ln\left[\operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}\mu\right)\right].$$

$$Q_2^1 = \sqrt{z^2-1}\left[\frac{3z^2-2}{z^2-1} - \frac{3}{2}z\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right] = \frac{1}{\operatorname{sh}\mu} + 3\operatorname{sh}\mu - \frac{3}{2}\operatorname{sh}(2\mu)\ln\left[\operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}\mu\right)\right],$$

$$Q_2^2 = \frac{3}{2}(z^2-1)\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - \frac{3z^3-5z}{z^2-1} = \frac{3}{2}[\operatorname{ch}(2\mu)-1]\ln\left[\operatorname{cth}\left(\frac{1}{2}\mu\right)\right] - \operatorname{ch}\mu\left[3 - \frac{2}{\operatorname{sh}^2\mu}\right].$$

$$Q_n = \frac{1}{2}P_n(z)\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right) - \frac{2n-1}{1\cdot n}P_{n-1}(z) - \frac{2n-5}{3(n-1)}P_{n-3}(z) \ \ldots,$$

$$(2n+1)\sqrt{z^2-1}\,Q_n^m(z)=Q_{n-1}^m(z)-Q_{n+1}^m(z),$$
$$(2n+1)\,zQ_n^m(z)=(n-m+1)\,Q_{n+1}^m(z)+(n+m)\,Q_{n-1}^m(z),$$
$$(z^2-1)\frac{d}{dz}Q_n^m(z)=(n-m+1)\,Q_{n+1}^m(z)-(n+1)\,zQ_n^m(z),$$

Для $|h|<1$ мы имеем

$$\frac{\operatorname{Ar\,ch}\left[h\dfrac{1}{\operatorname{sh}\mu}-\operatorname{cth}\mu\right]}{\sqrt{1+h^2-2h\operatorname{ch}\mu}}=\sum_{n=0}^{\infty}h^nQ_n(\operatorname{ch}\mu).$$

Для точки $z=x+iy$, лежащей внутри эллипса, проходящего через точку t и имеющего фокусы в точках ± 1, сходится разложение

$$\frac{1}{t-z}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,P_n(z)\,Q_n(t).$$

Если $\mu>\mu_0$, то имеет место разложение

$$Q_n[\operatorname{ch}\mu\operatorname{ch}\mu_0+\operatorname{sh}\mu\operatorname{sh}\mu_0\cos(\varphi-\varphi_0)]=$$
$$=Q_n(\operatorname{ch}\mu)\,P_n(\operatorname{ch}\mu_0)+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}\,i^mQ_n^m(\operatorname{ch}\mu)\,P_n^m(\operatorname{ch}\mu_0)\cos[m(\varphi-\varphi_0)].$$

Отметим, что $P_n^m(\operatorname{ch}\mu_0)=i^m\operatorname{sh}^m\mu_0T_{n-m}^m(\operatorname{ch}\mu_0)$,

$$\Delta(P_n^m,Q_n^m)=\frac{n-m+1}{1-z^2}\left[P_{n+1}^m(z)\,Q_n^m(z)-P_n^m(z)\,Q_{n+1}^m(z)\right]=\frac{i^m(n+m)!}{(n-m)!\,(1-z^2)}.$$

Функции мнимого аргумента.

$$P_n^m(iz)=\frac{(2n)!}{2^nn!\,(n-m)!}(z^2+1)^{\frac{1}{2}m}(iz)^{n-m}F\left(\frac{m-n}{2},\frac{m-n+1}{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}-n\,\middle|-\frac{1}{z^2}\right),$$

$$Q_n^m(iz)=$$
$$=i^m\frac{2^nn!\,(n+m)!}{(2n+1)!}(z^2+1)^{\frac{1}{2}m}(iz)^{-n-m-1}F\left(\frac{n+m+1}{2},\frac{n+m+2}{2}\,\middle|\,n+\frac{3}{2}\,\middle|-\frac{1}{z^2}\right),$$
$$Q_0^0(iz)=-i\operatorname{arc\,tg}(1/z),\quad Q_1^0(iz)=z\operatorname{arc\,tg}(1/z)-1,$$
$$Q_1^1(iz)=\frac{z}{\sqrt{z^2+1}}-\sqrt{z^2+1}\operatorname{arc\,tg}(1/z).$$

Тороидальные гармоники.

$$P_{n-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch}\mu)=i^m\operatorname{sh}^m(\mu)\,T_{n-m-\frac{1}{2}}^m(\operatorname{ch}\mu)=$$
$$=\frac{i^m\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{2^mm!\,\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)}\frac{\operatorname{th}^m\mu}{\operatorname{ch}^{-n+\frac{1}{2}}\mu}F\left(\frac{m-n+\frac{1}{2}}{2},\frac{m-n+\frac{3}{2}}{2}\,\middle|\,m+1\,\middle|\,\operatorname{th}^2\mu\right)=$$
$$=\frac{i^m\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{m!\,\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)}\frac{\operatorname{th}^m\left(\frac{1}{2}\mu\right)}{\operatorname{ch}^{1-2n}\left(\frac{1}{2}\mu\right)}F\left(\frac{1}{2}-n,\frac{1}{2}+m-n\,\middle|\,m+1\,\middle|\,\operatorname{th}^2\frac{1}{2}\mu\right)=$$

$$= \frac{i^m (n-1)!\, 2^n}{\sqrt{2\pi}\, \Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \operatorname{th}^m \mu \operatorname{ch}^{n-\frac{1}{2}} \mu \times$$

$$\times \Bigg[1 + \frac{\left(m-n+\frac{1}{2}\right)\left(m-n+\frac{3}{2}\right)}{1!\,(1-n)} \left(\frac{1}{2}\operatorname{sech}\mu\right)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\left(m-n+\frac{1}{2}\right)\left(m-n+\frac{3}{2}\right)\left(m-n+\frac{5}{2}\right)\dots\left(n+m-\frac{1}{2}\right)}{(n-1)!\,(1-n)\,(2-n)\dots(-2)\,(-1)} \left(\frac{1}{2}\operatorname{sech}\mu\right)^{2n-2} \Bigg] -$$

$$-(-i)^m \frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{2^{n-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{3}{2}} n!} \frac{\operatorname{th}^m \mu}{\operatorname{ch}^{n+\frac{1}{2}} \mu} \ln\left[\operatorname{sech}\mu\right] \times$$

$$\times F\left(\frac{n+m+\frac{1}{2}}{2}, \frac{n+m+\frac{3}{2}}{2} \,\Big|\, n+1 \,\Big|\, \operatorname{sech}^2 z\right) +$$

$$+(-i)^m \frac{2^{m-1}}{\pi^2} \frac{\operatorname{th}^m \mu}{\operatorname{ch}^{n+\frac{1}{2}} \mu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(s+\frac{n+m+\frac{1}{2}}{2}\right) \Gamma\left(s+\frac{n+m+\frac{3}{2}}{2}\right)}{s!\,(n+s)!} \times$$

$$\times \Big[\psi(s+1) + \psi(n+s+1) - \psi\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}m + s + \frac{1}{4}\right) -$$

$$- \psi\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}m + s + \frac{3}{4}\right) \Big] \operatorname{sech}^{2s} \mu$$

(при $m = 0$ первое слагаемое исчезает),

$$Q^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\mu) = (-1)^m \operatorname{sh}^m(\mu)\, V^m_{n-m-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\mu) =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{2^{n+\frac{1}{2}} n!} \frac{\operatorname{cth}^m \mu}{\operatorname{ch}^{n+\frac{1}{2}} \mu} F\left(\frac{n-m+\frac{1}{2}}{2}, \frac{n-m+\frac{3}{2}}{2} \,\Big|\, n+1 \,\Big|\, \operatorname{sech}^2 \mu\right) =.$$

$$= 2^{m-1} (m-1)! \frac{\operatorname{sech}^{n+\frac{1}{2}} \mu}{\operatorname{th}^m \mu} \Bigg[1 + \frac{\left(n-m+\frac{1}{2}\right)\left(n-m+\frac{3}{2}\right)}{1!\,(1-m)} \left(\frac{1}{2}\operatorname{th}\mu\right)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\left(n-m+\frac{1}{2}\right)\left(n-m+\frac{3}{2}\right)\left(n-m+\frac{5}{2}\right)\dots\left(n+m-\frac{1}{2}\right)}{(m-1)!\,(1-m)\,(2-m)\dots(-2)\,(-1)} \left(\frac{1}{2}\operatorname{th}\mu\right)^{2m-2} \Bigg] -$$

$$-(-1)^m \frac{\Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{2^m m!\, \Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \operatorname{th}^m \mu \operatorname{sech}^{n+\frac{1}{2}} \mu \ln\left[\operatorname{th}\mu\right] \times$$

$$\times F\left(\frac{n+m+\frac{1}{2}}{2}, \frac{n+m+\frac{3}{2}}{2} \,\Big|\, m+1 \,\Big|\, \operatorname{th}^2 \mu\right) -$$

$$-(-1)^m \frac{2^{n-\frac{3}{2}} \operatorname{sech}^{n+\frac{1}{2}} \mu}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(s+\frac{n+m+\frac{1}{2}}{2}\right) \Gamma\left(s+\frac{n+m+\frac{3}{2}}{2}\right)}{s!\,(m+s)!} \times$$

$$\times \left[\psi\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}m+\frac{1}{4}+s\right)+\psi\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}m+\frac{3}{4}+s\right)- -\psi(s+1)-\psi(m+s+1)\right] \operatorname{th}^{2s} \mu.$$

Определитель Вронского для этих решений равен

$$\Delta(P, Q) = P^m_{n-\frac{1}{2}} \frac{d}{d\mu} Q^m_{n-\frac{1}{2}} - Q^m_{n-\frac{1}{2}} \frac{d}{d\mu} P^m_{n-\frac{1}{2}} = -\frac{i^m \Gamma\left(n+m+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-m+\frac{1}{2}\right) \operatorname{sh} \mu},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}\mu - \cos\eta}} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\mu) \cos(n\eta).$$

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи, в которых обсуждаются решения уравнения Лапласа:

Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики, Гостехиздат, М., 1953.

Зоммерфельд А., Уравнения в частных производных математической физики, Издат. иностр. лит., М., 1951.

Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, М.—Л., 1947.

Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, изд. 3, Гостехиздат, М., 1957.

Франк Ф. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ГТТИ, М., 1937.

Bateman H., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Cambridge, New York, 1932.

Green G., Solution of Problems in Viscous Flow, Phil. Mag. 35, 250 (1944).

Jeans J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, Cambridge, New York, 1925.

Jeffreys H., Jeffreys B. S., Methods of Mathematical Physics, Cambridge, New York, 1946, ch. 6.

MacMillan W. D., Theory of the Potential, New York, 1930.

Milne-Thomson L. M., Theoretical Hydrodynamics, London, 1938.

Ramsay A. S., Treatise on Hydromechanics, London, 1920, pt. 2: Hydrodynamics.

Rothe R., Ollendorff F., Pohlhausen K., Theory of Functions, Technology Press, Cambridge, 1933.

Smythe W. R., Static and Dynamic Electricity, 2d ed., New York, 1950.

Thomson J. J., Recent Researches in Electricity and Magnetism, Oxford, New York, 1893.