деления $f(\mathbf{k}_i\,|\,\mathbf{k}_s)$ имеет вид

$$[f]=\frac{(n^2-1)\,k^2\int\tilde{\varphi}(\mathbf{r}_0)\,e^{i\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}_0}\,dv_0\int\varphi(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}}\,dv}{\int\tilde{\varphi}(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,dv-(n^2-1)\,k^2\int dv\int\tilde{\varphi}(\mathbf{r})\,g_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)\,\varphi(\mathbf{r}_0)\,dv_0},$$

где все интегралы берутся по объему рассеивающего тела и $g_k=e^{ikR}/R$ $(R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)$. Вычислить функцию f, когда рассеивающее тело имеет форму шара радиуса a и когда в качестве функций сравнения взяты $\varphi=e^{i\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}}$ и $\tilde{\varphi}=e^{-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}}$. Использовать разложения g_k и $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ по сферическим гармоникам.

Цилиндрические функции Бесселя

[См. формулу (5.3.63) и таблицу из гл. 10.]

$$J_m(z)\underset{z\to 0}{\simeq}\frac{1}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^m;\quad \underset{z\to\infty}{\simeq}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left[z-\frac{1}{2}\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)\right].$$

$$\left.\begin{aligned}&N_0(z)\underset{z\to 0}{\simeq}\frac{2}{\pi}\,[\ln z-0{,}11593];\\ &N_m(z)\underset{z\to 0}{\simeq}-\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^m\quad (m>0);\end{aligned}\right\}\underset{z\to\infty}{\simeq}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left[z-\frac{1}{2}\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)\right].$$

$$H_m(z)=J_m(z)+iN_m(z)\underset{z\to\infty}{\simeq}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{iz-(i\pi/2)(m+1/2)}.$$

Амплитуды и фазовые углы ($m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) (см. табл. XIV Приложения).

$$J_m(z)=C_m(z)\sin[\delta_m(z)],\qquad \frac{dJ_m(z)}{dz}=-C'_m(z)\sin[\delta'_m(z)].$$

$$N_m(z)=-C_m(z)\cos[\delta_m(z)],\qquad \frac{dN_m(z)}{dz}=C'_m(z)\cos[\delta'_m(z)].$$

$$H_m(z)=-iC_m(z)\,e^{i\delta_m(z)},\qquad \frac{dH_m(z)}{dz}=iC'_m(z)\,e^{i\delta'_m(z)}.$$

$$\operatorname{tg}[\alpha_m(z)]=\frac{-z}{J_m(z)}\left[\frac{d}{dz}J_m(z)\right],\qquad \operatorname{tg}[\beta_m(z)]=\frac{-z}{N_m(z)}\left[\frac{d}{dz}N_m(z)\right].$$

$$\operatorname{tg}[\delta'_m(z)]=\operatorname{tg}[\delta_m(z)]\operatorname{tg}[\alpha_m(z)]\operatorname{ctg}[\beta_m(z)].$$

$$\operatorname{tg}[\gamma_m(z)]=\operatorname{tg}\delta_m\frac{\cos\beta_m}{\cos\alpha_m}=\operatorname{tg}\delta'_m\frac{\sin\beta_m}{\sin\alpha_m}.$$

$$\Delta(J_m,N_m)=\frac{2}{\pi z}=C_m(z)\,C'_m(z)\sin[\delta_m(z)-\delta'_m(z)].$$

Асимптотические значения.

При $z\gg m$ и $z\gg 1$ $\quad C_m\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\simeq C'_m,\quad \delta_m\simeq z-\frac{1}{2}\pi\left(m-\frac{1}{2}\right),$

$$\delta'_m\simeq z-\frac{1}{2}\pi\left(m+\frac{1}{2}\right),\qquad \operatorname{tg}\alpha_m\simeq z\operatorname{tg}\delta'_m,\qquad \operatorname{tg}\beta_m\simeq z\operatorname{tg}\delta_m.$$

При $z\ll 2m+1$ имеем $\quad C_0\simeq\sqrt{1+\left(\frac{2}{\pi}\ln z\right)^2},\quad C'_0\simeq\frac{2}{\pi z},$

$$\alpha_0\simeq\frac{1}{2}z^2,\quad \delta'_0\simeq\frac{1}{4}\pi z^2,\quad \operatorname{tg}\beta_0\simeq\frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\delta_0\simeq-\left(\frac{1}{\ln z}\right),$$

$$C_m\simeq\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^m,\quad C'_m\simeq\frac{m!}{2\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^{m+1}\qquad (m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

$$\delta_m\simeq\frac{\pi m}{(m!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\simeq-\delta'_m,\quad -\operatorname{tg}\alpha_m\simeq m\simeq\operatorname{tg}\beta_m.$$

При $m>1$, $z-m=0$, $C_m=C_m^0\simeq 0{,}8946m^{-1/3}+0{,}0059m^{-5/3}+\dots,$

$$C'_m=C_m^{0\prime}\simeq 0{,}8217m^{-2/3}+0{,}0895m^{-4/3}+\dots,$$

$$\delta_m=\delta_m^0\simeq\frac{1}{6}\pi-0{,}0114m^{-4/3}+\dots,$$

$$\delta'_m=\delta_m^{0\prime}\simeq-\frac{1}{6}\pi+0{,}1892m^{-2/3}+\dots,$$

$$\operatorname{tg}\alpha_m=\operatorname{tg}\alpha_m^0\simeq-0{,}9185m^{2/3}+0{,}2000+\dots,$$

$$\operatorname{tg}\beta_m=\operatorname{tg}\beta_m^0\simeq 0{,}9185m^{2/3}+0{,}2000+\dots.$$

При $m>1$, $|z-m|\ll m^{1/3}$ с точностью до членов первого порядка по $z-m$ имеем

$$C_m\simeq C_m^0-\frac{1}{2}C_m^{0\prime}(z-m),\qquad C'_m\simeq C_m^{0\prime}-\frac{1}{m}C_m^{0\prime}(z-m),$$

$$\delta_m\simeq\delta_m^0+0{,}7954m^{-1/3}(z-m),\quad \delta'_m\simeq\delta_m^{0\prime},$$

$$\operatorname{tg}\alpha_m\simeq\operatorname{tg}\alpha_m^0\left[1+\frac{z-m}{m}\operatorname{tg}\alpha_m^0\right],$$

$$\operatorname{tg}\beta_m\simeq\operatorname{tg}\beta_m^0\left[1+\frac{z-m}{m}\operatorname{tg}\beta_m^0\right].$$

При $z<m$, $p=\sqrt{1-\left(\frac{z}{m}\right)^2}\gg 0{,}6\ m^{-1/3}$ имеем

$$\operatorname{tg}\alpha_m\simeq-mp\simeq-\operatorname{tg}\beta_m,$$

$$\operatorname{tg}\delta_m\simeq\frac{1}{2}\left[\frac{1-p}{1+p}e^{2p}\right]^m\simeq-\operatorname{tg}\delta'_m,$$

$$C_m\simeq[\pi mp\operatorname{tg}\delta_m]^{-1/2},\qquad C'_m\simeq\sqrt{mp}\,[\pi z^2\operatorname{tg}\delta_m]^{-1/2}.$$

При $z>m$, $q=\sqrt{\left(\frac{z}{m}\right)^2-1}\gg 0{,}6m^{-1/3}$ имеем

$$\delta_m\simeq m[q-\operatorname{arc\,tg}q]+\frac{1}{4}\pi,\qquad \delta'_m\simeq\delta_m-\frac{1}{2}\pi+\frac{1+q^2}{2mq^3},$$

$$\operatorname{tg}\alpha_m\simeq-mq\operatorname{ctg}\delta_m,\quad \operatorname{tg}\beta_m\simeq mq\operatorname{tg}\delta_m,$$

$$C_m\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi mq}},\qquad C'_m\simeq\sqrt{\frac{2mq}{\pi z^2}}.$$

Корни. β_{mn} — n-й корень уравнения $J_m(\pi\beta)=0$.

β_{mn}	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$m=0$	0,7655	1,7571	2,7546	3,7535	4,7527
$m=1$	1,2197	2,2331	3,2383	4,2411	5,2429
$m=2$	1,6348	2,6792	3,6988	4,7097	5,7168
$m=3$	2,0308	3,1070	4,1428	5,1639	6,1781
$m=4$	2,4153	3,5221	4,5748	5,6073	6,6294

$$\beta_{m1}\simeq\frac{m}{\pi}+0{,}5907m^{1/3},\quad m\gg 1.$$

$$\beta_{mn}\simeq n+\frac{1}{2}m-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\left[(4m^2-1)\Big/\left(n+\frac{1}{2}m-\frac{1}{4}\right)\right],\quad n\gg 1,\quad n>m.$$

α_{mn} — n-й корень уравнения $\dfrac{dJ_m(\pi\alpha)}{d\alpha} = 0$.

α_{mn}	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$m=0$	0,0000	1,2197	2,2331	3,2383	4,2411
$m=1$	0,5861	1,6970	2,7140	3,7261	4,7312
$m=2$	0,9722	2,1346	3,1734	4,1923	5,2036
$m=3$	1,3373	2,5513	3,6115	4,6428	5,6624
$m=4$	1,6926	2,9547	4,0368	5,0815	6,1103

$$\alpha_{m1} \simeq \frac{m}{\pi} + 0{,}2574 m^{1/3}, \quad m \gg 1.$$

$$\alpha_{mn} \simeq n + \frac{1}{2} m - \frac{3}{4} - \frac{1}{8}\left[(4m^2-1)\Big/\left(n + \frac{1}{2} m - \frac{3}{4}\right)\right], \quad n \gg 1, \quad n > m.$$

Функции Вебера

[Параболические волновые функции. См. формулы (11.2.63) и следующие.]

$$D_m(z) = 2^{m/2} e^{-z^2/4 + i\pi m/2} U_2\left(-\frac{1}{2} m \,\Big|\, \frac{1}{2} \,\Big|\, \frac{1}{2} z^2\right) \underset{z\to\infty}{\simeq} z^m e^{-z^2/4}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

$$D_m(z) = 2^{m/2} e^{-z^2/4} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} m\right)} F\left(-\frac{1}{2} m \,\Big|\, \frac{1}{2} \,\Big|\, \frac{1}{2} z^2\right) - \right.$$
$$\left. - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{2z}{\Gamma\left(-\frac{1}{2} m\right)} F\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} m \,\Big|\, \frac{3}{2} \,\Big|\, \frac{1}{2} z^2\right)\right],$$

где U и F — вырожденные гипергеометрические функции, определенные в таблицах гл. 5. Функции $D_m(z)$, $D_m(-z)$ и $D_{-m-1}(iz)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2} D_m(z) + \left[\left(m + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} z^2\right] D_m(z) = 0,$$

где

$$D_m(z) = e^{-i\pi m} D_m(-z) + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-m)} e^{-i\pi(m+1)/2} D_{-m-1}(iz),$$
$$D_{m+1}(z) - z D_m(z) + m D_{m-1}(z) = 0,$$
$$\frac{d}{dz} D_m(z) + \frac{1}{2} z D_m(z) - m D_{m-1}(z) = 0,$$
$$\frac{d}{dz} D_m(z) - \frac{1}{2} z D_m(z) + D_{m+1}(z) = 0,$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{3}{4} u^2} u^{m-1} D_m(u)\, du = 2^{-m/2} \Gamma(m) \cos\left(\frac{1}{4} m\pi\right), \quad \operatorname{Re} m > 0,$$

$$D_m(ax + by) = e^{\frac{1}{4}(bx-ay)^2} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]^m \times$$
$$\times \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)\, n!} D_{m-n}\left(\sqrt{a^2+b^2}\, x\right) D_n\left(\sqrt{a^2+b^2}\, y\right) \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$