$\alpha_{mn}$ — $n$-й корень уравнения $\frac{dJ_m(\pi\alpha)}{d\alpha}=0$.

| $\alpha_{mn}$ | $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ | $n=4$ | $n=5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $m=0$ | 0,0000 | 1,2197 | 2,2331 | 3,2383 | 4,2411 |
| $m=1$ | 0,5861 | 1,6970 | 2,7140 | 3,7261 | 4,7312 |
| $m=2$ | 0,9722 | 2,1346 | 3,1734 | 4,1923 | 5,2036 |
| $m=3$ | 1,3373 | 2,5513 | 3,6115 | 4,6428 | 5,6624 |
| $m=4$ | 1,6926 | 2,9547 | 4,0368 | 5,0815 | 6,1103 |

$$\alpha_{m1}\simeq\frac{m}{\pi}+0{,}2574m^{1/3},\quad m\gg 1.$$

$$\alpha_{mn}\simeq n+\frac{1}{2}m-\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\left[(4m^2-1)\Big/\left(n+\frac{1}{2}m-\frac{3}{4}\right)\right],\quad n\gg 1,\quad n>m.$$

## Функции Вебера

[Параболические волновые функции. См. формулы (11.2.63) и следующие.]

$$D_m(z)=2^{m/2}e^{-z^2/4+i\pi m/2}U_2\left(-\frac{1}{2}m\,\Big|\,\frac{1}{2}\,\Big|\,\frac{1}{2}z^2\right)\underset{z\to\infty}{\simeq}z^m e^{-z^2/4},\quad \mathrm{Re}\,z>0.$$

$$D_m(z)=2^{m/2}e^{-z^2/4}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m\right)}F\left(-\frac{1}{2}m\,\Big|\,\frac{1}{2}\,\Big|\,\frac{1}{2}z^2\right)-\right.$$
$$\left.-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{2z}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}m\right)}F\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m\,\Big|\,\frac{3}{2}\,\Big|\,\frac{1}{2}z^2\right)\right],$$

где $U$ и $F$ — вырожденные гипергеометрические функции, определенные в таблицах гл. 5. Функции $D_m(z)$, $D_m(-z)$ и $D_{-m-1}(iz)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2}D_m(z)+\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}z^2\right]D_m(z)=0,$$

где

$$D_m(z)=e^{-i\pi m}D_m(-z)+\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-m)}e^{-i\pi(m+1)/2}D_{-m-1}(iz),$$
$$D_{m+1}(z)-zD_m(z)+mD_{m-1}(z)=0,$$
$$\frac{d}{dz}D_m(z)+\frac{1}{2}zD_m(z)-mD_{m-1}(z)=0,$$
$$\frac{d}{dz}D_m(z)-\frac{1}{2}zD_m(z)+D_{m+1}(z)=0,$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{3}{4}u^2}u^{m-1}D_m(u)\,du=2^{-m/2}\Gamma(m)\cos\left(\frac{1}{4}m\pi\right),\quad \mathrm{Re}\,m>0,$$

$$D_m(ax+by)=e^{\frac{1}{4}(bx-ay)^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]^m\times$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)\,n!}D_{m-n}\left(\sqrt{a^2+b^2}\,x\right)D_n\left(\sqrt{a^2+b^2}\,y\right)\left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Для целых $m$

$$D_m(z)=(-1)^m e^{\frac{1}{4}z^2}\left[\frac{d^m}{dz^m}e^{-\frac{1}{2}z^2}\right]=2^{-\frac{1}{2}m}e^{-\frac{1}{4}z^2}H_m\left(z\sqrt{\frac{1}{2}}\right),$$

$$D_{-m}(z)=e^{\frac{1}{4}z^2}\int\limits_z^\infty du_1\int\limits_{u_1}^\infty du_2\ldots\int\limits_{u_{m-1}}^\infty du_m e^{-\frac{1}{2}u_m^2},$$

$$D_0(z)=e^{-\frac{1}{4}z^2},\quad D_{-1}(z)=e^{\frac{1}{4}z^2}\int\limits_z^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2}\,du.$$

Уравнение для одного из множителей при разделении переменных в уравнении Гельмгольца в параболических координатах имеет вид

$$\frac{d^2y}{dx^2}+[(2m+1)\,i+x^2]\,y=0,\quad x=\lambda\sqrt{k},$$

и его решениями служат $D_m\left(x\sqrt{2i}\right)$ и $D_{-m-1}\left(x\sqrt{-2i}\right)$. Уравнение для второго множителя имеет вид

$$\frac{d^2y}{dx^2}+[-(2m+1)\,i+x^2]\,y=0,\quad x=\mu\sqrt{k},$$

и решениями служат $D_m\left(x\sqrt{-2i}\right)$ и $D_{-m-1}\left(x\sqrt{2i}\right)$.

Эти решения связаны между собою следующими соотношениями:

$$D_m\left(x\sqrt{2i}\right)=\frac{\Gamma(m+1)}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{\frac{1}{2}im\pi}D_{-m-1}\left(-x\sqrt{-2i}\right)+e^{-\frac{1}{2}im\pi}D_{-m-1}\left(x\sqrt{-2i}\right)\right]=$$
$$=e^{-i\pi m}D_m\left(-x\sqrt{2i}\right)+\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-m)}e^{-\frac{1}{2}i\pi(m+1)}D_{-m-1}\left(-x\sqrt{-2i}\right)=$$
$$=e^{i\pi m}D_m\left(-x\sqrt{2i}\right)+\frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(-m)}e^{\frac{1}{2}i\pi(m+1)}D_{-m-1}\left(x\sqrt{-2i}\right).$$

Вронскиан $\Delta\left[D_m\left(x\sqrt{2i}\right),\ D_{-m-1}\left(x\sqrt{-2i}\right)\right]=i^{-m}/\sqrt{2i}$.

Для внешних задач $m$ целое и тогда

$$D_m\left(x\sqrt{2i}\right)=(-1)^m D_m\left(-x\sqrt{2i}\right),$$
$$D_m\left(-x\sqrt{-2i}\right)=(-1)^m D_m\left(x\sqrt{-2i}\right),$$
$$D_{-m-1}\left(-x\sqrt{2i}\right)=-(-1)^m D_{-m-1}\left(x\sqrt{2i}\right)+\sqrt{2\pi}\left(\frac{i^m}{m!}\right)D_m\left(x\sqrt{-2i}\right),$$
$$D_{-m-1}\left(-x\sqrt{-2i}\right)=-(-1)^m D_{-m-1}\left(x\sqrt{-2i}\right)+\sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{i^m m!}\right)D_m\left(x\sqrt{2i}\right).$$

**Теоремы сложения.**

$$i\pi H_0^{(1)}(\Omega)=\frac{\sqrt{8\pi}}{i}\sum_{m=0}^\infty\frac{i^m}{m!}D_m\left(u\sqrt{-2i}\right)\times$$
$$\times D_m\left(v\sqrt{-2i}\right)\begin{cases}D_m\left(x\sqrt{2i}\right)D_{-m-1}\left(y\sqrt{-2i}\right), & y>x,\\ D_m\left(y\sqrt{2i}\right)D_{-m-1}\left(x\sqrt{-2i}\right), & x>y,\end{cases}$$

$$4\Omega^2=(u^2+v^2+x^2+y^2)^2-4\,(uv+xy)^2=(u^2-v^2-x^2+y^2)^2+4\,(ux-vy)^2,$$

$$e^{i(\lambda\cos\varphi+\mu\sin\varphi)^2}=e^{\frac{1}{2}i(\lambda^2+\mu^2)}\sec\varphi\sum_{n=0}^\infty\frac{i^n\operatorname{tg}^n\varphi}{n!}D_n\left(\lambda\sqrt{-2i}\right)D_n\left(\mu\sqrt{2i}\right).$$

Для внутренних задач $m$ комплексное, и мы применяем решения

$$H_e(a, x) = e^{-\frac{1}{2}ix^2} F\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}ia \,\middle|\, \frac{1}{2} \,\middle|\, ix^2\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{24}(a^2 - 2)x^4 - \frac{1}{720}(a^3 - 14a)x^6 + \ldots =$$

$$= \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{2}x}\left[J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{3}{2}aJ_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{7}{8}a^2 J_{\frac{7}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \ldots\right] =$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{4}}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}\pi a}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}ia\right)\right|} \operatorname{Re}\left[e^{\frac{1}{4}i\pi + i\sigma(a) + \frac{1}{4}ia\ln 2} D_{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}ia}\left(x\sqrt{2i}\right)\right],$$

где

$$\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}ia\right) = \left|\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}ia\right)\right| e^{i\sigma(a)},$$

и

$$H_o(a, x) = xe^{-\frac{1}{2}ix^2} F\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}ia \,\middle|\, \frac{3}{2} \,\middle|\, ix^2\right) =$$

$$= x - \frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{120}(a^2 - 6)x^5 - \frac{1}{5040}(a^3 - 26a)x^7 + \ldots =$$

$$= \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\sqrt{2x}\left[J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{5}{6}aJ_{\frac{5}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{3}{8}a^2 J_{\frac{9}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \ldots\right] =$$

$$= -\frac{\pi^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}\pi a}}{2^{\frac{3}{4}}\left|\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}ia\right)\right|} \operatorname{Re}\left[e^{i\tau(a) + \frac{1}{4}ia\ln 2} D_{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}ia}\left(x\sqrt{2i}\right)\right],$$

где

$$\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}ia\right) = \left|\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}ia\right)\right| e^{i\tau(a)}.$$

Эти функции удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a + x^2)y = 0.$$

Их асимптотические разложения при действительных $x$ и $a$ и при $x \to \infty$ имеют вид

$$H_e(a, x) \simeq \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{8}\pi a}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}ia\right)\right|\sqrt{x}} \cos\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}a\ln x - \frac{1}{8}\pi - \sigma(a)\right],$$

$$H_o(a, x) \simeq \frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)e^{-\frac{1}{8}\pi a}}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}ia\right)\right|\sqrt{x}} \cos\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}a\ln x - \frac{3}{8}\pi - \tau(a)\right].$$

## Функции Матье

(См. стр. 529 тома I и 383, а также табл. XVI, XVII Приложения.)

Эти функции являются решениями уравнения Матье

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + [b - h^2\cos^2\varphi]y = 0,$$