Для внутренних задач m комплексное, и мы применяем решения

$$H_e(a, x) = e^{-\frac{1}{2}ix^2} F\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}ia \middle| \frac{1}{2} \middle| ix^2\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{24}(a^2-2)x^4 - \frac{1}{720}(a^3 - 14a)x^6 + \ldots =$$

$$= \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{\frac{1}{2}x}\left[J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{3}{2}aJ_{\frac{3}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{7}{8}a^2J_{\frac{7}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \ldots\right] =$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{4}}\pi^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}\pi a}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}ia\right)\right|}\operatorname{Re}\left[e^{\frac{1}{4}i\pi + i\sigma(a) + \frac{1}{4}ia\ln 2} D_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}ia}\left(x\sqrt{2i}\right)\right],$$

где

$$\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}ia\right) = \left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}ia\right)\right| e^{i\sigma(a)},$$

и

$$H_o(a, x) = xe^{-\frac{1}{2}ix^2} F\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}ia \middle| \frac{3}{2} \middle| ix^2\right) =$$

$$= x - \frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{120}(a^2-6)x^5 - \frac{1}{5040}(a^3 - 26a)x^7 + \ldots =$$

$$= \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\sqrt{2x}\left[J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \frac{5}{6}aJ_{\frac{5}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \frac{3}{8}a^2J_{\frac{9}{4}}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \ldots\right] =$$

$$= -\frac{\pi^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{4}\pi a}}{2^{\frac{3}{4}}\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}ia\right)\right|}\operatorname{Re}\left[e^{i\tau(a) + \frac{1}{4}ia\ln 2} D_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}ia}\left(x\sqrt{2i}\right)\right],$$

где

$$\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}ia\right) = \left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}ia\right)\right| e^{i\tau(a)}.$$

Эти функции удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a + x^2)y = 0.$$

Их асимптотические разложения при действительных x и a и при $x \to \infty$ имеют вид

$$H_e(a, x) \simeq \frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{8}\pi a}}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}ia\right)\right|\sqrt{x}}\cos\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}a\ln x - \frac{1}{8}\pi - \sigma(a)\right],$$

$$H_o(a, x) \simeq \frac{2\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)e^{-\frac{1}{8}\pi a}}{\left|\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}ia\right)\right|\sqrt{x}}\cos\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}a\ln x - \frac{3}{8}\pi - \tau(a)\right].$$

Функции Матье

(См. стр. 529 тома I и 383, а также табл. XVI, XVII Приложения.)

Эти функции являются решениями уравнения Матье

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} + [b - h^2\cos^2\varphi]\,y = 0,$$

или

$$(z^2-1)\frac{d^2y}{dz^2}+z\frac{dy}{dz}+(h^2z^2-b)\,y=0$$

при $z=\cos\varphi$.

Собственные функции. Периодические по φ решения, пригодные для действительных φ.

Решения, четные относительно $\varphi=0$; $b=be_{2m}$ или be_{2m+1}.

$$Se_{2m}(h,\cos\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n}\cos(2n\varphi),\quad \sum_n B_{2n}=1,$$

$$Se_{2m+1}(h,\cos\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}\cos[(2n+1)\varphi],\quad \sum_n B_{2n+1}=1.$$

Если необходимо подчеркнуть, что это коэффициенты данных (четных) рядов, то их обозначают $B_n^e(h,m)$.

$$\int_0^{2\pi}[Se_m]^2\,d\varphi=M_m^e \text{ — нормирующая постоянная.}$$

$$Se_m(h,1)=1,\ [dSe_m/d\varphi]_{\varphi=0}=0,\quad Se_m(0,\cos\varphi)=\cos(m\varphi),$$

$$Se_{2m}(h,0)=\sum_n(-1)^nB_{2n},\quad Se_{2m}'(h,0)=Se_{2m+1}(h,0)=0$$

$$\left[\frac{d}{d\varphi}Se_{2m+1}(h,\cos\varphi)\right]_{\varphi=\pi/2}=Se_{2m+1}'(h,0)=\sum_n(-1)^{n-1}(2n+1)B_{2n+1}.$$

Решения, нечетные относительно $\varphi=0$; $b=bo_{2m}$ или bo_{2m+1}.

$$So_{2m}(h,\cos\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{2n}\sin(2n\varphi),\quad \sum_n(2n)B_{2n}=1,$$

$$So_{2m+1}(h,\cos\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}\sin[(2n+1)\varphi],\quad \sum_n(2n+1)B_{2n+1}=1.$$

Если необходимо подчеркнуть, что это коэффициенты данных (нечетных) рядов, то их обозначают $B_n^o(h,m)$.

$$\int_0^{2\pi}[So_m]^2\,d\varphi=M_m^o \text{ — нормирующая постоянная.}$$

$$So_m(h,1)=0,\quad \left[\frac{dSo_m}{d\varphi}\right]_{\varphi=0}=1,\quad So_m(0,\cos\varphi)=\sin(m\varphi),$$

$$So_{2m}'(h,0)=\sum_n(-1)^n(2n)B_{2n},\quad So_{2m}(h,0)=0,$$

$$So_{2m+1}(h,0)=\sum_n(-1)^nB_{2n+1},\quad So_{2m+1}'(h,0)=0.$$

Соответствующие радиальные решения при $\mu=i\varphi$ и при значениях B и b, соответствующих угловым функциям Se, So.

Четные функции:

$$Je_{2m}(h,\operatorname{ch}\mu)=\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-m}B_{2n}J_{2n}(h\operatorname{ch}\mu)=$$

$$= \frac{(-1)^m B_0 \sqrt{\frac{1}{2}\pi}}{Se_{2m}(h, 0)} Se_{2m}(h, \operatorname{ch}\mu) = \frac{(-1)^m}{Se_{2m}(h, 0)} \sqrt{\frac{1}{2}\pi} \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n} J_{2n}(h \operatorname{sh}\mu) =$$

$$= \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi} \Big/ B_0\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} J_n\left(\tfrac{1}{2} he^{\mu}\right) J_n\left(\tfrac{1}{2} he^{-\mu}\right) \simeq$$

$$\underset{\mu\to\infty}{\simeq} \frac{1}{\sqrt{h \operatorname{ch}\mu}} \cos\left[h \operatorname{ch}\mu - \tfrac{1}{2}\pi\left(2m + \tfrac{1}{2}\right)\right].$$

$$Je_{2m+1}(h, \operatorname{ch}\mu) = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} J_{2n+1}(h \operatorname{ch}\mu) =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1} hB_1}{Se'_{2m+1}(h, 0)} \sqrt{\tfrac{1}{8}\pi}\, Se_{2m+1}(h, \operatorname{ch}\mu) =$$

$$= \frac{(-1)^m \sqrt{\frac{1}{2}\pi}}{Se'_{2m+1}(h, 0)} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) B_{2n+1} J_{2n+1}(h \operatorname{sh}\mu) =$$

$$= \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi} \Big/ B_1\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n+1} \left[J_n\left(\tfrac{1}{2} he^{-\mu}\right) J_{n+1}\left(\tfrac{1}{2} he^{\mu}\right) + \right.$$

$$\left. + J_{n+1}\left(\tfrac{1}{2} he^{-\mu}\right) J_n\left(\tfrac{1}{2} he^{\mu}\right)\right] \simeq$$

$$\underset{\mu\to\infty}{\simeq} \frac{1}{\sqrt{h \operatorname{ch}\mu}} \cos\left[h \operatorname{ch}\mu - \tfrac{1}{2}\pi\left(2m + \tfrac{3}{2}\right)\right].$$

Значения функций и производных при $\mu = 0$:

$$Je_{2m}(h, 1) = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}\, (-1)^m \frac{B_0}{Se_{2m}(h, 0)},$$

$$Je_{2m+1}(h, 1) = \tfrac{1}{2} h \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}\, (-1)^m \frac{B_1}{Se'_{2m+1}(h, 0)}, \qquad \left[\frac{dJe_m}{d\mu}\right]_{\mu=0} = 0.$$

Нечетные функции:

$$Jo_{2m}(h, \operatorname{ch}\mu) = \sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}\, \operatorname{th}\mu \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-m}\, 2nB_{2n} J_{2n}(h \operatorname{ch}\mu) =$$

$$= \frac{-i(-1)^m (h^2 B_2/4) \sqrt{\frac{1}{2}\pi}}{So'_{2m}(h, 0)} So_{2m}(h, \operatorname{ch}\mu) =$$

$$= \frac{(-1)^m \operatorname{cth}\mu}{So'_{2m}(h, 0)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} 2nB_{2n} J_{2n}(h \operatorname{sh}\mu) =$$

$$= \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi} \Big/ B_2\right) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-m} B_{2n} \left[J_{n-1}\left(\tfrac{1}{2} he^{-\mu}\right) J_{n+1}\left(\tfrac{1}{2} he^{\mu}\right) - \right.$$

$$\left. - J_{n+1}\left(\tfrac{1}{2} he^{-\mu}\right) J_{n-1}\left(\tfrac{1}{2} he^{\mu}\right)\right] \simeq$$

$$\underset{\mu\to\infty}{\simeq} \frac{1}{\sqrt{h \operatorname{ch}\mu}} \cos\left[h \operatorname{ch}\mu - \tfrac{1}{2}\pi\left(2m + \tfrac{1}{2}\right)\right].$$

$$Jo_{2m+1}(h,\,\mathrm{ch}\,\mu)=\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\,\mathrm{th}\,\mu\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-m}(2n+1)B_{2n+1}J_{2n+1}(h\,\mathrm{ch}\,\mu)=$$

$$=\frac{-i(-1)^m B_1 h}{So_{2m+1}(h,0)}\sqrt{\frac{\pi}{8}}\,So_{2m+1}(h,\,\mathrm{ch}\,\mu)=$$

$$=\frac{(-1)^m}{So_{2m+1}(h,0)}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}J_{2n+1}(h\,\mathrm{sh}\,\mu)=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\Big/B_1\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-m}B_{2n+1}\left[J_n\left(\frac{1}{2}he^{-\mu}\right)J_{n+1}\left(\frac{1}{2}he^{\mu}\right)-\right.$$

$$\left.-J_{n+1}\left(\frac{1}{2}he^{-\mu}\right)J_n\left(\frac{1}{2}he^{\mu}\right)\right]\simeq$$

$$\underset{\mu\to\infty}{\simeq}\frac{1}{\sqrt{h\,\mathrm{ch}\,\mu}}\cos\left[h\,\mathrm{ch}\,\mu-\frac{1}{2}\pi\left(2m+\frac{3}{2}\right)\right],$$

где штрих в Se' и So' означает дифференцирование по φ.

Значения функций и производных при $\mu=0$: $Jo_m(h,1)=0$,

$$\left[\frac{dJo_{2m}}{d\mu}\right]_{\mu=0}=\frac{1}{4}h^2(-1)^m\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{B_2}{So'_{2m}(h,0)},$$

$$\left[\frac{dJo_{2m+1}}{d\mu}\right]_{\mu=0}=\frac{1}{2}h(-1)^m\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{B_1}{So_{2m+1}(h,0)}.$$

Вторые решения для тех же значений b. Второе решение для угловых функций можно получить, подставляя $\mu=i\varphi$ в последующие формулы, если сходимость ряда это допускает.

$$Ne_{2m}(h,\,\mathrm{ch}\,\mu)=\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-m}B_{2n}N_{2n}(h\,\mathrm{ch}\,\mu)=$$

$$=\left(\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\Big/B_0\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-m}B_{2n}N_n\left(\frac{1}{2}he^{\mu}\right)J_n\left(\frac{1}{2}he^{-\mu}\right)\simeq$$

$$\underset{\mu\to\infty}{\simeq}\frac{1}{\sqrt{h\,\mathrm{ch}\,\mu}}\sin\left[h\,\mathrm{ch}\,\mu-\frac{1}{2}\pi\left(2m+\frac{1}{2}\right)\right].$$

$$Ne_{2m+1}(h,\,\mathrm{ch}\,\mu)=\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-m}B_{2n+1}N_{2n+1}(h\,\mathrm{ch}\,\mu)=$$

$$=\frac{1}{B_1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-m}B_{2n+1}\left[J_n\left(\frac{1}{2}he^{-\mu}\right)N_{n+1}\left(\frac{1}{2}he^{\mu}\right)+\right.$$

$$\left.+J_{n+1}\left(\frac{1}{2}he^{-\mu}\right)N_n\left(\frac{1}{2}he^{\mu}\right)\right]\underset{\mu\to\infty}{\simeq}\frac{1}{\sqrt{h\,\mathrm{ch}\,\mu}}\sin\left[h\,\mathrm{ch}\,\mu-\frac{1}{2}\pi\left(2m+\frac{3}{2}\right)\right].$$

Вронскиан $\Delta(Je_m,\,Ne_m)=1$.

Производная при $\mu=0$ $\left[\frac{dNe_m}{d\mu}\right]_{\mu=0}=\frac{1}{Je_m(h,1)}$.

Значения при $\mu=0$:

$$Ne_{2m}(h,\,1)=\frac{1}{B_0}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-m}J_n\left(\frac{1}{2}h\right)N_n\left(\frac{1}{2}h\right)B_{2n},$$

$$Ne_{2m+1}(h,\,1)=\frac{1}{B_1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-m}B_{2n+1}\left[J_n\left(\frac{1}{2}h\right)N_{n+1}\left(\frac{1}{2}h\right)+\right.$$
$$\left.+J_{n+1}\left(\frac{1}{2}h\right)N_n\left(\frac{1}{2}h\right)\right],$$

$$No_{2m}(h,\,\mathrm{ch}\,\mu)=\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\,\mathrm{th}\,\mu\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-m}\,2nB_{2n}N_{2n}(h\,\mathrm{ch}\,\mu)=$$
$$=\left(\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\Big/B_2\right)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-m}B_{2n}\left[J_{n-1}\left(\frac{1}{2}he^{-\mu}\right)N_{n+1}\left(\frac{1}{2}he^{\mu}\right)-\right.$$
$$\left.-J_{n+1}\left(\frac{1}{2}he^{-\mu}\right)N_{n-1}\left(\frac{1}{2}he^{\mu}\right)\right]\simeq$$
$$\underset{\mu\to\infty}{\simeq}\frac{1}{\sqrt{h\,\mathrm{ch}\,\mu}}\sin\left[h\,\mathrm{ch}\,\mu-\frac{1}{2}\pi\left(2m+\frac{1}{2}\right)\right],$$

$$No_{2m+1}(h,\,\mathrm{ch}\,\mu)=\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\,\mathrm{th}\,\mu\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-m}(2n+1)\,B_{2n+1}N_{2n+1}(h\,\mathrm{ch}\,\mu)=$$
$$=\left(\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\Big/B_1\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-m}B_{2n+1}\left[J_n\left(\frac{1}{2}he^{-\mu}\right)N_{n+1}\left(\frac{1}{2}he^{\mu}\right)-\right.$$
$$\left.-J_{n+1}\left(\frac{1}{2}he^{-\mu}\right)N_n\left(\frac{1}{2}he^{\mu}\right)\right]\simeq$$
$$\underset{\mu\to\infty}{\simeq}\frac{1}{\sqrt{h\,\mathrm{ch}\,\mu}}\sin\left[h\,\mathrm{ch}\,\mu-\frac{1}{2}\pi\left(2m+\frac{3}{2}\right)\right].$$

Вронскиан $\Delta(Jo_m,\ No_m)=1$.

Значение при $\mu=0$: $No_m(h,\,1)=-1\Big/\left[\dfrac{dJo_m}{d\mu}\right]_{\mu=0}$.

Производные при $\mu=0$:

$$No'_{2m}(h,\,1)=\left(\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\Big/B_2\right)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-m}\,2nB_{2n}\left[2J_n\left(\frac{1}{2}h\right)N_n\left(\frac{1}{2}h\right)-\right.$$
$$\left.-J_{n-1}\left(\frac{1}{2}h\right)N_{n+1}\left(\frac{1}{2}h\right)-J_{n+1}\left(\frac{1}{2}h\right)N_{n-1}\left(\frac{1}{2}h\right)\right],$$

$$No'_{2m+1}(h,\,1)=$$
$$=\left(\sqrt{\frac{1}{2}\pi}\Big/B_1\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-m}B_{2n+1}\left\{-(2n+1)\left[J_n\left(\frac{1}{2}h\right)N_{n+1}\left(\frac{1}{2}h\right)+\right.\right.$$
$$\left.+J_{n+1}\left(\frac{1}{2}h\right)N_n\left(\frac{1}{2}h\right)\right]+h\left[J_n\left(\frac{1}{2}h\right)N_n\left(\frac{1}{2}h\right)+\right.$$
$$\left.\left.+J_{n+1}\left(\frac{1}{2}h\right)N_{n+1}\left(\frac{1}{2}h\right)\right]\right\}.$$

Разложения в ряды [см. (11.2.93)].

$$i\pi H_0^{(1)}(kR)=4\pi i\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{M_m^e}Se_m(h,\cos\vartheta_0)Se_m(h,\cos\vartheta)\times\right.$$

$$\times\begin{cases}Je_m(h,\operatorname{ch}\mu_0)He_m(h,\operatorname{ch}\mu), & \mu>\mu_0,\\ Je_m(h,\operatorname{ch}\mu)He_m(h,\operatorname{ch}\mu_0), & \mu<\mu_0,\end{cases}+$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{M_m^o}So_m(h,\cos\vartheta_0)So_m(h,\cos\vartheta)\times$$

$$\left.\times\begin{cases}Jo_m(h,\operatorname{ch}\mu_0)Ho_m(h,\operatorname{ch}\mu), & \mu>\mu_0,\\ Jo_m(h,\operatorname{ch}\mu)Ho_m(h,\operatorname{ch}\mu_0), & \mu<\mu_0,\end{cases}\right]$$

где

$$R^2=\left(\frac{1}{2}a\right)^2[\operatorname{ch}^2\mu+\operatorname{ch}^2\mu_0-\sin^2\vartheta-\sin^2\vartheta_0-$$

$$-2\operatorname{ch}\mu\operatorname{ch}\mu_0\cos\vartheta\cos\vartheta_0-2\operatorname{sh}\mu\operatorname{sh}\mu_0\sin\vartheta\sin\vartheta_0],\quad h=\frac{1}{2}ak;$$

$$\exp[ih(\operatorname{ch}\mu\cos\vartheta\cos u+\operatorname{sh}\mu\sin\vartheta\sin u)]=$$

$$=\sqrt{8\pi}\sum_m i^m\left[\frac{1}{M_m^e}Se_m(h,\cos u)Se_m(h,\cos\vartheta)Je_m(h,\operatorname{ch}\mu)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{M_m^o}So_m(h,\cos u)So_m(h,\cos\vartheta)Jo_m(h,\operatorname{ch}\mu)\right].$$

Амплитуды и фазовые углы [см. (11.2.100)].

$$Je_m(h,1)=C_m^e\sin\delta_m^e,\qquad Ne_m(h,1)=-C_m^e\cos\delta_m^e,\qquad He_m(h,1)=-iC_m^e e^{i\delta_m^e},$$

$$Je_m'(h,1)=0,\quad Ne_m'(h,1)=1/Je_m(h,1),\quad He_m'(h,1)=i/Je_m(h,1),$$

$$Jo_m(h,1)=0,\quad No_m(h,1)=-1/Jo_m'(h,1),\quad Ho_m(h,1)=-i/Jo_m'(h,1),$$

$$Jo_m'(h,1)=-C_m^o\sin\delta_m^o,\quad No_m'(h,1)=C_m^o\cos\delta_m^o,\quad Ho_m'(h,1)=iC_m^o e^{i\delta_m^o},$$

где штрих означает дифференцирование по μ и

$$He_m=Je_m+iNe_m,\quad Ho_m=Jo_m+iNo_m.$$

Сферические функции Бесселя

(См. стр. 433 и следующие, а также табл. XII и XV Приложения.)

$$j_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}J_{n+\frac{1}{2}}(z)\underset{z\to 0}{\simeq}\frac{z^n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)};$$

$$\underset{z\to\infty}{\simeq}\frac{1}{z}\cos\left[z-\frac{1}{2}\pi(n+1)\right],\quad n\text{ — целое.}$$

$$n_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}N_{n+\frac{1}{2}}(z)\underset{z\to 0}{\simeq}-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{z^{n+1}};$$

$$\underset{z\to\infty}{\simeq}\frac{1}{z}\sin\left[z-\frac{1}{2}\pi(n+1)\right],\quad n_n(z)=(-1)^{n+1}j_{-n-1}(z).$$

$$h_n(z)=j_n(z)+in_n(z)\underset{z\to\infty}{\simeq}\frac{1}{z}i^{-n-1}e^{iz},\quad h_{-n}(z)=i(-1)^{n-1}h_{n-1}(z).$$

$$j_n(z)n_{n-1}(z)-j_{n-1}(z)n_n(z)=\Delta(j_n,n_n)=\frac{1}{z^2},$$