Разложения в ряды [см. (11.2.93)].

$$i\pi H_0^{(1)}(kR) = 4\pi i \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{M_m^e} Se_m(h, \cos\vartheta_0) Se_m(h, \cos\vartheta) \times \right.$$

$$\times \begin{cases} Je_m(h, \operatorname{ch}\mu_0) He_m(h, \operatorname{ch}\mu), & \mu > \mu_0, \\ Je_m(h, \operatorname{ch}\mu) He_m(h, \operatorname{ch}\mu_0), & \mu < \mu_0, \end{cases} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{M_m^o} So_m(h, \cos\vartheta_0) So_m(h, \cos\vartheta) \times$$

$$\left. \times \begin{Bmatrix} Jo_m(h, \operatorname{ch}\mu_0) Ho_m(h, \operatorname{ch}\mu) \\ Jo_m(h, \operatorname{ch}\mu) Ho_m(h, \operatorname{ch}\mu_0) \end{Bmatrix} \begin{matrix} , & \mu > \mu_0, \\ , & \mu < \mu_0, \end{matrix} \right]$$

где

$$R^2 = \left(\frac{1}{2} a\right)^2 [\operatorname{ch}^2\mu + \operatorname{ch}^2\mu_0 - \sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta_0 -$$

$$- 2 \operatorname{ch}\mu \operatorname{ch}\mu_0 \cos\vartheta \cos\vartheta_0 - 2 \operatorname{sh}\mu \operatorname{sh}\mu_0 \sin\vartheta \sin\vartheta_0], \quad h = \frac{1}{2} ak;$$

$$\exp[ih(\operatorname{ch}\mu \cos\vartheta \cos u + \operatorname{sh}\mu \sin\vartheta \sin u)] =$$

$$= \sqrt{8\pi} \sum_m i^m \left[\frac{1}{M_m^e} Se_m(h, \cos u) Se_m(h, \cos\vartheta) Je_m(h, \operatorname{ch}\mu) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{M_m^o} So_m(h, \cos u) So_m(h, \cos\vartheta) Jo_m(h, \operatorname{ch}\mu) \right].$$

Амплитуды и фазовые углы [см. (11.2.100)].

$$Je_m(h, 1) = C_m^e \sin\delta_m^e, \quad Ne_m(h, 1) = -C_m^e \cos\delta_m^e, \quad He_m(h, 1) = -iC_m^e e^{i\delta_m^e},$$

$$Je_m'(h, 1) = 0, \quad Ne_m'(h, 1) = 1/Je_m(h, 1), \quad He_m'(h, 1) = i/Je_m(h, 1),$$

$$Jo_m(h, 1) = 0, \quad No_m(h, 1) = -1/Jo_m'(h, 1), \quad Ho_m(h, 1) = -i/Jo_m'(h, 1),$$

$$Jo_m'(h, 1) = -C_m^o \sin\delta_m^o, \quad No_m'(h, 1) = C_m^o \cos\delta_m^o, \quad Ho_m'(h, 1) = iC_m^o e^{i\delta_m^o},$$

где штрих означает дифференцирование по μ и

$$He_m = Je_m + iNe_m, \quad Ho_m = Jo_m + iNo_m.$$

Сферические функции Бесселя

(См. стр. 433 и следующие, а также табл. XII и XV Приложения.)

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) \underset{z\to 0}{\simeq} \frac{z^n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n+1)};$$

$$\underset{z\to\infty}{\simeq} \frac{1}{z} \cos\left[z - \frac{1}{2}\pi(n+1)\right], \quad n \text{ — целое.}$$

$$n_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} N_{n+\frac{1}{2}}(z) \underset{z\to 0}{\simeq} -\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{z^{n+1}};$$

$$\underset{z\to\infty}{\simeq} \frac{1}{z} \sin\left[z - \frac{1}{2}\pi(n+1)\right], \quad n_n(z) = (-1)^{n+1} j_{-n-1}(z).$$

$$h_n(z) = j_n(z) + i n_n(z) \underset{z\to\infty}{\simeq} \frac{1}{z} i^{-n-1} e^{iz}, \quad h_{-n}(z) = i(-1)^{n-1} h_{n-1}(z).$$

$$j_n(z) n_{n-1}(z) - j_{n-1}(z) n_n(z) = \Delta(j_n, n_n) = \frac{1}{z^2},$$

$$j_0(z)=\frac{1}{z}\sin z,\quad n_0(z)=-\frac{1}{z}\cos z,\quad h_0(z)=-\frac{i}{z}e^{iz},$$

$$j_1(z)=\frac{\sin z}{z^2}-\frac{\cos z}{z},\quad n_1(z)=-\frac{\cos z}{z^2}-\frac{\sin z}{z},\quad h_1(z)=-\frac{z+i}{z^2}e^{iz},$$

$$j_2(z)=\left(\frac{3}{z^3}-\frac{1}{z}\right)\sin z-\frac{3}{z^2}\cos z,\quad n_2(z)=-\left(\frac{3}{z^3}-\frac{1}{z}\right)\cos z-\frac{3}{z^2}\sin z,$$

$$h_2(z)=-\frac{-iz^2+3z+3i}{z^3}e^{iz},\quad \ldots,$$

$$j_n(z)=(-1)^n z^n\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^n\left(\frac{\sin z}{z}\right),\quad n_n(z)=-(-1)^n z^n\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^n\left(\frac{\cos z}{z}\right),$$

$$h_n(z)=-i(-1)^n\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^n\left(\frac{e^{iz}}{z}\right).$$

Если $f_n(z)$ — некоторая линейная комбинация $j_n(z)$ и $n_n(z)$ с коэффициентами, не зависящими от n и z, то имеем:

$$\frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{df_n}{dz}\right)+\left[1-\frac{n(n+1)}{z^2}\right]f_n=0,$$

$$\frac{2n+1}{z}f_n(z)=f_{n-1}(z)+f_{n+1}(z),$$

$$(2n+1)\frac{d}{dz}f_n(z)=nf_{n-1}(z)-(n+1)f_{n+1}(z),$$

$$\int z^{n+2}f_n(z)\,dz=z^{n+2}f_{n+1}(z),$$

$$\int z^{1-n}f_n(z)\,dz=-z^{1-n}f_{n-1}(z),$$

$$\int [f_n(z)]^2 z^2\,dz=\frac{1}{2}z^3[f_n^2(z)-f_{n-1}(z)f_{n+1}(z)],$$

$$\int f_n(z)g_m(z)\,dz=z^2\frac{f_{n-1}(z)g_m(z)-f_n(z)g_{m-1}(z)}{(n-m)(n+m+1)}-z\frac{f_n(z)g_m(z)}{n+m+1},$$

$$\int f_n(\alpha x)g_n(\beta x)x^2\,dx=\frac{x^2}{\alpha^2-\beta^2}[\beta f_n(\alpha x)g_{n-1}(\beta x)-\alpha f_{n-1}(\alpha x)g_n(\beta x)],$$

где $g_m(z)$ — другая линейная комбинация $j_m(z)$ и $n_m(z)$.

Разложения в ряды.

$$\frac{f_m\left(k\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\vartheta}\right)}{(r^2+r_0^2-2rr_0\cos\vartheta)^{m/2}}=$$

$$=\frac{1}{(krr_0)^m}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2m+1)T_n^m(\cos\vartheta)j_{n+m}(kr)f_{n+m}(kr_0),\quad r_0>r>0.$$

Поскольку $h_0(kR)=\frac{1}{ikR}e^{ikR}$ $(R^2=r^2+r_0^2-2rr_0\cos\vartheta)$, то

$$\frac{e^{ikR}}{R}=ik\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)P_n(\cos\vartheta)j_n(kr)h_n(kr_0),\quad r_0>r>0.$$

Устремляя r_0 к бесконечности и используя асимптотическую формулу для $h_{n+m}(kr_0)$, получаем

$$e^{ikr\cos\vartheta}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)i^nP_n(\cos\vartheta)j_n(kr)=$$

$$=\frac{1}{(kr)^m}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+2m+1)i^mT_n^m(\cos\vartheta)j_{n+m}(kr)$$

Определенные интегралы.

$$j_n(z)=\frac{1}{2i^n}\int_{-1}^{1} e^{izt}\,P_n(t)\,dt=\int_0^1 J_n(zt)\frac{t^{n+1}\,dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\int_0^\infty e^{-at} j_n(bt)\,t^m\,dt=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+m+1)}{2^{n+1}\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}\,\frac{b^n}{(a^2+b^2)^{1/2(m+n+1)}}\times$$

$$\times F\left(\frac{n+m+1}{2},\ \frac{n+1-m}{2}\,\middle|\,\frac{2n+3}{2}\,\middle|\,\frac{b^2}{a^2+b^2}\right),$$

$$\int_0^\pi e^{iz\cos\vartheta\cos u}\,J_m(z\sin\vartheta\sin u)\,P_n^m(\cos u)\sin u\,du=2i^{n-m}\,P_n^m(\cos\vartheta)\,j_n(z),$$

$$\int_0^\infty e^{-at}\,j_n(bt)\,j_n(ct)\,t\,dt=\frac{1}{2bc}\,Q_n\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2bc}\right).$$

Другие интегралы можно получить, выражая j_n через $J_{n+\frac{1}{2}}$ и применяя затем формулы стр. 303 и следующих.

Амплитуды и фазовые углы.

$$j_n(z)=D_n\sin\delta_n,\quad n_n(z)=-D_n\cos\delta_n,\quad h_n(z)=-iD_n(z)\,e^{i\delta_n(z)},$$

$$\frac{dj_n}{dz}=-D'_n\sin\delta'_n,\quad \frac{dh_n}{dz}=iD'_n(z)\,e^{i\delta'_n(z)},$$

$$\operatorname{tg}\alpha_n=-\frac{z}{j^n}\frac{d}{dz}(j_n),\quad \operatorname{tg}\beta_n=-\frac{z}{n_n}\frac{d}{dz}(n_n),$$

$$\operatorname{tg}\delta_n=-\frac{j_n}{n_n},\quad \operatorname{tg}\delta'_n=-\frac{j'_n}{n'_n}=\operatorname{tg}\delta_n\frac{\operatorname{tg}\alpha_n}{\operatorname{tg}\beta_n},$$

$$\operatorname{tg}\gamma_n=\operatorname{tg}\delta_n\frac{\cos\beta_n}{\cos\alpha_n}=\operatorname{tg}\delta'_n\frac{\sin\beta_n}{\sin\alpha_n},$$

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}(zj_n)=-E_n\sin\varepsilon_n,\quad \frac{1}{z}\frac{d}{dz}(zh_n)=iE_ne^{i\varepsilon_n},$$

$$D_0(z)=\frac{1}{z},\quad \delta_0(z)=z,\quad E_0(z)=\frac{1}{z},\quad \varepsilon_0(z)=z-\frac{1}{2}\pi,$$

$$D'_0(z)=D_1(z),\quad \delta'_0(z)=\delta_1(z),\quad \sin(\delta_n-\delta'_n)=1/z^2D_nD'_n.$$

Асимптотические значения.

При $z\gg n$ и $z\gg 1$: $\quad D_n(z)\simeq\frac{1}{z}\simeq D'_n(z),$

$$\delta_n(z)\simeq z-\frac{1}{2}n\pi,\quad \delta'_n(z)\simeq z-\frac{1}{2}\pi(n+1),$$

$$\operatorname{tg}\alpha_n\simeq z\operatorname{tg}\left[z-\frac{1}{2}\pi(n+1)\right],\quad \operatorname{tg}\beta_n\simeq -z\operatorname{ctg}\left[z-\frac{1}{2}\pi(n+1)\right].$$

При $z\ll|2n-1|$:

$$D_n\simeq\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{z^{n+1}},\quad D'_n\simeq\frac{n+1}{z}D_n,\quad \delta_0\simeq z,\quad \delta'_0\simeq\frac{1}{3}z^3;$$

$$\delta_n\simeq\frac{z^{2n+1}}{1\cdot3\cdot5\ldots(2n+1)\cdot1\cdot1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)},\quad \delta'_n\simeq-\frac{n}{n+1}\delta_n,\quad n>0.$$

$$\alpha_0 \simeq \frac{1}{3} z^2; \quad \operatorname{tg} \beta_0 \simeq 1 + z^2; \quad \varepsilon_n' \simeq -\frac{n+1}{n} \delta_n, \quad n > 0;$$

$$\operatorname{tg} \alpha_n' \simeq -n, \quad \operatorname{tg} \beta_n' \simeq (n+1); \quad E_n \simeq \left(\frac{n}{z}\right) D_n, \quad n > 0.$$

Корни. β_{ln}—n-й корень уравнения $j_l(\pi\beta) = 0$.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$l=0$	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000	5,0000
$l=1$	1,4303	2,4590	3,4709	4,4775	5,4816
$l=2$	1,8346	2,8950	3,9226	4,9385	5,9489
$l=3$	2,2243	3,3159	4,3602	5,3870	6,4050
$l=4$	2,6046	3,7258	4,7873	5,8255	6,8518

α_{ln}—n-й корень уравнения $[dj_l(\pi\alpha)/d\alpha] = 0$.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$l=0$	0	1,4303	2,4590	3,4709	4,4775
$l=1$	0,6626	1,8909	2,9303	3,9485	4,9591
$l=2$	1,0638	2,3205	3,3785	4,4074	5,4250
$l=3$	1,4369	2,7323	3,8111	4,8525	5,8786
$l=4$	1,7974	3,1323	4,2321	5,2869	6,3224

γ_{ln}—n-й корень уравнения $(d/d\gamma)[\pi\gamma j_l(\pi\gamma)] = 0$.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$l=0$	0,5000	1,5000	2,5000	3,5000	4,5000
$l=1$	0,8734	1,9470	2,9656	3,9744	4,9796
$l=2$	1,2319	2,3692	3,4101	4,4311	5,4440
$l=3$	1,5831	2,7762	3,8400	4,8745	5,8965
$l=4$	1,9296	3,1728	4,2591	5,3076	6,3393

Сфероидальные функции

(См. стр. 466 и следующие.)

Угловые функции. Функция

$$S_{ml}(h, z) = \sum_n{}' d_n(h \mid m, l)\, P^m_{n+m}(z) = (1-z^2)^{m/2} \sum_n{}' d_n T^m_n(z)$$

(штрих означает, что при четном $l-m$ в сумму входят только члены с четными n, а при нечетном $l-m$ только с нечетными n) является