$$\alpha_0 \simeq \frac{1}{3} z^2; \quad \operatorname{tg}\beta_0 \simeq 1 + z^2; \quad \varepsilon_n \simeq -\frac{n+1}{n}\delta_n, \quad n > 0;$$

$$\operatorname{tg}\alpha_n \simeq -n, \quad \operatorname{tg}\beta_n \simeq (n+1); \quad E_n \simeq \left(\frac{n}{z}\right) D_n, \quad n > 0.$$

Корни. β_{ln}—n-й корень уравнения $j_l(\pi\beta) = 0$.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$l=0$	1,0000	2,0000	3,0000	4,0000	5,0000
$l=1$	1,4303	2,4590	3,4709	4,4775	5,4816
$l=2$	1,8346	2,8950	3,9226	4,9385	5,9489
$l=3$	2,2243	3,3159	4,3602	5,3870	6,4050
$l=4$	2,6046	3,7258	4,7873	5,8255	6,8518

α_{ln}—n-й корень уравнения $[dj_l(\pi\alpha)/d\alpha] = 0$.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$l=0$	0	1,4303	2,4590	3,4709	4,4775
$l=1$	0,6626	1,8909	2,9303	3,9485	4,9591
$l=2$	1,0638	2,3205	3,3785	4,4074	5,4250
$l=3$	1,4369	2,7323	3,8111	4,8525	5,8786
$l=4$	1,7974	3,1323	4,2321	5,2869	6,3224

γ_{ln}—n-й корень уравнения $(d/d\gamma)[\pi\gamma j_l(\pi\gamma)] = 0$.

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$l=0$	0,5000	1,5000	2,5000	3,5000	4,5000
$l=1$	0,8734	1,9470	2,9656	3,9744	4,9796
$l=2$	1,2319	2,3692	3,4101	4,4311	5,4440
$l=3$	1,5831	2,7762	3,8400	4,8745	5,8965
$l=4$	1,9296	3,1728	4,2591	5,3076	6,3393

Сфероидальные функции

(См. стр. 466 и следующие.)

Угловые функции. Функция

$$S_{ml}(h, z) = \sum_n{}' d_n(h \mid m, l)\, P^m_{n+m}(z) = (1 - z^2)^{m/2} \sum_n{}' d_n T^m_n(z)$$

(штрих означает, что при четном $l-m$ в сумму входят только члены с четными n, а при нечетном $l-m$ только с нечетными n) является решением уравнения

$$\frac{d}{dz}\left[(1-z^2)\frac{dS}{dz}\right]+\left[A_{ml}(h)-h^2z^2-\frac{m^2}{1-z^2}\right]S=0,$$

которое при различных допустимых значениях постоянной разделения A_{ml} $(l=m,\ m+1,\ m+2,\ \dots)$, где $A_{ml}<A_{m,\,l+1}$, конечно и непрерывно в промежутке $-1\leqslant z\leqslant 1$. Мы требуем, чтобы при $z\to 0$

$$(1-z^2)^{-\frac{1}{2}m}S_{ml}(h,\ z)\simeq\frac{(l+m)!}{(l-m)!\,2^m m!}=T_{l-m}^m(1),$$

так что

$$\sum_n{}'\frac{(n+2m)!}{n!}d_n(h\,|\,m,\ l)=\frac{(l+m)!}{(l-m)!}.$$

Функции S образуют ортогональную систему собственных функций. Нормирующая постоянная равна

$$\int_{-1}^{1}|S_{ml}|^2dz=\sum_n{}'[d_n(h\,|\,m,\ l)]^2\frac{2}{2n+2m+1}\,\frac{(n+2m)!}{n!}=\Lambda_{ml}(h).$$

Значения для отдельных значений z и h:

$$S_{ml}(h,\ z)\simeq\frac{(l+m)!}{2^m m!\,(l-m)!}(1-z^2)^{\frac{1}{2}m},\quad z\to 1.$$

$$S_{ml}(h,0)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\dots(2m+2n-1)}{2^n(n)!}d_{2n},\quad l-m \text{ — четное.}$$

$$\left[\frac{d}{dz}S_{ml}(h,\ z)\right]_{z=0}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2m+2n+1)}{2^n(n)!}d_{2n+1},\qquad l-m \text{ — нечетное.}$$

Если $h\to 0$, то $S_{ml}(h,\ z)\simeq P_l^m(z)$, $A_{ml}\simeq l(l+1)$.

Радиальные функции. Решения первого рода, конечные при $z=\pm 1$.

$$je_{ml}(h,\ z)=\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\left(\frac{z^2-1}{z^2}\right)^{m/2}\sum_n{}'i^{n+m-l}\frac{(n+2m)!}{n!}d_n(h\,|\,ml)\,j_{n+m}(hz)\simeq$$

$$\simeq\frac{1}{\lambda_{ml}(h)}S_{ml}(h,\ z)\simeq\frac{1}{hz}\cos\left[hz-\frac{1}{2}\pi(l+1)\right],\quad hz\to\infty.$$

Здесь d — те же коэффициенты, что и в разложениях функций $S_{ml}(h,\ z)$, и

$$\lambda_{ml}(h)=\frac{i^l}{d_0(h\,|\,ml)}\,\frac{2m+1}{(2h)^m m!}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}S_{ml}(h,\ 0)\quad\text{при}\quad l=m,\ m+2,\ m+4,\ \dots,$$

$$\lambda_{ml}(h)=\frac{2i^{l-1}}{d_1(h\,|\,ml)}\,\frac{(2m+2)(2m+3)}{(2h)^{m+1}m!}\,\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\left[\frac{d}{dz}S_{ml}(h,\ z)\right]_{z=0}$$

$$\text{при}\quad l=m+1,\ m+3,\ \dots,$$

причем $j_m(hz)$ — сферическая функция Бесселя первого рода.

Решения второго рода:

$$ne_{ml}(h,z)=\frac{(l-m)!}{(l+m)!}\left(\frac{z^2-1}{z^2}\right)^{m/2}\sum_n{}'i^{n+m-l}\frac{(n+2m)!}{n!}d_n(h\,|\,ml)\,n_{n+m}(hz)\simeq$$

$$\simeq\frac{1}{hz}\sin\left[hz-\frac{1}{2}\pi(l+1)\right],\quad hz\to\infty,$$

$$\Delta(je,\ ne)=je_{ml}\frac{d}{dz}ne_{ml}-ne_{ml}\frac{d}{dz}je_m=\frac{1}{h(z^2-1)}.$$

Решения третьего рода:

$$he_{ml}(h, z) = je_{ml}(h, z) + ine_{ml}(h, z) \simeq \frac{i^{-l-1}}{hz} e^{ihz}, \quad hz \to \infty,$$

$$he_{0l}(h, \operatorname{ch}\mu) = i^l \left[j_0(u) h_0(v) - \left(\frac{4}{5}\frac{d_2}{d_0} - 1 \right) j_1(u) h_1(v) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{16}{21}\frac{d_4}{d_0} - \frac{4}{7}\frac{d_2}{d_0} + 1 \right) j_2(u) h_2(v) - \ldots \right] \quad \text{при } l = 0, 2, \ldots,$$

$$he_{0l}(h, \operatorname{ch}\mu) = i^{l-1} \frac{12\operatorname{ch}\mu}{h} \left[j_1(u) h_1(v) - \left(\frac{12}{7}\frac{d_3}{d_1} + 1 \right) j_2(u) h_2(v) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{80}{33}\frac{d_5}{d_1} + \frac{4}{3}\frac{d_3}{d_1} + 2 \right) j_3(u) h_3(v) - \ldots \right] \quad \text{при } l = 1, 3, \ldots,$$

$$he_{1l}(h, \operatorname{ch}\mu) = i^{l-1} \frac{12\operatorname{sh}\mu}{h} \left[j_1(u) h_1(v) - \left(\frac{24}{5}\frac{d_2}{d_0} - 3 \right) j_2(u) h_2(v) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{80}{11}\frac{d_4}{d_0} - 8\frac{d_2}{d_0} + 6 \right) j_3(u) h_3(v) - \ldots \right] \quad \text{при } l = 1, 3, \ldots$$

где $u = \frac{1}{2} he^{-\mu}, \quad v = \frac{1}{2} he^{\mu}$.

Теоремы сложения.

$$\frac{e^{ikR}}{R} = 2ik \sum_{m,l} \frac{\varepsilon_m}{\Lambda_{ml}(h)} S_{ml}(h, \cos\vartheta_0) S_{ml}(h, \cos\vartheta) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \times$$
$$\times \begin{cases} je_{ml}(h, \operatorname{ch}\mu_0)\, he_{ml}(h, \operatorname{ch}\mu), & \mu > \mu_0, \\ je_{ml}(h, \operatorname{ch}\mu)\, he_{ml}(h, \operatorname{ch}\mu_0), & \mu < \mu_0, \end{cases}$$

где

$$kR = h^2 [\operatorname{ch}^2\mu + \operatorname{ch}^2\mu_0 - \sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta_0 -$$
$$- 2\operatorname{ch}\mu \operatorname{ch}\mu_0 \cos\vartheta \cos\vartheta_0 - 2\operatorname{sh}\mu \operatorname{sh}\mu_0 \sin\vartheta \sin\vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)],$$

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 2 \sum_{m,l} \frac{\varepsilon_m i^l}{\Lambda_{ml}(h)} S_{ml}(h, \cos\vartheta_0) S_{ml}(h, \cos\vartheta) \cos[m(\varphi - \varphi_0)]\, je_{ml}(h, \operatorname{ch}\mu),$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = h[\operatorname{ch}\mu \cos\vartheta \cos\vartheta_0 + \operatorname{sh}\mu \sin\vartheta \sin\vartheta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)].]$$

Для вытянутых сфероидальных координат, в которых $\mu = 0$ является отрезком $x = y = 0$, $-a/2 \leqslant z \leqslant a/2$, для получения угловых и радиальных решений полагаем соответственно $h = ka/2$ и $z = \cos\vartheta$ или $z = \operatorname{ch}\mu$. Для сплющенных сфероидальных координат, в которых $\rho = 0$ является круглым диском радиуса b, лежащим в плоскости x, y, с центром в начале координат, полагаем $h = ikb$ и $z = \cos\vartheta$ для угловых функций и $z = -i\operatorname{sh}\rho$ ($\mu = \rho - i\pi/2$) для радиальных функций.

Краткая таблица преобразований Лапласа

Функции $f(t)$ и $F(\omega)$ ($\omega = ip$), удовлетворяющие условиям сходимости указанным на стр. 320, связаны между собой соотношениями

$$F(\omega) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} e^{-i\omega t} F(\omega)\, d\omega,$$

в которых ε действительно и положительно.