Решения третьего рода:

$$he_{ml}(h, z) = je_{ml}(h, z) + ine_{ml}(h, z) \simeq \frac{i^{-l-1}}{hz} e^{ihz}, \quad hz \to \infty,$$

$$he_{0l}(h, \operatorname{ch}\mu) = i^l \left[j_0(u) h_0(v) - \left(\frac{4}{5}\frac{d_2}{d_0} - 1\right) j_1(u) h_1(v) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{16}{21}\frac{d_4}{d_0} - \frac{4}{7}\frac{d_2}{d_0} + 1\right) j_2(u) h_2(v) - \ldots \right] \quad \text{при } l = 0, 2, \ldots,$$

$$he_{0l}(h, \operatorname{ch}\mu) = i^{l-1}\frac{12\operatorname{ch}\mu}{h} \left[j_1(u) h_1(v) - \left(\frac{12}{7}\frac{d_3}{d_1} + 1\right) j_2(u) h_2(v) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{80}{33}\frac{d_5}{d_1} + \frac{4}{3}\frac{d_3}{d_1} + 2\right) j_3(u) h_3(v) - \ldots \right] \quad \text{при } l = 1, 3, \ldots,$$

$$he_{1l}(h, \operatorname{ch}\mu) = i^{l-1}\frac{12\operatorname{sh}\mu}{h} \left[j_1(u) h_1(v) - \left(\frac{24}{5}\frac{d_2}{d_0} - 3\right) j_2(u) h_2(v) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{80}{11}\frac{d_4}{d_0} - 8\frac{d_2}{d_0} + 6\right) j_3(u) h_3(v) - \ldots \right] \quad \text{при } l = 1, 3, \ldots$$

где $u = \frac{1}{2} he^{-\mu}, \quad v = \frac{1}{2} he^{\mu}.$

Теоремы сложения.

$$\frac{e^{ikR}}{R} = 2ik \sum_{m,l} \frac{\varepsilon_m}{\Lambda_{ml}(h)} S_{ml}(h, \cos\vartheta_0) S_{ml}(h, \cos\vartheta) \cos[m(\varphi - \varphi_0)] \times$$
$$\times \begin{cases} je_{ml}(h, \operatorname{ch}\mu_0) he_{ml}(h, \operatorname{ch}\mu), & \mu > \mu_0, \\ je_{ml}(h, \operatorname{ch}\mu) he_{ml}(h, \operatorname{ch}\mu_0), & \mu < \mu_0, \end{cases}$$

где

$$kR = h^2 [\operatorname{ch}^2\mu + \operatorname{ch}^2\mu_0 - \sin^2\vartheta - \sin^2\vartheta_0 -$$
$$- 2\operatorname{ch}\mu\operatorname{ch}\mu_0\cos\vartheta\cos\vartheta_0 - 2\operatorname{sh}\mu\operatorname{sh}\mu_0\sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi - \varphi_0)],$$

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 2\sum_{m,l} \frac{\varepsilon_m i^l}{\Lambda_{ml}(h)} S_{ml}(h, \cos\vartheta_0) S_{ml}(h, \cos\vartheta) \cos[m(\varphi - \varphi_0)]\, je_{ml}(h, \operatorname{ch}\mu),$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = h[\operatorname{ch}\mu\cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \operatorname{sh}\mu\sin\vartheta\sin\vartheta_0\cos(\varphi - \varphi_0)].]$$

Для вытянутых сфероидальных координат, в которых $\mu = 0$ является отрезком $x = y = 0$, $-a/2 \leqslant z \leqslant a/2$, для получения угловых и радиальных решений полагаем соответственно $h = ka/2$ и $z = \cos\vartheta$ или $z = \operatorname{ch}\mu$. Для сплющенных сфероидальных координат, в которых $\rho = 0$ является круглым диском радиуса b, лежащим в плоскости x, y, с центром в начале координат, полагаем $h = ikb$ и $z = \cos\vartheta$ для угловых функций и $z = -i\operatorname{sh}\rho$ ($\mu = \rho - i\pi/2$) для радиальных функций.

Краткая таблица преобразований Лапласа

Функции $f(t)$ и $F(\omega)$ ($\omega = ip$), удовлетворяющие условиям сходимости указанным на стр. 320, связаны между собой соотношениями

$$F(\omega) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon} e^{-i\omega t} F(\omega)\, d\omega,$$

в которых ε действительно и положительно.

Оригинал $f(t)$	Преобразование Лапласа $F(p)$ $(p = -i\omega)$
$Af(t)$	$AF(p)$
$f(at)$	$\frac{1}{a} F(p/a)$
df/dt	$pF(p) - f(0)$
d^2f/dt^2	$p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$
$\int_0^t f(t)\, dt$	$(1/p)\, F(p)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n (d^nF/dp^n)$
$(1/t)\, f(t)$	$\int_p^\infty F(q)\, dq$
$\int_0^t f_1(\tau)\, f_2(t-\tau)\, d\tau$	$F_1(p)\, F_2(p)$
$\begin{cases} f(t-a), & t \geqslant a, \\ 0, & t < a, \end{cases}$	$a^{-ap}F(p)$
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-u^2/4t} f(u)\, du$	$\frac{1}{\sqrt{p}}\, F(\sqrt{p})$
$t^{\nu/2} \int_0^\infty u^{-\nu/2} J_\nu (2\sqrt{ut})\, f(u)\, du$	$p^{-\nu-1} F(1/p)$, $\operatorname{Re}\nu > -\frac{1}{2}$,
$\int_0^\infty \frac{t^u f(u)}{\Gamma(u+1)}\, du$	$(1/p)\, F(\ln p)$

Если $f(t)$ — периодическая функция с периодом a, $f(t+a) = f(t)$ при $t > 0$ и $F_0(p) = \int_0^a f(t)\, e^{-pt} dt$, то преобразование Лапласа функции $f(t)$ имеет вид

$$\frac{F_0(p)}{1 - e^{-ap}}.$$

Преобразования Лапласа некоторых конкретных функций. Пусть функция $f(t)$ равна нулю при $t < 0$ и равна указанной ниже функции при $t \geqslant 0$.

$f(t)$	$F(p)$
t^ν, $\operatorname{Re}\nu > -1$	$\Gamma(\nu+1)/p^{\nu+1}$
$\sin(at)$	$a/(p^2 + a^2)$
$\cos(at)$	$p/(p^2 + a^2)$

$f(t)$	$F(p)$
$e^{-bt}\sin(at+\varphi)$	$\dfrac{a\cos\varphi+(p+b)\sin\varphi}{(p+b)^2+a^2}$
$(1/t)\sin(at)$	$\operatorname{arc\,tg}(a/p)$
$t^{\nu}\sin(at)$	$\dfrac{1}{2i}\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{(p^2+a^2)^{\nu+1}}\left[(p+ia)^{\nu+1}-(p-ia)^{\nu+1}\right]$
$t^{\nu}\cos(at)$	$\dfrac{1}{2}\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{(p^2+a^2)^{\nu+1}}\left[(p+ia)^{\nu+1}+(p-ia)^{\nu+1}\right]$
$e^{-bt}[A\,\mathrm{sh}(at)+B\,\mathrm{ch}(at)]$	$\dfrac{aA}{(p+b)^2-a^2}+\dfrac{B(p+b)}{(p+b)^2-a^2}$
$t^{\nu}e^{at}, \quad \operatorname{Re}\nu>-1,$	$\Gamma(\nu+1)/(p-a)^{\nu+1}$
$F(\alpha\,\vert\,\gamma\,\vert\,t)$ (вырожденная гипергеометрическая функция)	$\dfrac{1}{p}F\left(\alpha,\ 1\,\vert\,\gamma\,\vert\,\dfrac{1}{p}\right)$ (гипергеометрическая функция)
$\begin{cases}(t^2-a^2)^{\nu}, & t>a,\\ 0, & t<a,\end{cases}\quad \operatorname{Re}\nu>-\dfrac{1}{2},$	$i\sqrt{\dfrac{\pi a}{2p}}\,\dfrac{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}{(ap)^{\nu}}\,e^{\frac{1}{2}\pi i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}H^{(1)}_{\nu+\frac{1}{2}}(iap)$
$\begin{cases}(2at-t^2)^{n-\frac{1}{2}}, & 0<t<2a,\\ 0, & t>2a,\end{cases}$ $n>0,$	$\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\times$ $\times\, 2^n(a/p)^n e^{-ap-\frac{1}{2}\pi i n}J_n(iap)$
$e^{-bt}J_{\nu}(at), \quad \operatorname{Re}\nu>-1,$	$\dfrac{a^{\nu}}{\sqrt{(p+b)^2+a^2}}\times$ $\times\left[p+b+\sqrt{(p+b)^2+a^2}\right]^{-\nu}$
$\begin{cases}J_0\left(a\sqrt{t^2-b^2}\right), & t>b,\\ 0, & t<b,\end{cases}$	$e^{-b\sqrt{p^2+a^2}}/\sqrt{p^2+a^2}$
$u(t-a)=\begin{cases}0, & t<a,\\ 1, & t>a,\end{cases}=\displaystyle\int_{-\infty}^{t-a}\delta(t)\,dt$	$(1/p)\,e^{-ap}$
$\delta(t-a)=\lim\limits_{\Delta\to 0}\left\{\dfrac{1}{\Delta}[u(t-a)-\right.$ $\left.-u(t-a-\Delta)]\right\}$	e^{-ap}
$\dfrac{1}{2}\left[e^{b}\delta(t+a)-e^{-b}\delta(t-a)\right]$	$\mathrm{sh}(ap+b)$
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-na)$	$1/(1-e^{-ap})$
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\delta(t-na)$	$1/(1+e^{-ap})$

$f(t)$	$F(p)$
$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u(t-na)$	$1/p\,(1+e^{-ap})$
$2\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-a-2na)$	$1/\mathrm{sh}\,(ap)$
$2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\delta(t-a-2na)$	$1/\mathrm{ch}\,(ap)$
$\delta(t)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\delta(t-2na)$	$\mathrm{th}\,(ap)$
$u(t)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t-2na)$	$(1/p)\,\mathrm{th}\,(ap)$
$2\sum_{n=0}^{\infty}f(t-2na-a)\,u(t-a-2na)$	$F(p)/\mathrm{sh}\,(ap)$
$2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n f(t-2na-a)\times u(t-a-2na)$	$F(p)/\mathrm{ch}\,(ap)$
$f(t)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f(t-2na)\,u(t-2na)$	$F(p)\,\mathrm{th}\,(ap)$
$2\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(2n+1)b}\delta(t-a-2na)$	$1/\mathrm{sh}\,(ap+b)$
$2\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(2n+1)b}\delta(t-c-a-2na)$	$e^{-cp}/\mathrm{sh}\,(ap+b)$
$\sum_{n=0}^{\infty}e^{-(2n+1)b}\left[e^{d}\delta(t+c-a-2na)-e^{-d}\delta(t-c-a-2na)\right]$	$\mathrm{sh}\,(cp+d)/\mathrm{sh}\,(ap+b)$

Для $q=\sqrt{p/a^2}$ и

$$\mathrm{erfc}(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty}e^{-w^2}dw\simeq\begin{cases}1-(2z/\sqrt{\pi}), & z\to 0,\\ (e^{-z^2}/z\sqrt{\pi}), & z\to\infty.\end{cases}$$

$(x/2a\sqrt{\pi t^3})\,e^{-x^2/4a^2t}$	e^{-qx}
$(a/\sqrt{\pi t})\,e^{-x^2/4a^2t}$	$(1/q)\,e^{-qx}$
$\mathrm{erfc}\,(x/2a\sqrt{t})$	$(1/p)\,e^{-qx}$
$\left(t+\frac{x^2}{2a^2}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{t}{\pi}}\,e^{-x^2/4a^2t}$	$(1/p^2)\,e^{-qx}$

$f(t)$	$F(p)$
$(a/\sqrt{\pi t})\, e^{-x^2/4a^2t} - ha^2 e^{hx+a^2h^2t}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t}\right)$	$\frac{e^{-qx}}{q+h}$
$a^2 e^{hx+a^2h^2t}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t}\right)$	$\frac{e^{-qx}}{q(q+h)}$
$(1/h)\operatorname{erfc}(x/2a\sqrt{t}) - \frac{1}{h} e^{hx+a^2h^2t}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ah\sqrt{t}\right)$	$\frac{e^{-qx}}{p(q+h)}$

ЛИТЕРАТУРА

Работы, в которых рассматривается общая задача о решении уравнения Гельмгольца и волнового уравнения:

Вебстер А. и Сёге Г., Дифференциальные уравнения в частных производных математической физики, Гостехиздат, М.—Л., 1934.
Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
Зоммерфельд А., Уравнения в частных производных математической физики, Издат. Иностр. лит., М., 1951.
Купрадзе В. Д., Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
Курант Р. и Гильберт Д., Методы математической физики, т. 2, изд. 2, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
Морз Ф., Колебания и звук, Гостехиздат, М., 1949.
Рэлей Дж. В., Теория звука, Гостехиздат, М., 1955.
Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV, изд. 3, Гостехиздат, М., 1957.
Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
Франк П. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, Гостехиздат, М.—Л., 1937.
Baker B. B. and Copson E. T., Mathematical Theory of Huygen's Principle, Oxford—New York, 1939.
Bateman H., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Cambridge—New York, 1932.
Coulson C. A., Waves, a Mathematical Account of the Common Types of Wave Motion, Edinburgh, 1941.
Hadamard J. S., Leçons sur la propagation des ondes et les equations de l'hydrodynamique, Paris, 1903.
Jeffreys H. and Jeffreys B. S., Methods of Mathematical Physics, Cambridge—New York, 1946.
Pöckels F., Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta^2u+k^2u=0$, Leipzig, 1891.
Slater J. C. and Frank N. H., Introduction to Theoretical Physics, New York, 1933.

Работы, в которых рассматриваются специальные функции, использованные в этой главе, или же специальные методы решения волнового уравнения:

Ватсон Г. Н., Теория бесселевых функций, Издат. иностр. лит., М., 1949.
Карслоу Х. и Егер Д., Операционные методы в прикладной математике, Гостехиздат, М., 1948.
Кочин Н. Е., Кибель И. А. и Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, изд. 5, Гостехиздат, М., 1955.
Ламб Г., Гидродинамика, Гостехиздат, М., 1947.
Лурье А. Н., Операционное исчисление, Гостехиздат, М., 1950.
Мак-Лахлан Н. В., Теория и приложение функций Матье, Издат. иностр. лит., М., 1953.
Микусинский Я., Операторное исчисление, Издат. иностр. лит., М., 1956.
Стретт М. Дж. О., Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, Харьков—Киев, 1935.

Buchholz H., Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Bedeutung für die Integration der Wellengleichung in den Koordinaten eines Rotationsparaboloides, Z. angew. Math. Mech., 23, 47—101 (1943).

Campbell G. A. and Foster R. M., Fourier Integrals for Practical Application, Bell System Techn. Monograph B-584, 1931.

Churchill R. V., Modern Operational Mathematics in Engineering, New York, 1944.

Doetsch G., Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Berlin, 1937.

Foldy L. L., Multiple Scattering of Waves, Phys. Rev., 67, 107 (1945).

Heins A. E. and Feshbach H., The Coupling of Two Acoustical Ducts, J. Math. Phys., 26, 143 (1947).

Lax M. and Feshbach H., On the Radiation Problem at high Frequencies, J. Acoust. Soc. Amer., 19, 682 (1947).

Levine H. and Schwinger J., On the Radiation of Sound from an Unflanged Circular Pipe, Phys. Rev., 73, 383 (1948).

Levine H. and Schwinger J., On the Theory of Diffraction by an Aperture in an Infinite Plane, Phys. Rev., 75, 1423 (1949).

L'achlan N. W., Bessel Functions for Engineers, Oxford—New York, 1934.

Stratton J. A., Morse P. M., Chu L. J., Hutner R. A., Elliptic Cylinder and Spheroidal Wave Functions, New York, 1941.