нения относительно a_k, показать, что если ε зависит только от модуля $\mathbf{k}$ и если M мало по сравнению с E, то

$$a_0 \simeq e^{-\gamma t}, \qquad a_k \simeq \overline{M}(k)\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} \frac{e^{-\gamma t + i(\varepsilon - E)t/\hbar} - 1}{E - \varepsilon(k) - i\hbar\gamma},$$

где $\gamma = \pi |M(k_1)|^2 k_1^2/\hbar\varepsilon'(k_1)]$, k_1 — корень уравнения $\varepsilon(k) = E$ и ε' — производная от ε по k. Показать далее, что волновая функция при $t > 0$ будет иметь вид

$$\Psi \simeq \varphi_1\chi_0 e^{-\gamma t - iEt/\hbar} +$$
$$+ \frac{4\pi\overline{M}(k_1)}{r_2'} \varphi_0 e^{ik_1 r_2' - iEt/\hbar} u\left[t - \frac{\hbar r_2'}{\varepsilon'(k_1)}\right] \exp\left\{-\gamma\left[t - \frac{\hbar r_2'}{\varepsilon'(k_1)}\right]\right\},$$

где $r_2' = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0|$. Предполагая, что φ представляет атом или ядро и что χ_0, χ_k представляют частицы (фотоны, позитроны и т. д.) в их «скрытом» или эмитированном состоянии соответственно, выяснить физическое значение этого результата.

Полиномы Якоби

Полиномы $F(-n, n+a \mid c \mid z)$ называются *полиномами Якоби* n-го порядка для параметров a и c $(n = 0, 1, 2, \ldots;\ c \neq 0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Эти полиномы ортогональны между собой в интервале $0 \leqslant z \leqslant 1$ с весовой функцией $z^{c-1}(1-z)^{a-c}$:

$$\int_0^1 z^{c-1}(1-z)^{a-c} F(-m, m+a \mid c \mid z)\, F(-n, n+a \mid c \mid z)\, dz =$$
$$= \delta_{mn} \frac{n!\,[\Gamma(c)]^2\,\Gamma(n+a-c+1)}{(a+2n)\,\Gamma(a+n)\,\Gamma(c+n)}, \quad \operatorname{Re} c > 0, \quad \operatorname{Re}(a-c) > -1.$$

Общие соотношения.

$$F(-n, n+a \mid c \mid z) = \frac{z^{1-c}(1-z)^{c-a}}{c(c+1)\ldots(c+n-1)} \frac{d^n}{dz^n}\left[z^{c+n-1}(1-z)^{a+n-c}\right],$$

$$\frac{d}{dz} F(-n, n+a \mid c \mid z) = -\frac{n(n+a)}{c} F(-n+1, n+a+1 \mid c+1 \mid z),$$

$$zF(-n, n+a \mid c \mid z) = \frac{c-1}{2n+a}\left[F(-n, n+a-1 \mid c-1 \mid z) -\right.$$
$$\left. - F(-n-1, n+a \mid c-1 \mid z)\right],$$

$$F(-n, n+a \mid c \mid z) = \frac{(a+n)(c+n)}{c(2n+a)} F(-n, n+a+1 \mid c+1 \mid z) -$$
$$- \frac{n(n+a+c)}{c(2n+a)} F(-n+1, n+a \mid c+1 \mid z) =$$
$$= \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a)}{\Gamma(n+c)\,\Gamma(c-a-n)} F(-n, n+a \mid a-c+1 \mid 1-z) =$$
$$= \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(2n+a)}{\Gamma(n+a)\,\Gamma(n+c)} (-z)^n F\left(-n, 1-c-n \mid 1-2n-a \mid \frac{1}{z}\right) =$$
$$= \frac{\Gamma(c)\, z^{1-c}}{\Gamma(n+a)\,\Gamma(c-n-a)} \int_0^z (z-t)^{c-n-a-1}\, t^{n+a-1}(1-t)^n\, dt.$$

Специальные случаи.

$$F(-n,\ n+2\beta+1\,|\,\beta+1\,|\,z)=\frac{2^{\beta}n!\,\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n+2\beta+1)}\,T_n^{\beta}(1-2z,)$$

$$F\left(-n,\ n\,\middle|\,\frac{1}{2}\,\middle|\,z\right)=\cos(2n\arcsin\sqrt{z}),$$

$$F\left(-n,\ n+2\,\middle|\,\frac{3}{2}\,\middle|\,z\right)=\frac{\sin[2(n+1)\arcsin\sqrt{z}]}{2(n+1)\sqrt{z(1-z)}},$$

$$F(0,\ a\,|\,c\,|\,z)=1,\qquad F(-1,\ a+1\,|\,c\,|\,z)=1-\frac{a+1}{c}z,$$

$$F(-2,\ a+2\,|\,c\,|\,z)=1-\frac{2(a+2)}{c}z+\frac{(a+2)(a+3)}{c(c+1)}z^2,\ \ldots,$$

$$F(-n,\ n+a\,|\,c\,|\,z)=\sum_{s=0}^{n}(-1)^s\frac{n!\,\Gamma(c)\,\Gamma(a+n+s)}{(n-s)!\,s!\,\Gamma(a+n)\,\Gamma(c+s)}z^s,$$

$$z^m=\sum_{n=0}^{m}(-1)^n\frac{(a+2n)\,m!\,\Gamma(a+n)\,\Gamma(c+m)}{n!\,(m-n)!\,\Gamma(a+n+m+1)\,\Gamma(c)}F(-n,\ n+a\,|\,c\,|\,z),$$

$$F\left(-n,\ n+2m\,\middle|\,m+\frac{1}{2}\,\middle|\,\sin^2\alpha\right)=$$

$$=\frac{(n+1)\ldots(n+m)\,(n+m)\ldots(n+2m-1)}{(-1)^m\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(m-\frac{1}{2}\right)}\left[\frac{1}{\sin 2\alpha}\frac{d}{d\alpha}\right]^m\cos[2(n+m)\alpha],$$

$$F\left(-n,\ n+l_1+l_2+2\,\middle|\,l_2+\frac{3}{2}\,\middle|\,\sin^2\alpha\right)=\sum_{m=0}^{n}\varepsilon_m(-1)^m\times$$

$$\times\left\{\sum_{s=m}^{n}\frac{(-1)^s n!\,(2s)!\,(n+l_1+l_2+s+1)!\,\Gamma\left(l_2+\frac{3}{2}\right)}{2^{2s}s!\,(n-s)!\,(s+m)!\,(s-m)!\,(n+l_1+l_2+1)!\,\Gamma\left(s+l_2+\frac{3}{2}\right)}\right\}\cos(2m\alpha).$$

Полуцилиндрические функции

$$J_m^{(2)}(z)=\frac{2}{\pi i^m}\int_0^{\pi/2}e^{iz\cos u}\cos(mu)\,du,\quad m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;$$

$$J_m^{(2)}(z)=J_m(z)-\left\{\begin{array}{ll}\frac{2i}{\pi}\left[\frac{z}{m^2-1}+\frac{z^3}{(m^2-1)(m^2-9)}+\ldots\right], & m=0,\ 2,\ 4,\ldots,\\ \frac{2i}{m\pi}\left[1+\frac{z^2}{m^2-4}+\frac{z^4}{(m^2-4)(m^2-16)}+\ldots\right], & m=1,3,5,\ldots,\end{array}\right\}\simeq$$

$$\simeq H_m^{(1)}(z)+\left\{\begin{array}{ll}\frac{2i}{\pi z}, & m=0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\\ \frac{2mi}{\pi z^2}, & m=1,\ 3,\ 5,\ \ldots,\end{array}\right.\qquad z\gg m:$$