

Специальные случаи.

$$F(-n, n + 2\beta + 1 | \beta + 1 | z) = \frac{2^\beta n! \Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(n + 2\beta + 1)} T_n^\beta(1 - 2z),$$

$$F(-n, n \left| \frac{1}{2} \right| z) = \cos(2n \arcsin \sqrt{z}),$$

$$F(-n, n + 2 \left| \frac{3}{2} \right| z) = \frac{\sin [2(n+1) \arcsin \sqrt{z}]}{2(n+1) \sqrt{z(1-z)}},$$

$$F(0, a | c | z) = 1, \quad F(-1, a + 1 | c | z) = 1 - \frac{a+1}{c} z,$$

$$F(-2, a + 2 | c | z) = 1 - \frac{2(a+2)}{c} z + \frac{(a+2)(a+3)}{c(c+1)} z^2, \dots,$$

$$F(-n, n + a | c | z) = \sum_{s=0}^n (-1)^s \frac{n! \Gamma(c) \Gamma(a+n+s)}{(n-s)! s! \Gamma(a+n) \Gamma(c+s)} z^s,$$

$$z^m = \sum_{n=0}^m (-1)^n \frac{(a+2n) m! \Gamma(a+n) \Gamma(c+m)}{n! (m-n)! \Gamma(a+n+m+1) \Gamma(c)} F(-n, n + a | c | z),$$

$$F(-n, n + 2m \left| m + \frac{1}{2} \right| \sin^2 \alpha) = \frac{(n+1) \dots (n+m) (n+m) \dots (n+2m-1)}{(-1)^m \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \dots \left(m - \frac{1}{2}\right)} \left[\frac{1}{\sin 2\alpha} \frac{d}{d\alpha} \right]^m \cos [2(n+m)\alpha],$$

$$F(-n, n + l_1 + l_2 + 2 \left| l_2 + \frac{3}{2} \right| \sin^2 \alpha) = \sum_{m=0}^n \varepsilon_m (-1)^m \times \left\{ \sum_{s=m}^n \frac{(-1)^s n! (2s)! (n+l_1+l_2+s+1)! \Gamma\left(l_2 + \frac{3}{2}\right)}{2^{2s} s! (n-s)! (s+m)! (s-m)! (n+l_1+l_2+1)! \Gamma\left(s+l_2 + \frac{3}{2}\right)} \right\} \cos(2m\alpha).$$

Полуцилиндрические функции

$$J_m^{(2)}(z) = \frac{2}{\pi i^m} \int_0^{\pi/2} e^{iz \cos u} \cos(mu) du, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

$$J_m^{(2)}(z) = J_m(z) - \left\{ \begin{array}{l} \frac{2i}{\pi} \left[\frac{z}{m^2-1} + \frac{z^3}{(m^2-1)(m^2-9)} + \dots \right], \quad m = 0, 2, 4, \dots, \\ \frac{2i}{m\pi} \left[1 + \frac{z^2}{m^2-4} + \frac{z^4}{(m^2-4)(m^2-16)} + \dots \right], \quad m = 1, 3, 5, \dots, \end{array} \right\} \simeq \simeq H_m^{(1)}(z) + \begin{cases} \frac{2i}{\pi z}, & m = 0, 2, 4, \dots, \\ \frac{2mi}{\pi z^2}, & m = 1, 3, 5, \dots, \end{cases} \quad z \gg m:$$

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{dJ_m^{(2)}}{dz} \right) + \left(1 - \frac{m^2}{z^2} \right) J_m^{(2)} = \begin{cases} \frac{2i}{\pi z}, & m = 0, 2, 4, \dots, \\ \frac{2mi}{\pi z^2}, & m = 1, 3, 5, \dots; \end{cases}$$

$$e^{iz \cos \varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cos(2n\varphi) J_{2n}^{(2)}(z);$$

$$\frac{d}{dz} J_0^{(2)}(z) = -J_1^{(2)}(z); \quad \frac{d}{dz} J_m^{(2)}(z) = \frac{1}{2} J_{m-1}^{(2)}(z) - \frac{1}{2} J_{m+1}^{(2)}(z), \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\frac{m}{z} J_m^{(2)}(z) = \frac{1}{2} J_{m-1}^{(2)}(z) + \frac{1}{2} J_{m+1}^{(2)}(z) + \begin{cases} 0, & m = 2, 4, 6, \dots, \\ \frac{2i}{\pi z}, & m = 1, 3, 5, \dots. \end{cases}$$

Аналогично для $n > 2$ можно определить $J_m^{(n)}(z)$ так, что в интервале $-\pi/n \leq \varphi \leq \pi/n$ будет справедливо равенство

$$e^{iz \cos \varphi} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^{nm} \cos(nm\varphi) J_{nm}^{(n)}(z).$$

Значения суммы ряда повторяются n раз на интервале φ длины 2π . Другими словами,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^{nm} \cos(nm\varphi) J_{nm}^{(n)}(z) = \begin{cases} e^{iz \cos \varphi}, & -\frac{\pi}{n} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{n}, \\ e^{iz \cos(\varphi - 2\pi/n)}, & \frac{\pi}{n} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{n}. \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Эти функции имеют следующие общие свойства:

$$J_m^{(n)}(z) = \frac{n}{\pi i^m} \int_0^{\pi/n} e^{iz \cos u} \cos(mu) du = \frac{n}{2\pi i^m} \int_{-\pi/n}^{\pi/n} e^{iz \cos u + imu} du =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{ni^s - m}{\pi s!} z^s \int_0^{\pi/n} \cos^s u \cos(mu) du, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots;$$

$$J_m^{(n)}(z) \simeq \frac{n}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz - \frac{1}{2} i\pi(m + \frac{1}{2})} + \frac{n \cos(m\pi/n)}{\pi i^{m-1} \sin(\pi/n)} \frac{1}{z} e^{iz \cos(\pi/n)}, \quad z \rightarrow \infty;$$

$$\frac{d}{dz} J_0^{(n)}(z) = -J_1^{(n)}(z); \quad \frac{d}{dz} J_m^{(n)}(z) = \frac{1}{2} J_{m-1}^{(n)}(z) - \frac{1}{2} J_{m+1}^{(n)}(z), \quad m > 0;$$

$$\frac{m}{z} J_m^{(n)}(z) = \frac{1}{2} J_{m-1}^{(n)}(z) + \frac{1}{2} J_{m+1}^{(n)}(z) - \frac{ni^{-m}}{\pi z} e^{iz \cos(\pi/n)} \sin\left(\frac{m\pi}{n}\right);$$

$$\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \left(z \frac{dJ_m^{(n)}}{dz} \right) + \left(1 - \frac{m^2}{z^2} \right) J_m^{(n)}(z) =$$

$$= \frac{n}{\pi i^m} \left[\frac{i}{z} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{n}\right) - \frac{m}{z^2} \sin\left(\frac{m\pi}{n}\right) \right] e^{iz \cos(\pi/n)}.$$

С указанными функциями тесно связана функция

$$E_m^{(n)}(z) = \frac{n}{\pi i^m} \int_0^{\pi/n} e^{iz \cos u} \sin(mu) du \simeq \frac{in}{\pi i^m z} (e^{iz \cos(\pi/n)} - e^{iz}), \quad z \rightarrow \infty;$$

$$\frac{d}{dz} E_m^{(n)}(z) = \frac{1}{2} E_{m-1}^{(n)}(z) - \frac{1}{2} E_{m+1}^{(n)}(z);$$

$$\frac{m}{2} E_m^{(n)}(z) = \frac{1}{2} E_{m-1}^{(n)}(z) + \frac{1}{2} E_{m+1}^{(n)}(z) + \frac{ni^{-m}}{\pi z} \left[\cos\left(\frac{m\pi}{n}\right) - 1 \right].$$

ЛИТЕРАТУРА

Книги и статьи, в которых рассматриваются вопросы диффузии тепла и различных частиц:

- Снеддон И., Преобразования Фурье, Издат. иностр. лит., М., 1955.
 Франк Ф., Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, М., 1937.
 Bateman H., Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Cambridge, New York, 1932.
 Bethe H. A., Nuclear Physics, Sec. 59, Diffusion of Neutrons, Rev. Modern Phys., 9, 130 (1937).
 Carslaw H. S., Jaeger J. C., Conduction of Heat in Solids, Oxford, New York, 1947.
 Morse P. M., Allis W. P., Lamar E. S., Velocity Distributions for Elastically Colliding Electrons, Phys. Rev., 48, 412 (1935).

Вопросы, связанные с функциями распределения и их применениями:

- Лоренц Г. А., Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения, Гостехиздат, М., 1953.
 Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, Издат. иностр. лит., М., 1953.
 Fermi E., Sul Moto dei Neutroni nelle Sostanze Idrogenate, Ricerca sci., 7, 13 (1936).
 Hopf E., Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge, New York, 1934.
 Marshak R. E., Theory of the Slowing Down of Neutrons, Rev. Modern Phys., 19, 185 (1947).
 Placzek G., Seidel W., Mark C., Le Caine J., Milne's Problem for Diffusing Neutrons, Phys. Rev., 72, 550—566 (1947).
 Spencer L. V., Fano U., Penetration and Diffusion of X-Rays, Nat. Bur. Standards, J. Research, 46, 446 (1951).

Книги и статьи по волновой механике, затрагивающие вопросы, рассматриваемые в § 12.3:

- Бете Г. А., Квантовая механика простейших систем, Гостехиздат, М., 1935.
 Ландау Л. и Лифшиц Е., Квантовая механика, ч. I., ГИТТЛ, М. — Л., 1948.
 Мотт Н., Мессии I., Теория атомных столкновений, Издат. иностр. лит., М., 1951.
 Шифф Л., Квантовая механика, Издат. иностр. лит., М., 1957.
 Blatt J. M., Jackson J. D., On the Interpretation of Neutron-proton Scattering Data by the Schwinger Variational Method, Phys. Rev., 76, 18 (1949).
 Bohm D., Quantum Theory, Prentice-Hall, New York, 1951.
 Breit G., Separation of Angles in the Two-electron Problem, Phys. Rev., 35, 569 (1930).
 Condon E. U., Morse P. M., Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1929.
 Feshbach H., Peaslee D. C., Weisskopf V. F., Scattering and Absorption of Particles by Atomic Nuclei, Phys. Rev., 71, 145 (1947).
 Hylleraas E. A., New Calculation of the Energy of Helium in the Ground State, Z. Physik, 54, 347 (1929).
 Kemble E. C., Fundamental Principles of Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1937.
 Kramers H. A., Die Grundlagen der Quantentheorie, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1938.
 Mott N. F., Sneddon I. N., Quantum Mechanics and Its Applications, Oxford, New York, 1948.
 Schwinger J., On the Charge Independence of Nuclear Force, Appendix, Phys. Rev., 78, 138 (1950).