а $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — функция сравнения для $\widetilde{\mathfrak{A}}$, сопряженной к $\mathfrak{A}$ (см. стр. 506).

13.30. Вариационным методом предыдущей задачи рассчитать аффинор рассеяния $\mathfrak{F}(\mathbf{k}_s\,|\,\mathbf{k}_i)$ для сферы радиуса a с коэффициентом преломления n. В качестве функций сравнения использовать $\mathfrak{B} = \mathfrak{J}_i \exp(i\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r})$; $\widetilde{\mathfrak{B}} = \mathfrak{J}_s \exp(-\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r})$. (Обе эти функции поперечные, поэтому для упрощения вычислений в знаменателе в интеграле можно писать $\mathfrak{G}$ вместо $\mathfrak{G}_t$.) Подсчитать рассеянные поля $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$, а также Q для $\lambda \gg 2\pi a$ и сравнить их с соответствующими выражениями для рассеяния на проводящей сфере.

Таблица сферических векторных гармоник

Решения векторных уравнений Лапласа и Гельмгольца в сферических координатах r, ϑ, φ представляются произведениями амплитудных функций радиуса на одну из следующих трех систем векторных функций углов ϑ и φ : $\mathbf{P}$, $\mathbf{B}$ или $\mathbf{C}$. Эти функции выражаются через скалярные сферические гармоники

$$X_n^m(\vartheta,\varphi) = e^{im\varphi}P_n^m(\cos\vartheta);$$

$$= [\cos m\varphi + i\sin m\varphi]\sin^m\vartheta\, T_{n-m}^m(\cos\theta),\quad m = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Действительную часть векторной функции обозначим индексом e (для четных по φ), а мнимую часть индексом o (для нечетных по φ), т. е.

$$\mathbf{P}_{mn} = \mathbf{P}_{mn}^e + i\mathbf{P}_{mn}^o.$$

Эти функции следующие:

$$\mathbf{P}_{mn}(\vartheta,\varphi) = \mathbf{a}_r X_n^m(\vartheta,\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left[r^{1-n}\,\mathrm{grad}\,(r^n X_n^m) - r^{n+2}\,\mathrm{grad}\,(r^{-n-1}X_n^m)\right] =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\Big\{\frac{1}{2}\mathbf{i}\left[(1-\delta_{0m})(n+m)(n+m-1)X_{n-1}^{m-1} - (1+\delta_{0m})X_{n-1}^{m+1} - \right.$$

$$\left. -(1-\delta_{0m})(n-m+1)(n-m+2)X_{n+1}^{m-1} + (1+\delta_{0m})X_{n+1}^{m+1}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{j}\left[(1-\delta_{0m})(n+m)(n+m-1)\,iX_{n-1}^{m-1} + (1+\delta_{0m})\,iX_{n-1}^{m+1} - \right.$$

$$\left. -(1-\delta_{0m})(n-m+1)(n-m+2)\,iX_{n+1}^{m-1} - (1+\delta_{0m})\,iX_{n+1}^{m+1}\right] +$$

$$+\mathbf{k}\left[(n+m)X_{n-1}^m + (n-m+1)X_{n+1}^m\right]\Big\},$$

где $\delta_{mn} = 0$ при $m \neq n$ и 1 при $m = n$;

$$\mathbf{B}_{mn}(\vartheta,\varphi) = \frac{r}{\sqrt{n(n+1)}}\,\mathrm{grad}\,[X_n^m(\vartheta,\varphi)] = \mathbf{a}_r \times \mathbf{C}_{mn} =$$

$$= \frac{1}{2n+1}\left[\sqrt{\frac{n+1}{n}}\,r^{1-n}\,\mathrm{grad}\,(r^n X_n^m) + \sqrt{\frac{n}{n+1}}\,r^{n+2}\,\mathrm{grad}\,(r^{-n-1}X_n^m)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{n(n+1)}}{(2n+1)\sin\vartheta}\left\{\mathbf{a}_\vartheta\left[\frac{n-m+1}{n+1}X_{n+1}^m - \frac{n+m}{n}X_{n-1}^m\right] + \mathbf{a}_\varphi\frac{m(2n+1)}{n(n+1)}\,iX_n^m\right\} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\mathbf{i}}{2n+1}\left\{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\left[(1-\delta_{0m})(n+m)(n+m-1)X_{n-1}^{m-1} - (1+\delta_{0m})X_{n-1}^{m+1}\right] + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{n}{n+1}}\left[(1-\delta_{0m})(n-m+1)(n-m+2)X_{n+1}^{m-1} - (1+\delta_{0m})X_{n+1}^{m+1}\right]\right\} +$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\mathbf{j}}{2n+1}\left\{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\left[(1-\delta_{0m})(n+m)(n+m-1)\,iX_{n-1}^{m-1}+(1+\delta_{0m})\,iX_{n-1}^{m+1}\right]+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\left[(1-\delta_{0m})(n-m+1)(n-m+2)\,iX_{n+1}^{m-1}+(1+\delta_{0m})\,iX_{n+1}^{m+1}\right]\right\}+$$

$$+\frac{\mathbf{k}}{2n+1}\left\{\sqrt{\frac{n+1}{n}}(n+m)X_{n-1}^{m}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}(n-m+1)X_{n+1}^{m}\right\};$$

$$\mathbf{C}_{mn}(\vartheta,\varphi)=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\operatorname{rot}[\mathbf{r}X_n^m(\vartheta,\varphi)]=-\mathbf{a}_r\times\mathbf{B}_{mn}=$$

$$=\frac{\sqrt{n(n+1)}}{(2n+1)\sin\vartheta}\left\{\mathbf{a}_\vartheta\frac{m(2n+1)}{n(n+1)}iX_n^m-\mathbf{a}_\varphi\left[\frac{n-m+1}{n+1}X_{n+1}^m-\frac{n+m}{n}X_{n-1}^m\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\left\{\frac{1}{2}\mathbf{i}\left[(1-\delta_{0m})(n+m)(n-m+1)\,iX_n^{m-1}+(1+\delta_{0m})\,iX_n^{m+1}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\mathbf{j}\left[(1-\delta_{0m})(n+m)(n-m+1)X_n^{m-1}-(1+\delta_{0m})X_n^{m+1}\right]-\mathbf{k}miX_n^m\right\};$$

$$\mathbf{P}_{mn}^s\cdot\mathbf{B}_{mn}^s=\mathbf{P}_{mn}^s\cdot\mathbf{C}_{mn}^s=\mathbf{B}_{mn}^s\cdot\mathbf{C}_{mn}^s=0,\quad s=e,\ o.$$

Заметим, что $\mathbf{P}_{0n}=\mathbf{P}_{0n}^e$. Поэтому в случае $m=0$ достаточно взять лишь действительные части коэффициентов при $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

Частные случаи:

$$\mathbf{P}_{00}=\mathbf{a}_r;\quad \mathbf{P}_{01}=\mathbf{a}_r\cos\vartheta;\qquad \mathbf{P}_{11}=\mathbf{a}_re^{i\varphi}\sin\vartheta;$$

$$\mathbf{B}_{00}=0;\quad \mathbf{B}_{01}=-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathbf{a}_\vartheta\sin\vartheta;\qquad \mathbf{B}_{11}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,e^{i\varphi}(\mathbf{a}_\vartheta\cos\vartheta+i\mathbf{a}_\varphi);$$

$$\mathbf{C}_{00}=0;\quad \mathbf{C}_{01}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\mathbf{a}_\varphi\sin\vartheta;\qquad \mathbf{C}_{11}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\,e^{i\varphi}(i\mathbf{a}_\vartheta-\mathbf{a}_\varphi\cos\vartheta).$$

Зональные векторные гармоники ($m=0,\ n>0$):

$$\mathbf{P}_{0n}(\vartheta,\varphi)=\mathbf{a}_rP_n(\cos\vartheta)=$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left\{[\mathbf{i}\cos\varphi+\mathbf{j}\sin\varphi]\left[P_{n+1}^1(\cos\vartheta)-P_{n-1}^1(\cos\vartheta)\right]+\right.$$

$$\left.+\mathbf{k}\left[(n+1)P_{n+1}(\cos\vartheta)+nP_{n-1}(\cos\vartheta)\right]\right\}\simeq\mathbf{k},\ \vartheta\to0;$$

$$\mathbf{B}_{0n}(\vartheta,\varphi)=-\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\mathbf{a}_\vartheta P_n^1(\cos\vartheta)=$$

$$=-\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{\mathbf{i}\cos\varphi+\mathbf{j}\sin\varphi}{\sqrt{n(n+1)}}\left[nP_{n+1}^1(\cos\vartheta)+(n+1)P_{n-1}^1(\cos\vartheta)\right]+\right.$$

$$\left.+\mathbf{k}\sqrt{n(n+1)}\left[P_{n+1}(\cos\vartheta)-P_{n-1}(\cos\vartheta)\right]\right\};$$

$$\mathbf{C}_{0n}(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\, \mathbf{a}_\varphi P_n^1(\cos\vartheta) = \\ = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}(-\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi)\, P_n^1(\cos\vartheta).$$

Интегральные и дифференциальные соотношения:

$$\int\int \mathbf{P}_{mn}^s \cdot \mathbf{B}_{\mu\nu}^\sigma d\Omega = \int\int \mathbf{P}_{mn}^s \cdot \mathbf{C}_{\mu\nu}^\sigma \, d\Omega = \int\int \mathbf{B}_{mn}^s \cdot \mathbf{C}_{\mu\nu}^\sigma \, d\Omega = 0;$$

$$\int\int \mathbf{P}_{mn}^s \cdot \mathbf{P}_{\mu\nu}^\sigma \, d\Omega = \int\int \mathbf{B}_{mn}^s \cdot \mathbf{B}_{\mu\nu}^\sigma \, d\Omega = \\ = \int\int \mathbf{C}_{mn}^s \cdot \mathbf{C}_{\mu\nu}^\sigma \, d\Omega = \frac{4\pi/\varepsilon_m}{2n+1}\, \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\, \delta_{s\sigma}\delta_{m\mu}\delta_{n\nu},$$

где $d\Omega = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$, а пределы интегрирования

$$0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

$$(s,\ \sigma = e,\ o;\ \nu,\ n = 1, 2, 3, \ldots;\ \mu,\ m = 0, 1, \ldots, \nu, n);$$

$$\operatorname{div}[r^{n+1}\mathbf{P}_{mn}(\vartheta, \varphi)] = (n+3)\, r^n X_n^m(\vartheta, \varphi);$$

$$\operatorname{div}(r^{n-1}\mathbf{P}_{mn}) = (n+1)\, r^{n-2} X_n^m; \quad \operatorname{div}(r^{-n}\mathbf{P}_{mn}) = -(n-2)\, r^{-n-1} X_n^m;$$

$$\operatorname{div}(r^{-n-2}\mathbf{P}_{mn}) = -n r^{-n-3} X_n^m;$$

$$\operatorname{div}(r^{n+1}\mathbf{B}_{mn}) = -\sqrt{n(n+1)}\, r^n X_n^m;$$

$$\operatorname{div}(r^{n-1}\mathbf{B}_{mn}) = -\sqrt{n(n+1)}\, r^{n-2} X_n^m;$$

$$\operatorname{div}(r^{-n}\mathbf{B}_{mn}) = -\sqrt{n(n+1)}\, r^{-n-1} X_n^m;$$

$$\operatorname{div}(r^{-n-2}\mathbf{B}_{mn}) = -\sqrt{n(n+1)}\, r^{-n-3} X_n^m;$$

$$\operatorname{div}(r^{n+1}\mathbf{C}_{mn}) = \operatorname{div}(r^{n-1}\mathbf{C}_{mn}) = \operatorname{div}(r^{-n}\mathbf{C}_{mn}) = \operatorname{div}(r^{-n-2}\mathbf{C}_{mn}) = 0;$$

$$\operatorname{rot}(r^{n+1}\mathbf{P}_{mn}) = \sqrt{n(n+1)}\, r^n \mathbf{C}_{mn};$$

$$\operatorname{rot}(r^{n-1}\mathbf{P}_{mn}) = \sqrt{n(n+1)}\, r^{n-2} \mathbf{C}_{mn};$$

$$\operatorname{rot}(r^{-n}\mathbf{P}_{mn}) = \sqrt{n(n+1)}\, r^{-n-1} \mathbf{C}_{mn};$$

$$\operatorname{rot}(r^{-n-2}\mathbf{P}_{mn}) = \sqrt{n(n+1)}\, r^{-n-3} \mathbf{C}_{mn};$$

$$\operatorname{rot}(r^{n+1}\mathbf{B}_{mn}) = -(n+2)\, r^n \mathbf{C}_{mn};$$

$$\operatorname{rot}(r^{n-1}\mathbf{B}_{mn}) = -n r^{n-2} \mathbf{C}_{mn};$$

$$\operatorname{rot}(r^{-n}\mathbf{B}_{mn}) = (n-1)\, r^{-n-1} \mathbf{C}_{mn};$$

$$\operatorname{rot}(r^{-n-2}\mathbf{B}_{mn}) = (n+1)\, r^{-n-3} \mathbf{C}_{mn};$$

$$\operatorname{rot}(r^n \mathbf{C}_{mn}) = (n+1)\, r^{n-1} \mathbf{B}_{mn} + \sqrt{n(n+1)}\, r^{n-1} \mathbf{P}_{mn};$$

$$\operatorname{rot}(r^{-n-1}\mathbf{C}_{mn}) = -n r^{-n-2} \mathbf{B}_{mn} + \sqrt{n(n+1)}\, r^{-n-2} \mathbf{P}_{mn}.$$

ЛИТЕРАТУРА

Книги по электромагнитной теории:

Абрагам М. и Беккер Р., Теория электричества, М.—Л., 1936.
Борн М., Оптика, Харьков—Киев, 1937.
Зоммерфельд А., Электродинамика, Издатинлит, М., 1958.
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1957.
Слэтер Дж. К., Передача ультракоротких волн, М.—Л., 1946.
Стрэттон Дж. А., Теория электромагнетизма, М.—Л., 1948.
Франк Ф. и Мизес Р., Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, М.—Л., 1937.
Hansen W. W. A New Type of Expansion in Radiation Problems, Phys. Rev., **47**, 139 (1935).
Jeans J. H., Mathematical Theory of Electricity and Magnetism, New York, 1925.
Livens G. H., The Theory of Electricity, New York, 1918.
Mason M. and Weawer W., The Electromagnetic Field, Chicago, 1929.
Shelkunoff S. A., Electromagnetic Waves, New York, 1943.
Silver S. editor, Microwave Antenna Theory and Design, New York, 1949.

Книги по теории упругости:

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.
Ляв А., Математическая теория упругости, М.—Л., 1935.
Тимошенко С. П., Теория упругости, М.—Л., 1934.
Sokolnikoff I. S., Mathematical Theory of Elasticity, New York, 1946.

Книги по гидродинамике вязкой жидкости:

Ламб Г., Гидродинамика, М.—Л., 1947.
Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1953.
Milne-Thomson L. M., Theoretical Hydrodynamics, London, 1938.