Задачи к главе 10

10.1. Дан брус, сечение которого является прямоугольником с высотой b и шириной a. На трех его гранях $y=0$, $x=0$, $x=a$ поддерживается нулевая температура. Через четвертую грань $y=b$ происходит теплообмен с внешним источником по закону

$$\beta \frac{d}{db} T(x, b) = T_0 - T(x, b),$$

где $T(x,y)$ есть температура точки (x, y), лежащей внутри бруса, T_0 — температура внешнего источника, β — постоянная. Написать удовлетворяющее граничным условиям разложение $T(x, y)$ в ряд Фурье. Показать, что количество тепла, протекающего через сечение $y=b$ за секунду, равно

$$\frac{8T_0 \varkappa}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1/(2n+1)}{(\pi\beta/a)(2n+1) + \operatorname{th}[(2n+1)(\pi b/a)]},$$

где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности материала, из которого изготовлен брус.

10.2. Показать, что функция Грина единичного линейного источника внутри прореза, ограниченного плоскостями $y=0$, $x=0$, $x=a$, с однородными условиями Неймана на границе равна

$$G_0(x, y \mid x_0, y_0) =$$
$$= -\frac{4\pi}{a}\begin{Bmatrix} y \\ y_0 \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n} \cos\left(\frac{\pi n x_0}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \cdot \begin{cases} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n y_0}{a}\right) \exp\left(-\frac{\pi n y}{a}\right), \\ \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n y}{a}\right) \exp\left(-\frac{\pi n y_0}{a}\right), \end{cases}$$

где верхние члены в скобках следует брать при $y \geqslant y_0$, а нижние при $y \leqslant y_0$. Показать, что эта функция является вещественной частью функции

$$F = -2 \ln\left\{\left[\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi z_0}{a}\right)\right]\left[\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi \bar{z}_0}{a}\right)\right]\right\},$$

где $z = x+iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $\bar{z}_0 = x_0 - iy_0$. Показать, что мнимая часть функции F является магнитным потенциалом, создаваемым единичным током, текущим по проходящему через точку (x_0, y_0) проводу, помещенному в прорез внутри массы железа, имеющего весьма большую магнитную проницаемость.

10.3. Две параллельные проволоки, расстояние между которыми равно $2b$, помещены в изолирующий материал, внешней поверхностью которого является круговой цилиндр радиуса a $(a > b)$. Ось цилиндра расположена между проволоками и равноудалена от них. Ток в каждой из проволок создает U единиц тепла в секунду на единицу длины. Пусть коэффициент теплопроводности изолирующего материала равен $\varkappa$, а радиус поперечного сечения проволок ρ значительно меньше b. Найти установившуюся температуру поверхности каждой из проволок, если на внешней поверхности изолятора поддерживается нулевая температура.

10.4. Внутри области $r \leqslant R$ с магнитной проницаемостью $\mu = 1$ задается магнитное поле при помощи магнитного потенциала

$$\psi = H_0[-x + (1/6R^2)(x^3 - 3xy^2)], \qquad r^2 = x^2 + y^2 < R^2,$$

где $H = -\operatorname{grad}\psi$. В это поле помещается цилиндр радиуса $a \ll R$ с осью, проходящей через точку $r=0$, причем материал цилиндра имеет магнитную проницаемость μ. В результате поле оказывается искаженным. Каков будет искаженный магнитный потенциал внутри и вне цилиндра?

10.5. Длинная полоса ширины a, изготовленная из проводящего материала, помещена внутрь изолирующей оболочки, наружная поверхность которой есть цилиндр. Поперечным сечением этого цилиндра является эллипс, фокусы которого расположены на краях полосы, а малая ось равна $2b$. Разность потенциалов полосы и наружной поверхности оболочки равна V. Через оболочку, сопротивление которой равно R, происходит утечка тока.

Найти утечку тока, приходящуюся на единицу длины полосы, после того как процесс установился.

10.6. По медной проволоке, поперечное сечение которой есть круг радиуса a, течет ток высокой частоты. Частота его равна f *гц*. В этом случае плотность тока на расстоянии r от оси проволоки приближенно равна

$$i \approx \frac{3I}{\pi a^2}\,\frac{1-k\,(1-r^4/a^4)}{3-2k},$$

где $k = f^2a^4/31000$ (для меди), а I есть эффективная сила тока в амперах. Этим приближением можно пользоваться, пока k меньше единицы. Каким будет стационарное распределение температуры внутри проволоки, если на ее поверхности поддерживается нулевая температура? Начертить график температуры в центре проволоки как функции от частоты f, когда f изменяется от $f=0$ до $f=2000$ *гц*, считая $a = 1/4$ *см* и $I = 10$ *а*.

10.7. Цилиндр из диэлектрика имеет радиус a и диэлектрическую постоянную ε. Параллельно оси цилиндра на расстоянии c от нее $(c > a)$ расположен линейный заряд с плотностью q (на сантиметр). Найти распределение потенциала внутри цилиндра и вне его. Найти напряженность электрического поля в центре цилиндра.

10.8. Даны две поверхности, уравнения которых в эллиптических координатах имеют вид $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$. Эти поверхности являются компланарными полуплоскостями, разделенными щелью ширины a. Показать, что функция Грина для уравнения Лапласа при нулевых граничных условиях имеет вид

$$G_0(\mu, \vartheta \mid \mu_0, \vartheta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} e^{-n\,|\mu-\mu_0|} \sin(n\vartheta_0)\sin(n\vartheta),$$

где $0 \leqslant \vartheta$, $\vartheta_0 \leqslant \pi$ и $-\infty < \mu, \mu_0 < \infty$.

Показать, что эта функция Грина является вещественной частью функции

$$F = 2\ln\left\{\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\mu + i\vartheta - \mu_0 - i\vartheta_0)\right]}{\operatorname{sh}\left[\frac{1}{2}(\mu + i\vartheta - \mu_0 + i\vartheta_0)\right]}\right\}.$$

Вычислить емкость проволоки радиуса ρ с осью, проходящей через точку x_0, y_0 $(\rho \ll y_0)$, по отношению к поверхностям $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$.

10.9. N проводников изолированы друг от друга. Проводник с номером n имеет потенциал V_n по отношению к бесконечности, а полный заряд его равен Q_n. Показать, что

$$Q_n = \sum_{m=1}^{N} c_{nm} V_m \quad \text{и} \quad V_n = \sum_{m=1}^{N} a_{nm} Q_m, \qquad c_{mn} = c_{nm}$$

и получить соотношение между коэффициентами c_{nm} и a_{nm}. Коэффициент c_{nn} называется *коэффициентом емкости* или просто емкостью n-го проводника; коэффициент c_{nm} называется *коэффициентом* (*электростатической*) *индукции* проводников с номерами n и m. Показать, исходя из результатов гл. 3, что поле этих проводников должно быть таким, чтобы выражение

$$W = \frac{1}{2} \sum_{m,n} V_m c_{mn} V_n = \frac{1}{2} \sum_{m,n} Q_m a_{mn} Q_n$$

достигало своего минимума при данных граничных условиях. Получить коэффициенты c_{nm} для случая, соответствующего формулам (10.2.28), и выразить через них коэффициент усиления.

10.10. Потенциал полуплоскости $y=0$, $x \gg 0$ равен нулю. Две проволоки, параллельные этой плоскости, с радиусами поперечных сечений ρ_1 и ρ_2 соответственно и осями, проходящими через точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) (причем $\rho_1 \ll y_1$, $\rho_2 \ll y_2$), имеют потенциалы V_1 и V_2. Показать, что потенциал полного поля приближенно равен вещественной части выражения

$$F = 2Q_1 \ln\left(\frac{w-\overline{w}_1}{w-w_1}\right) + 2Q_2 \ln\left(\frac{w-\overline{w}_2}{w-w_2}\right), \qquad w = \sqrt{2(x+iy)}.$$

Получить отсюда значения коэффициентов c_{11}, c_{22}, c_{01}, c_{02}, c_{12}, где полуплоскость считается проводником с номером 0. (Определение c_{nm} см. в задаче 10.9.)

10.11. Показать, что функция Грина для уравнения Лапласа в двумерной системе гиперболических координат, определяемых равенствами $z = x+iy = \sqrt{2w}$, $w = \mu + i\varkappa$, может быть записана в виде

$$G(\mu,\varkappa \mid \mu_0,\varkappa_0) = \frac{1}{\sqrt{\mu_0^2+\varkappa_0^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu u + i\varkappa v}}{u^2+v^2}\, du\, dv.$$

Показать, что функция Грина для области положительных значений $\varkappa$ (первый квадрант плоскости x, y), равная нулю на поверхности $\varkappa=0$ (положительная часть оси x, положительная часть оси y), может быть представлена в системе полярных координат r, φ в виде ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} \sin(2n\varphi_0) \sin(2n\varphi) \cdot \begin{Bmatrix} (r/r_0)^{2n}, & r < r_0 \\ (r_0/r)^{2n}, & r > r_0 \end{Bmatrix} = 2\operatorname{Re}\left[\ln\left(\frac{w-\overline{w}_0}{w-w_0}\right)\right].$$

Вычислить емкость поверхности $\varkappa=0$ относительно проволоки радиуса ρ с осью, параллельной оси z и проходящей через точку x_0, y_0 ($\rho \ll x_0$, y_0).

10.12. Два цилиндра из материала с диэлектрической постоянной ε (для остального пространства $\varepsilon = 1$) имеют одинаковые радиусы, равные c, и параллельные оси, расстояние между которыми равно $2b$. Вектор напряженности E однородного электрического поля перпендикулярен осям этих цилиндров и составляет угол $\pi/2 - \varphi$ с плоскостью, в которой лежат эти оси. Доказать, что потенциал искаженного поля можно записать в биполярных координатах в виде

$$\psi=\begin{cases} Ea\cos\varphi+2aE\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1+\operatorname{cth}(n\xi_0)}{\varepsilon+\operatorname{cth}(n\xi_0)}\,e^{-n\xi}\cos(n\theta+\varphi), & \xi>\xi_0,\\ Ea\cos\varphi+2aE\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left\{e^{-n\xi}-\dfrac{(\varepsilon-1)\,e^{-n\xi_0}}{\varepsilon+\operatorname{cth}(n\xi_0)}\,\dfrac{\operatorname{sh}(n\xi)}{\operatorname{sh}(n\xi_0)}\right\}\cos(n\theta+\varphi), & \\ & 0<\xi<\xi_0.\end{cases}$$

Какой вид будут иметь эти выражения при $\xi<0$? Выразить ξ_0 через b и c. Разобрать случай $b\gg c$ и найти член первого порядка, выражающий влияние одного из цилиндров на поле внутри второго.

10.13. Два металлических заземленных цилиндра с одинаковыми радиусами, равными c, и параллельными осями, расстояние между которыми равно $2b$, помещены в однородное электрическое поле, вектор напряженности E которого перпендикулярен к осям цилиндров и образует угол $\pi/2-\varphi$ с плоскостью, в которой лежат эти оси. Найти распределение потенциала вне цилиндров в системе биполярных координат θ, ξ, определенных формулами (10.1.41), и подсчитать плотность заряда на поверхностях цилиндров. С точностью до членов первого порядка относительно величины c/b определить силу, действующую на каждый элемент поверхности цилиндров, и получить этим способом годную для $b\gg c$ и аналогичную формуле (10.1.48) приближенную формулу, выражающую силу взаимодействия между цилиндрами.

10.14. По проводящему цилиндру радиуса c с осью, параллельной плоскости y, z и отстоящей от нее на расстояние b, течет ток I, равномерно распределенный по поперечному сечению цилиндра. Полагая, что теплопроводность этого цилиндра та же, что и у остальной части пространства, и что на плоскости y, z поддерживается нулевая температура, найти распределение температуры внутри цилиндра и вне его.

10.15. Сетка из проводов помещена между бесконечной пластиной $y=c$, имеющей потенциал V_p, и второй пластиной $y=-b$, имеющей нулевой потенциал. Провода сетки имеют один и тот же потенциал V_g, их радиусы равны ρ, а их оси проходят через точки $y=0$, $x=\ldots,-2a,-a,0,a,2a,\ldots$ (перпендикулярно плоскости x,y). Показать, что в области между пластинами потенциал приближенно равен

$$\psi=\frac{1}{4\pi cb+2a(c+b)\ln(a/2\pi\rho)}\left\{4\pi cbV_g+2abV_p\ln\left(\frac{a}{2\pi\rho}\right)+\right.$$
$$+y\left[2\pi V_g(c-b)+2\pi bV_p+2aV_p\ln\left(\frac{a}{2\pi\rho}\right)\right]-$$
$$\left.-\left[aV_g(c+b)-abV_p\right]\ln\left[4\sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right)+4\operatorname{sh}^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)\right]\right\}.$$

Чему равны коэффициенты c_{gg}, c_{ga}, c_{gp} (см. задачу 10.9) для системы, состоящей из сетки и обеих пластин? Чему равен коэффициент усиления сетки по отношению к пластине (расположенной в плоскости $y=c$) и катоду ($y=-b$)?

10.16. Преобразование $z=w+iae^{i\varphi}\operatorname{tg}\psi+\dfrac{a^2e^{2i\varphi}}{w+iae^{i\varphi}\operatorname{tg}\psi}$ переводит круг радиуса $a\sec\psi$ с центром в начале координат, лежащий в плоскости w, во внешность дужки некоторой окружности в плоскости z с хордой длины $4a$, образующей угол φ с горизонтальной осью. Получить выражение для потока с циркуляцией вокруг этой дужки. Для того чтобы у заднего края дужки поток не был турбулентным, циркуляция скорости должна равняться $V_r = 2aV_0 \sec\psi \sin(\varphi + \psi)$. Доказать это. Показать, что если рассчитанные на единицу длины подъемная сила и лобовое сопротивление полосы, профиль которой имеет вид данной дужки, даются формулой $L + iD = 2\pi\rho V_0 V_r$, то подъемная сила равна $L = 4\pi\rho a V_0^2 \sec\psi \sin(\varphi + \psi)$ [см. формулу (10.2.20)].

10.17. Область R_1 лежит вправо от полуплоскости $x = 0, y \geqslant 0$ и выше полуплоскости $y = 0, x \geqslant 0$; область R_2 лежит вправо от полуплоскости $x = 0, y \leqslant -a$ и ниже полуплоскости $y = -a, x \geqslant 0$. Эти области заполнены железом, имеющим весьма большую магнитную проницаемость μ. Остальная часть пространства R_0, лежащая влево от плоскости $x = 0$ и между «полюсными наконечниками» R_1 и R_2, имеет магнитную проницаемость $\mu = 1$. При помощи формулы Шварца — Кристоффеля показать, что если разность магнитных потенциалов областей R_1 и R_2 равна V, то линии магнитного потенциала χ и магнитные силовые линии ψ задаются при помощи функции

$$z = \frac{a}{\pi} \operatorname{Ar\,ch}\left\{\exp\left[\frac{-\pi}{V}(\psi + i\chi)\right]\right\} - \frac{a}{\pi}\left\{1 - \exp\left[\frac{2\pi}{V}(\psi + i\chi)\right]\right\}^{1/2},$$

осуществляющей соответствующее конформное отображение. Вычислив и начертив график изменения напряженности магнитного поля вдоль средней линии $y = -\frac{1}{2}a$, показать, как это поле убывает вблизи краев «полюсных наконечников». Показать, что вблизи вершины угла $z = 0$ напряженность магнитного поля приближенно равна

$$H = -i\,\overline{(dF/dz)} \simeq -i\,(V/a)\,(a/2\pi\bar{z})^{1/3}.$$

10.18. Помимо двух «полюсных наконечников», описанных в предыдущей задаче, имеется проволока, величиной радиуса которой можно пренебречь, проходящая через точку $x = b$, $y = -\frac{1}{2}a$. По этой проволоке течет ток I. Предполагая, что в данной задаче единственным источником магнитного поля является этот ток, показать, что $z = x + iy$ и функция магнитных силовых линий и магнитного потенциала $F = \psi + i\chi$ связаны соотношением

$$z = \frac{a}{\pi}\{\operatorname{Ar\,ch}[1/\sqrt{e^{-F/2I} - \beta^2}] - \sqrt{1 + \beta^2 - e^{-F/2I}}\},$$

где

$$\frac{\pi b}{a} = \operatorname{Ar\,ch}\beta - \sqrt{1 + \beta^2}.$$

Начертить график изменения магнитной напряженности вдоль средней линии $y = -\frac{1}{2}a$ для $\beta = 0{,}5$; 2.

10.19. При помощи преобразования Шварца — Кристоффеля отобразить внутреннюю область многоугольника, ограниченного линиями $y = 0$, $y = -a$ и частью оси y между точками $y = -b$ и $y = -a$ (канал между $y = 0$ и $y = -a$, частично закрытый перпендикулярной перегородкой, оставляющей щель ширины b), на верхнюю полуплоскость w. Показать, что потенциал скоростей ψ и функция тока χ для течения жидкости по этому каналу связаны с переменной $z=x+iy$ соотношениями

$$z=\frac{a}{\pi}\ln\left\{\frac{\sqrt{[1/w+\alpha]\,[1/w+1/\alpha]}+1/w+\frac{1}{2}\,[\alpha+1/\alpha]}{\sqrt{[w+\alpha]\,[w+1/\alpha]}+w+\frac{1}{2}\,[\alpha+1/\alpha]}\right\},$$

$$F=\psi+i\chi=(aU/\pi)\ln w,\quad \alpha=\operatorname{ctg}^2(\pi b/4a),$$

где U — скорость жидкости при $x=\pm\infty$. Показать, что скорость жидкости в точке, соответствующей точке w, равна

$$v=U\,\frac{\sqrt{[\bar{w}+\alpha]\,[\bar{w}+1/\alpha]}}{\bar{w}+1}$$

по величине и направлению.

10.20. В условиях предыдущей задачи показать, что если $b\ll a$, то с точностью до членов третьего порядка относительно малой величины $\pi b/4a$ функция тока на отрицательной части оси y (т. е. в щели) связана с y приближенным уравнением

$$-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi y}{4a}\right)\simeq\operatorname{tg}\left(\frac{\pi b}{4a}\right)\sin\left(\frac{\pi\chi}{2aU}\right)\left[1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi b}{4a}\right)\cos^2\left(\frac{\pi\chi}{2aU}\right)\right]$$

и что скорость жидкости в направлении, нормальном к этой линии, равна с точностью до членов второго порядка

$$v\simeq\frac{2aU}{\pi b}\,\frac{1}{\sqrt{1-y^2/b^2}}\left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{\pi b}{4a}\right)^2\left(1-2\frac{y^2}{b^2}\right)\right].$$

10.21. «Канал» переменного сечения ограничен следующими четырьмя линиями: $y=a$, положительной частью оси x, частью оси y от $y=0$ до $y=a-b$ и прямой $y=a-b$ при $x\leqslant 0$. При помощи преобразования Шварца — Кристоффеля показать, что отображение этой области на верхнюю половину плоскости w имеет вид

$$z=\frac{a}{\pi}\left\{\operatorname{Arch}\left[\frac{2w-\alpha-1}{\alpha-1}\right]-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{Arch}\left[\frac{(\alpha+1)\,w-2\alpha}{(\alpha-1)\,w}\right]\right\},$$

где $\alpha=(a/b)^2$. Пользуясь вспомогательной формулой $F=\psi+i\chi=(aU/\pi)\ln w$, показать, что вектор скорости равен

$$v=U\sqrt{(\bar{w}-\alpha)/(\bar{w}-1)}$$

и что вблизи точки $z=i(a-b)$ скорость приблизительно равна

$$v\simeq U\,[a^4(a^2-b^2)/\pi^2b^2]^{\frac{1}{6}}\,e^{-\frac{1}{3}\pi i}\,(\bar{z}+ia-ib)^{-\frac{1}{3}}.$$

10.22. Показать, что функция

$$z=a/[\cos(n\operatorname{arc\,tg}w)]^{2/n}$$

преобразует вещественную ось плоскости w в n лучей ($z=re^{i\varphi}$) $r\geqslant a$, $\varphi=0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n$. Где расположены в плоскости w точки, соответствующие точкам $r=a$, $\varphi=m/n$; $z=0$? Показать, что если через точку $z=0$ проходит проволока радиуса $\rho\ll a$, то емкость ее единицы длины относительно системы пластин, пересекающих плоскость x, y по этим лучам, приближенно равна

$$C \simeq n/4\,[\ln(2a/\rho)]^{\frac{1}{2}n}.$$

10.23. Конденсатор состоит из внешней замкнутой оболочки S_0, имеющей потенциал V, внутри которой помещена оболочка S_i, имеющая нулевой потенциал. Область R, заключенная между этими поверхностями, заполнена веществом с диэлектрической постоянной ε. Показать, что интегральное уравнение для потенциала в области R имеет вид

$$\psi(\mathbf{r}) = V + \frac{1}{4\pi}\int G(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_i')\left[\frac{\partial}{\partial n_i'}\psi(r_i')\right]dS_i',$$

где G — функция Грина (для уравнения Лапласа), соответствующая всей области, ограниченной поверхностью S_0 (когда S_i отсутствует), обращающаяся в нуль на S_0; $\mathbf{r}_i$ — радиус-вектор точки, лежащей на S_i, и $\partial/\partial n_i$ — производная по нормали к S_i, внешней по отношению к области R [$(1/4\pi)(\partial\psi/\partial n_i)$ есть плотность заряда на S_i]. Показать, что решение этого интегрального уравнения эквивалентно решению вариационной задачи для функционала

$$[C] = \left[\int \chi(\mathbf{r}_i)\,dS_i\right]^2 \Big/ \int\int \chi(\mathbf{r}_i)\,G(\mathbf{r}_i\,|\,\mathbf{r}_i')\,\chi(\mathbf{r}_i')\,dS_i\,dS_i'.$$

Функция распределения заряда χ, на которой функционал $[C]$ достигает стационарного значения, пропорциональна фактическому распределению заряда на S_i $\left(\sigma = V\chi\int\chi dS_i\Big/\int\int\chi G\chi\,dS_i\,dS_i'\right)$, и это стационарное значение $[C]$ есть значение емкости $C = (1/V)\int\sigma\,dS_i$.

10.24. Используя вариационный принцип задачи 10.23, вычислить емкость сферы радиуса b, находящейся внутри цилиндрической оболочки радиуса a с осью l $\left(b < a, \frac{1}{2}l\right)$, причем центр сферы лежит на оси оболочки. Применяя функцию Грина (10.3.24) и формулу

$$\int_0^\pi \cos(\alpha\cos\vartheta)\,J_0(\beta\sin\vartheta)\,P_{2n}(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta =$$
$$= (-1)^n\,2P_{2n}\left(\alpha/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right)j_{2n}\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right),$$

вычислить соответствующие интегралы. Сначала вычислить C, считая $\chi = 1$ (однородное распределение заряда на сфере), затем, полагая $\chi = 1 + \gamma P_2(\cos\vartheta)$ и варьируя γ, получить более точное значение минимума C. Насколько более точным является второй результат?

10.25. Боковая поверхность и одно из оснований цилиндрического сосуда, имеющего радиус a и высоту b, сделаны из металла, и на них поддерживается нулевой потенциал. На другом конце сосуд закрыт сеткой, имеющей потенциал V_0, настолько частой, что потенциал в просветах сетки также равен V_0. Внутри сосуда находится газ под давлением, достаточно низким для того, чтобы средняя длина свободного пробега его молекул была велика по сравнению с a и b. В некоторый момент газ оказывается однородно ионизированным, после чего возникшие электроны притягиваются к сетке и большинство из них вылетает из сосуда. Показать, что средняя энергия вылетающих ионов равна

$$eV_0\left[1 - \frac{4a}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{th}(\nu_n b/2a)}{\nu_n^3}\right],$$

где ν_n есть n-й корень уравнения $J_0(\nu)=0$, а e — заряд электрона. Вычислить эту среднюю энергию в случае, когда $a=b$.

10.26. Зонд, изготовленный из проводящего материала и имеющий форму половины вытянутого сфероида с наибольшим радиусом поперечного сечения b и длиной a, погружен в землю так, что ось его перпендикулярна поверхности земли, а поперечное сечение касательно к ней. Потенциал зонда по отношению к весьма удаленной от него части земли равен V_0. Показать, что если к моменту, когда достигается стационарное состояние, с зонда стекает ток I, то проводимость земли (которую мы предполагаем однородной) равна

$$\frac{I}{4\pi\sqrt{a^2-b^2}\,V_0}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{a-\sqrt{a^2-b^2}}\right).$$

10.27. Тело имеет форму, близкую к сферической, так что его поверхность может быть задана уравнением $r=a+F(\vartheta, \varphi)$, где функция F всюду настолько мала, что величиной F^2/a^2 можно пренебречь. Показать, что если

$$F(\vartheta, \varphi)=\sum_{m,n}(A_{mn}\cos m\varphi+B_{mn}\sin m\varphi)\,P_n^m(\cos\vartheta)$$

и на поверхности этого тела поддерживается потенциал V_0, то соответствующий потенциал вне тела с той же степенью точности равен

$$\psi=V_0\frac{a}{r}+V_0\sum_{m,n}(A_{mn}\cos m\varphi+B_{mn}\sin m\varphi)\frac{a^n}{r^{n+1}}P_n^m(\cos\vartheta).$$

Предположив, что сфера несколько сжата с одной стороны, так что ее поверхность задается уравнением

$$r=\begin{cases} a\cos\vartheta_0/\cos\vartheta \simeq a\,(2-\cos\vartheta)/(2-\cos\vartheta_0), \quad \vartheta_0\to 0, & \vartheta\leqslant\vartheta_0,\\ a, & \vartheta\geqslant\vartheta_0,\end{cases}$$

показать, что

$$F=\frac{a/2}{2-\cos\vartheta_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_n(\cos\vartheta)}{(2n+3)(2n-1)}[-(2n-1)P_{n+2}(\cos\vartheta_0)+$$
$$+2(2n+1)P_n(\cos\vartheta_0)-(2n+3)P_{n-2}(\cos\vartheta_0)].$$

[В выражениях, соответствующих значениям $n=0$ и $n=1$, появляются отрицательные индексы. Здесь мы пользуемся соотношением $P_{-\lambda}(z)=P_{\lambda-1}(z)$.] Показать, что емкость сжатой описанным образом сферы приближенно равна

$$C=a\left\{1-\frac{1}{6(2-\cos\vartheta_0)}[3P_1(\cos\vartheta_0)-P_2(\cos\vartheta_0)-2]\right\}.$$

Чему равна величина поправки, если $\vartheta_0=10°$? Чему равно приращение напряженности поля на этой поверхности при $\vartheta=\vartheta_0$, если $\vartheta_0=10°$?

10.28. Показать, что если функция $\psi(r, \vartheta, \varphi)$ есть решение уравнения Лапласа в сферических координатах, то функция $(a^2/r)\,\psi(a^2/r, \vartheta, \varphi)$ также удовлетворяет уравнению Лапласа.

Пусть ψ удовлетворяет некоторому уравнению Пуассона. Чему равна плотность заряда в том уравнении Пуассона, которому удовлетворяет функция $(a^2/r)\,\psi(a^2/r, \vartheta, \varphi)$?

Это преобразование $r \to \rho = \frac{a^2}{r}$ называется инверсией относительно сферы радиуса a с центром в начале. Показать, что если центр сферы, относительно которой производится инверсия, лежит на некоторой другой сфере, то последняя преобразуется в плоскость. Показать, что при данной инверсии сферический сегмент с углом ϑ_0 преобразуется в диск. Используя метод инверсии, вычислить плотность заряда и полный заряд на сфере, из которой удален сферический сегмент с углом ϑ_0, помещенной в однородное электрическое поле, направленное по оси этого сегмента. Сравнить ответы с результатами, полученными на стр. 252.

10.29. Плотность распределения электрического заряда $\rho(r, \vartheta, \varphi)$ равна нулю вне сферы $r = a$. Показать, что поле вне сферы $r = a$ соответствует эффективному заряду $q = A_{00}$, эффективному дипольному моменту с компонентами $D_x = A_{11}$, $D_y = B_{11}$, $D_z = A_{10}$ и эффективному квадрупольному моменту с компонентами

$$Q_{xx} = 2A_{22} - \frac{1}{3}A_{20}, \quad Q_{xy} = 2B_{22} = Q_{yx},$$
$$Q_{xz} = A_{21} = Q_{zx}, \quad Q_{yy} = -2A_{22} - \frac{1}{3}A_{20},$$
$$Q_{yz} = B_{21} = Q_{zy}, \quad Q_{zz} = \frac{2}{3}A_{20},$$

если потребовать, чтобы $Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = 0$ (определение величин A и B см. на стр. 258).

10.30. При помощи формул (10.3.22) и (10.3.34) показать, что

$$e^{kz}\cos(m\varphi) J_m(k\rho) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(kr)^n}{(n+m)!}\cos(m\varphi) P_n^m(\cos\vartheta)$$

и, следовательно,

$$r^n \cos(m\varphi) P_n^m(\cos\vartheta) = \lim_{k\to 0}\left\{\frac{(n+m)!}{n!}\frac{d^n}{dk^n}\left[e^{kz}J_m(k\rho)\cos(m\varphi)\right]\right\},$$

где r, ϑ, φ — сферические, а ρ, z, φ — коаксиальные им круговые цилиндрические координаты. Во внутренней области кругового цилиндра конечной длины $l\left(\rho \leqslant a, |z| \leqslant \frac{1}{2}l\right)$ распределен заряд с постоянной плотностью. Используя записанные выше соотношения, вычислить первые четыре члена ($n = 0$, 1, 2, 3) в разложении (10.3.42) потенциала по мультиполям на большом расстоянии от цилиндра. Чему равны элементы аффинора квадрупольного момента для этого распределения заряда (см. задачу 10.29)?

10.31. Пусть двухатомная молекула приближенно представлена при помощи ядра с зарядом $+3$, расположенного в точке $z = \frac{1}{2}a$, ядра с зарядом $+1$ в точке $z = -\frac{1}{2}a$ и распределения отрицательного заряда

$$\rho = -\frac{16}{\pi a^3}\frac{(\xi_0 - \xi)\left(1 + \frac{1}{3}\eta\right)}{(\xi_0 - 1)^2(\xi^2 - \eta^2)} \text{ при } \xi < \xi_0, \quad \rho = 0 \text{ при } \xi \geqslant \xi_0,$$

где ξ, η, φ — вытянутые сфероидальные координаты с фокусами в точках $z = \pm a/2$. Вычислить при $\xi > \xi_0$ электростатический потенциал, соответствующий этому распределению зарядов. Используя формулы (10.3.35) и (10.3.51), подсчитать эффективные дипольные и квадрупольные моменты (см. задачу 10.29).

10.32. Диск радиуса a, потенциал которого V_0, помещен внутрь сферы с тем же центром и радиусом c ($c > a$), имеющей нулевой потенциал. Используя метод, данный на стр. 270 и след., найти распределение потенциала в пространстве между диском и сферой и емкость этой системы, пренебрегая членами выше четвертого порядка относительно a/c.

10.33. В заземленной проводящей плоскости проделано круглое отверстие радиуса a. Точечный заряд q помещен на оси этого отверстия на расстоянии b от его центра. Найти соответствующее распределение потенциала. Как быстро стремится к нулю потенциал в точке на той половине оси отверстия, на которой нет заряда, если расстояние этой точки от центра отверстия неограниченно увеличивается?

10.34. При помощи бисферических координат вычислить емкость сферы с внешним радиусом b, помещенной внутрь сферы с внутренним радиусом c, причем центр внутренней сферы находится на расстоянии d от центра внешней ($c > b+d$). Каково распределение заряда на внутренней сфере? Сравнить эти результаты с результатами, приведенными на стр. 255,256.

10.35. Расстояние от центра жесткой сферы радиуса ρ до некоторой бесконечной плоскости равно $b > \rho$. Несжимаемая жидкость обтекает сферу и плоскость, имея на бесконечности скорость v_0, направленную параллельно плоскости (см. стр. 280). Вычислить составляющие η и φ скорости жидкости на поверхности сферы $\mu = \mu_0$. Получить приближенное выражение для результирующей силы, действующей на сферу.

10.36. Потенциал поверхности четвертого порядка, заданной параметрическими уравнениями

$$z = \frac{a\,\mathrm{sh}\,\mu}{\mathrm{ch}\,\mu - \cos\eta_0}, \quad x = \frac{a\sin\mu_0\cos\varphi}{\mathrm{ch}\,\mu - \cos\eta_0}, \quad y = \frac{a\sin\eta_0\sin\varphi}{\mathrm{ch}\,\mu - \cos\eta_0},$$

где $-\infty < \mu < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, η_0 — фиксированное число, превосходит на величину V_0 потенциал на бесконечности. Показать, что вне этой поверхности потенциал в бисферических координатах можно записать в виде

$$\psi = \frac{V_0}{2\pi}\sqrt{\mathrm{ch}\,\mu - \cos\eta}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\mu}\frac{P_{ik-1/2}(\cos\eta)}{P_{ik-1/2}(\cos\eta_0)}\,dk\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ik\lambda}\,d\lambda}{\sqrt{\mathrm{ch}\,\mu - \cos\eta_0}},$$

где

$$P_{i_{k-1/2}}(\cos\eta) = F\left(\frac{1}{2} - ik,\ \frac{1}{2} + ik\ \middle|\ 1\ \middle|\ \sin^2\frac{1}{2}\eta\right).$$

10.37. Показать, что в тороидальных координатах [см. (10.3.75)] z разлагается в ряд

$$z = \frac{\sqrt{8}}{\pi}a\sqrt{\mathrm{ch}\,\mu - \cos\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\eta Q_{n-\frac{1}{2}}(\mathrm{ch}\,\mu)\sin(n\eta).$$

При помощи этого ряда найти выражение для потенциала скоростей потока несжимаемой жидкости, обтекающего тор $\mu=\mu_0$, если известно, что на бесконечности вектор скорости имеет величину v_0 и направлен вдоль оси этого тора.

10.38. Проводящий эллипсоид с осями $\lambda_0, \sqrt{\lambda_0^2-b^2}, \sqrt{\lambda_0^2-c^2}$ поддерживается при нулевом потенциале. Эллипсоид помещен в первоначально однородное поле напряженности E, причем самая длинная из его осей параллельна вектору напряженности. Показать, что потенциал вне эллипсоида равен

$$\psi=-Ez+E\frac{\lambda\mu\nu}{bc}\,\frac{D(b/c, \arcsin c/\lambda)}{D(b/c, \arcsin c/\lambda_0)},$$

где λ, μ, ν — эллипсоидальные координаты (см. стр. 289) и

$$D(k, \psi)=\int\limits_0^{\psi}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Найти заряд, индуцированный на эллипсоиде. Найти потенциал скоростей для соответствующей гидродинамической задачи.

Тригонометрические и гиперболические функции

Тригонометрические функции (см. Приложение, табл. I — V).

$$\cos z=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4-\ \ldots\ =\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\operatorname{ch}(iz),$$

$$\sin z=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\ \ldots\ =\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=-i\operatorname{sh}(iz),$$

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1,\quad \sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y,$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\cos(x+y)+\frac{1}{2}\cos(x-y),$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\sin(x+y)+\frac{1}{2}\sin(x-y),$$

$$\sin x\sin y=-\frac{1}{2}\cos(x+y)+\frac{1}{2}\cos(x-y),$$

$$\frac{d}{dz}\cos z=-\sin z,\quad \frac{d}{dz}\sin z=\cos z,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{izt}\,dt\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(u)\,e^{-itu}\,du=2\pi f(z)\text{—интеграл Фурье.}$$

Для $m=2, 4, 6, \ldots$

$$\cos^m z=\frac{1}{2^{m-1}}\left[\cos mz+m\cos(m-2)z+\frac{m(m-1)}{2!}\cos(m-4)z+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{m(m-1)\ldots\left(\frac{1}{2}m+1\right)}{2\left(\frac{1}{2}m\right)}\right],$$