Так как мы рассчитываем найти асимптотическое выражение для F, то мы будем интегрировать по u в комплексной плоскости и выберем контур интегрирования так, чтобы вблизи $u=\pi$ показатель экспоненты имел постоянную фазу и достигал своего максимума при $u=\pi$. Если это будет сделано, то точное выражение пределов интегрирования по u и v не будет иметь значения, за исключением случая, когда $a\mathbf{n}_s$ очень близко к теневой линии, т. е. когда $\vartheta \to 0$. Следовательно,

$$F \simeq -2\pi \int_{\pi}^{i\infty} e^{2ika\sin(\vartheta/2)\cos u} \sin u\, du =$$

$$= 2\pi i e^{-2ika\sin(\vartheta/2)} \int_0^\infty e^{-2ka\sin(\vartheta/2)x}\, dx = \frac{\pi i e^{-2ika\sin(\vartheta/2)}}{ka\sin(\vartheta/2)},$$

так что первый интеграл в (11.4.70) приближенно равен

$$\frac{aC}{2r}\exp\left\{ik\left[r-2a\sin\left(\frac{1}{2}\vartheta\right)\right]\right\}$$

и фаза отраженной волны отстает на величину $2ak\sin(\vartheta/2)$, как того и требует «геометрическая оптика».

В принятом приближении для значений ψ_s на сфере асимптотическое выражение для ψ_s имеет вид

$$\psi_s \simeq Cf(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{r}, \qquad \frac{r}{a}\to\infty, \tag{11.4.72}$$

где

$$f(\vartheta) \simeq \frac{1}{2}ia\left\{ie^{-2ika\sin(\vartheta/2)} + ka\left[\frac{1+\cos\vartheta}{ka\sin\vartheta}J_1(ka\sin\vartheta)\right]\right\}$$

при $ka\to\infty$. Амплитуда отраженной волны в этом приближении не зависит от ϑ. Тенеобразующая волна имеет острый пик в направлении $\vartheta=0$; в других направлениях она пренебрежимо мала.

Выражение для отраженной волны непригодно при $\vartheta\to 0$ и поэтому формулу (11.4.64) применять нельзя. Чтобы найти Q, мы должны проинтегрировать $|f|^2$ по всем направлениям. Но поскольку отраженная часть f не зависит от ϑ, мы можем получить соответствующую часть эффективного поперечного сечения, умножая квадрат абсолютной величины этой части на 4π. Таким образом, для отраженной мощности при единичной интенсивности падающей волны мы получаем значение πa^2. Интегрируя $|f|^2$ для тенеобразующей части, мы находим, что соответствующее эффективное поперечное сечение также равно πa^2. Следовательно, полное эффективное поперечное сечение *рассеяния очень коротких волн* равно $2\pi a^2$, т. е. удвоенному геометрическому сечению сферы, как это уже было установлено на стр. 357 и 450. Половина этого сечения приходится на отраженную часть волны, а другая половина—на тенеобразующую часть.

Задачи к главе 11

11.1. Струна переменной линейной плотности $\rho=\rho_0[1+b(x)]$ *г/см* натянута между неподвижными закреплениями с натяжением T (координаты закреплений $x=0$ и $x=l$). Применяя метод возмущений гл. 9, найти приближения первого порядка для формы струны и частот собственных колебаний.

11.2. Полубесконечная однородная струна плотности ρ с натяжением T простирается от $x=0$ до $x=\infty$. Сила трения $R\,(\partial y/\partial t)$ *дин/см* оказывает сопротивление поперечным колебаниям струны. Показать, что если в точке $x=0$ приложена поперечная сила $F_0 e^{-i\omega t}$, то смещение имеет вид

$$y=\frac{F_0}{\rho c \alpha}\,e^{-(\alpha x/c)-i\omega t},\qquad \alpha^2=-\omega^2-i\omega\frac{R}{\rho}.$$

Показать, пользуясь таблицей преобразований Лапласа (приведенной в конце этой главы), что если поперечная сила, приложенная в точке $x=0$, имеет характер единичного импульса при $t=0$, то смещение струны равно

$$y=u\left(t-\frac{x}{c}\right)e^{-Rt/2\rho}J_0\left[\frac{iR}{2\rho}\sqrt{t^2-\left(\frac{x}{c}\right)^2}\right].$$

11.3. Полость, имеющая форму прямоугольного параллелепипеда, внутренними гранями которого служат плоскости $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$, $z=0$, $z=l$, является акустическим резонатором и наполнена воздухом при нормальном давлении и температуре. Полоса стенки $z=0$, заключенная между $x=x_0-\Delta/2$ и $x=x_0+\Delta/2$, колеблется со скоростью $v_z=Ue^{-i\omega t}$; остальная часть границы неподвижна. Показать, что средний акустический импеданс на поверхности возбуждающей полосы, т. е. отношение среднего давления к скорости полосы, равен

$$Z_{\text{ср.}}=i\rho c\left\{\frac{\Delta}{\pi\,\mathrm{tg}\,(kl)}-\frac{8a^2k}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi n\Delta}{2a}\right)\cos^2\left(\frac{\pi n x_0}{a}\right)}{n^3\tau_n\,\mathrm{th}\left(\frac{\pi n l\tau_n}{a}\right)}\right\},$$

где $k=\omega/c$, $\tau_n^2=1-\left(\frac{ak}{\pi n}\right)^2$, причем предполагается, что $\omega<\pi c/a$. Найти предельное значение Z при $\omega\to 0$. Показать, что импеданс ведет себя так, как если бы полоса была упругой и была нагружена массой, и найти предельные значения эффективной массы и упругости полосы.

11.4. Прямоугольная полубесконечная труба с неподвижными стенками $x=0$, $x=a$, $y=0$, $y=b$ простирается от $z=0$ до $z=-\infty$. Акустический импеданс конца $z=0$, $Z(x)=[i\omega\rho\psi/(\partial\psi/\partial z)]_{z=0}$, зависит только от x [см. рассуждения, предшествующие (11.2.14)]. Показать, что интегральное уравнение для потенциала скоростей внутри трубы, вдоль которой от $-\infty$ распространяется плоская чисто гармоническая волна, имеет вид

$$\psi(x,z)=2A\cos(kz)+\frac{ik\rho c}{4\pi}\int_0^a\frac{\psi(x_0,0)}{Z(x_0)}G_k(x,z\,|\,x_0,0)\,dx_0,$$

где $\omega=kc$, A — амплитуда падающей волны. Функция Грина имеет вид

$$G_k=\frac{4\pi i}{ak}e^{-ikz}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\pi}{a\varkappa_n}\cos\left(\frac{\pi n x_0}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right)e^{\varkappa_n z},\qquad z\leqslant 0,$$

где $\varkappa_n^2=(\pi n/a)^2-k^2$ (если предполагается, что $\omega<\pi c/a$). Показать, что в первом приближении по малой величине $\eta(\xi)=\rho c/Z(a\xi)$ волновая функция при $z=0$ имеет вид

$$\psi(x,0)\simeq 2A\left\{1-\int_0^1\eta(\xi)\,d\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2ik}{\varkappa_n}\cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\int_0^1\eta(\xi)\cos(\pi n\xi)\,d\xi\right\}.$$

Показать, что отраженная волна при $z\ll 0$ имеет форму $A(1-T)e^{-ikz}$, где T можно назвать коэффициентом поглощения (если T действителен, то он равен доле первичной энергии, поглощенной преградой при $z=0$). Подсчитать T с точностью до малых второго порядка по η. Действителен ли T при действительном η? Если нет, то почему?

11.5. Установить вариационный принцип для задачи 11.4. Показать, что если функция сравнения $\varphi(\xi)$ выбрана так, что величина

$$[T]=\frac{2\left[\int\limits_0^1 \eta(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi\right]^2}{\int\limits_0^1 \eta(\xi)\varphi^2(\xi)\,d\xi-\frac{ika}{4\pi}\int\limits_0^1 d\lambda\int\limits_0^1 \eta(\lambda)\varphi(\lambda)G_k(a\lambda,0\,|\,a\xi,0)\,\eta(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi}$$

стационарна, то φ пропорционально $\psi(x, 0)$ (подсчитать коэффициент пропорциональности) и стационарное значение $[T]$ равно коэффициенту поглощения из предыдущей задачи.

11.6. Импеданс преграды при $z=0$ из задач 11.4 и 11.5 равен $10\rho c$ при $0\leqslant x\leqslant a/2$ и ∞ при $a/2\leqslant x\leqslant a$. Вычислить приближение первого порядка для $\psi(x, 0)$ и начертить его график при $k=\pi\sqrt{2a}$. Используя формулы задачи 11.4, вычислить T при том же значении k с точностью до величин второго порядка. Вычислить T по формуле задачи 11.5, приняв $\varphi=1$, и сравнить полученные результаты.

11.7. Круглая мембрана радиуса a с поверхностной плотностью σ и натяжением T неподвижно закреплена вдоль своего края. Мембрана герметически закрывает одну сторону сосуда, наполненного воздухом (пусть, например, это диафрагма литавры). Скорость звука в воздухе много больше, чем скорость волн на мембране, и, значит, можно считать, что изменение давления воздуха в сосуде пропорционально среднему смещению мембраны от состояния равновесия, $p=-\rho c_a^2\pi a^2\bar{\eta}/V$, где ρ — плотность воздуха, c_a — скорость звука в воздухе, V — объем сосуда и $\bar{\eta}$ — среднее смещение мембраны. Доказать, что уравнение колебаний мембраны имеет вид

$$\nabla^2\eta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=\frac{\rho c_a^2}{VT}\int\limits_0^a\int\limits_0^{2\pi}\eta r\,dr\,d\varphi,$$

где $c^2=T/\sigma$. Доказать, что собственные частоты свободных колебаний системы мембрана — сосуд являются корнями уравнения

$$\left(\frac{\omega a}{c}\right)^2 J_0\left(\frac{\omega a}{c}\right)+\frac{\pi\rho c_a^2 a^4}{\sigma c^2 V}J_2\left(\frac{\omega a}{c}\right)=0,$$

если колебания не зависят от φ, и уравнения $J_m(\omega a/c)=0$, если колебания зависят от угла.

11.8. Круглая мембрана радиуса a с плотностью σ и натяжением T, закрепленная по краю, приведена в движение импульсом давления $\delta(t)$, равномерно распределенным по одной стороне. Доказать, что, пренебрегая воздействием на мембрану воздуха, можно записать последующие колебания мембраны в виде

$$\psi=\frac{2a}{\sigma c}\sum_m\frac{J_0(\pi\beta_m r/a)}{(\pi\beta_m)^2J_1(\pi\beta_m)}\sin\left(\frac{\pi\beta_m ct}{a}\right),$$

где β_m — m-й корень уравнения $J_0(\pi\beta_m)=0$.

11.9. Как скажется на собственных частотах колебаний круглой мембраны небольшой дополнительный груз, прикрепленный к ее центру?

11.10. Цилиндрическая волна $Ae^{-i\omega t}H_0^{(1)}(kR)$ $(kc=\omega)$ испускается линией $\varphi'=0$, $r'=b$, где $R^2=r^2+b^2-2rb\cos\varphi$. Эта волна рассеивается цилиндром радиуса a $(a<b)$, ось которого проходит через точку $r=0$. Показать, что если краевое условие требует, чтобы потенциал скоростей равнялся нулю при $r=a$, то на больших расстояниях волна описывается формулой

$$\psi \simeq A\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{ik(r-ct)}\sum_{m=0}^{\infty}(2-\delta_{0m})\cos(m\varphi)\,i^{-m}e^{-i\pi/4}J_m(kb)\frac{H_m^{(1)}(kb)}{H_m^{(1)}(ka)},$$

где $k=\omega/c$. Какова формула для углового распределения интенсивности?

11.11. Цилиндр радиуса a колеблется так, что радиальная скорость на поверхности равна $U\cos\varphi e^{-i\omega t}$. Вычислить потенциал скоростей окружающего цилиндр воздуха, асимптотическое выражение для интенсивности и полную излучаемую единицей длины цилиндра мощность. Показать, что полная сила реакции, действующая на цилиндр вследствие его движения в воздухе, выражается формулой

$$F=-ia\pi\rho cU\frac{C_1(ka)}{C_1'(ka)}e^{i(\delta_1-\delta_1')-i\omega t}\simeq\begin{cases}-i\omega\,\pi a^2\rho\,Ue^{-i\omega t}, & ka\ll 1,\\ \pi a^2\rho cUe^{-i\omega t}, & ka\gg 1.\end{cases}$$

11.12. Получить формулы, подобные (11.3.76), для рассеяния и поглощения звука длинным цилиндром радиуса a, покрытым таким звукопоглощающим материалом, что отношение давления к радиальной скорости при $r=a$ равно $-2\rho c$. Начертить график эффективных поперечных сечений рассеяния и поглощения как функций от ka в интервале $0\leqslant ka\leqslant 2$. Каково угловое распределение рассеянной волны при $ka=2$?

11.13. Вычислить постоянные разделения be_2 и be_4 и ряды Фурье для $Se_2(h, \cos\vartheta)$ и $Se_4(h, \cos\vartheta)$ с точностью до малых четвертого порядка по h при помощи метода стр. 386, а также при помощи соотношений (11.2.87), (11.2.88) и сравнить результаты.

11.14. Гибкая мембрана с поверхностной плотностью σ и натяжением T жестко закреплена вдоль эллиптической границы с большой осью $(a/2)\operatorname{ch}\mu_0$ и малой осью $(a/2)\operatorname{sh}\mu_0$. На одну сторону мембраны действует периодически меняющееся избыточное давление $P_0e^{-i\omega t}$, амплитуда которого одинакова во всех точках мембраны. Показать, что смещение мембраны ψ в точке (μ, ϑ) (эллиптические координаты) описывается формулой

$$\psi=\frac{P_0e^{-i\omega t}}{\sigma\omega^2}\left\{1-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2\pi B_0^e(h,2m)}{M_{2m}^e(h)\,Je_{2m}(h,\operatorname{ch}\mu_0)}Se_{2m}(h,\cos\vartheta)\,Je_{2m}(h,\operatorname{ch}\mu_0)\right\},$$

$$0\leqslant\mu\leqslant\mu_0,$$

где $h=a\omega/2c$ и $c^2=T/\sigma$. Используя (11.2.85) и (11.2.88), вычислить амплитуду ψ как функцию от μ для $\vartheta=0$, $\vartheta=\pi/2$ при $h=1$, 2 и начертить график. (Использовать таблицу XVI Приложения.)

11.15. Выразить, как указано на стр. 391, функцию $Se_1(h, \cos\theta)$ для больших h через производные по θ от тета-функций ϑ_2 или ϑ_4. Исходя из этого результата, вычислить частоту собственного колебания эллиптической мембраны с большим эксцентриситетом, соответствующего Se_1.

11.16. Поперечное сечение пустотелой трубы имеет форму эллипса с большой осью A и малой осью B. Изучить распространение вдоль трубы акустических волн типов, соответствующих функциям Se_0, So_1 и Se_1. Вычислить критические частоты для этих типов волн (см. стр. 413) как функции от B в интервале $0 < B < A$, считая A постоянной, и начертить в подходящем масштабе график.

11.17. Электромагнитная волна с длиной волны $2\pi/k$ падает на длинную проводящую полосу ширины $a = 4/k$. Направление распространения волны перпендикулярно оси полосы и образует угол в $30°$ с ее плоскостью. Вычислить угловое распределение рассеянной волны как функцию угла рассеяния для каждого направления поляризации волны и начертить график.

11.18. Вычислить активную и реактивную составляющие акустического импеданса излучения колеблющейся полосы ширины a [см. (11.2.97)] как функцию от $h = ak/2$ в интервале $0 \leqslant h \leqslant 3$ и начертить график. Значения $B_1^o(h, m)$ таковы:

$h^2=$	1	2	3	4	5	7	9
$m=1$	1,0981	1,2051	1,3215	1,4480	1,5850	1,8929	2,2504
$m=3$	0,0103	0,0202	0,0299	0,0394	0,0486	0,0668	0,0855

11.19. Вычислить активную и реактивную составляющие электрической проводимости полосы ширины a, проводящей переменный ток [см. (11.2.99)], как функции от $h = ak/2$ в интервале $0 \leqslant h \leqslant 3$ и начертить график. Значения $B_0^e(h, m)$ таковы:

$h^2=$	1	2	3	4	5	7	9
$m=0$	1,1393	1,3090	1,5117	1,7488	2,0219	2,6818	3,5061
$m=2$	0,0596	0,1128	1,1594	0,1998	0,2349	0,2938	0,3428
$m=4$	0,0003	0,0013	0,0029	0,0050	0,0078	0,0150	0,0243

11.20. Звуковая волна с длиной волны $2\pi/k$ и амплитудой давления P_0 падает на длинную жесткую полосу ширины a. Направление распространения волны перпендикулярно оси полосы и образует угол u с ее плоскостью. Показать, что полная сила, с которой звуковая волна воздействует на единицу длины полосы, описывается выражением

$$F = iP_0\pi a\, 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \frac{B_1^o(h, 2m+1)\, e^{i\delta^o_{2m+1}}}{M^o_{2m+1} C^o_{2m+1}} So_{2m+1}(h, \cos u).$$

Найти выражение для F, пригодное для малых значений $h = ak/2$ с точностью до малых второго порядка по h. Вычислить амплитуду и фазу F/aP для $u = 90°$ при $0 \leqslant h \leqslant 3$. Использовать таблицы в конце книги и значения, приведенные в задаче 11.18.

11.21. Обе стороны бесконечной мембраны с поверхностной плотностью σ и натяжением T соприкасаются со средой бесконечной протяженности, характеризуемой плотностью ρ и скоростью звука c_0. Показать, что уравнение чисто гармонических поперечных колебаний мембраны частоты $\omega/2\pi$ имеет вид

$$\nabla^2\eta(x, y)+K_m^2\eta(x, y)+\frac{K_m^2\rho}{\pi\sigma}\int_0^{2\pi} du \int_0^{\infty}\eta(x_0, y_0)\,e^{iK_0R}dR=\frac{f(x, y)}{T},$$

где $K_0^2=(\omega/c_0)^2$, $K_m^2=(\omega/c_m)^2=\sigma\omega^2/T$, $\eta(x, y)$ — поперечное смещение точки (x, y) мембраны, $R^2=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ и $f(x, y)\,e^{-i\omega t}$ — плотность распределения поперечной вынуждающей силы. Показать, что вдоль мембраны могут распространяться свободные плоские волны вида $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}$, причем величина k волнового вектора $\mathbf{k}$ удовлетворяет уравнению

$$k^2-K_m^2\left[1+\frac{2(\rho/\sigma)}{\sqrt{k^2-K_0^2}}\right]=0.$$

Выяснить физическое значение двух типов волн, одного с k, близким к K_0, и второго с k, близким к K_m (если ρ/σ мало). Показать, что при $c_0<c_m$ волны последнего типа затухают, но при $c_0>c_m$ не затухают волны никакого типа. Каково физическое объяснение этого явления?

11.22. Мембрана задачи 11.21 приводится в движение силой $\delta(x-x_1)\,e^{-i\omega t}$, приложенной вдоль линии $x=x_1$. Показать, что смещения точек мембраны описываются функцией

$$\eta=\frac{-1}{4\pi^2\sigma c_m^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_1)}\left[k^2-K_m^2-\frac{2K_m^2\rho/\sigma}{\sqrt{k^2-K_0^2}}\right]^{-1}dk.$$

Найти приближенные формулы для η при $c_0\gg c_m$ и при $c_0\ll c_m$, предполагая в обоих случаях, что $\rho/\sigma\ll 1$.

11.23. В бесконечной трубе с круглым поперечным сечением радиуса a и осью z при $z=0$ вставлена жесткая диафрагма с круглым отверстием радиуса b. Показать, что если на диафрагму падает плоская волна Ae^{ikz}, распространяющаяся из $-\infty$, то потенциал скоростей звуковых волн в трубе имеет вид

$$\psi(r, \varphi, z)=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi_0\int_0^b u_0(r_0)\,G_k^+(r, \varphi, z\,|\,r_0, \varphi_0, 0)\,r_0\,dr_0, & z>0,\\[2ex] 2A\cos(kz)-\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} d\varphi_0\int_0^b u_0(r_0)\,G_k^-(r, \varphi, z\,|\,r_0, \varphi_0, 0)\,r_0\,dr_0, & z<0.\end{cases}$$

Здесь u_0 — амплитуда скорости в круглом отверстии, G^+ — функция Грина для области $z>0$, нормальная производная которой при $r=a$ и $z=0$ равна нулю, а G^- — соответствующая функция Грина для области $z<0$. Найти разложение функций G по функциям Бесселя и показать, что интегральное уравнение для u_0 имеет вид

$$2A=\int_0^b u_0(r_0)\,G(r\,|\,r_0)\,r_0\,dr_0,$$

причем при $k<\pi\alpha_{01}/a$

$$G(r\,|\,r_0)=\frac{4i}{a^2k}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4J_0(\pi\alpha_{0n}r/a)\,J_0(\pi\alpha_{0n}r_0/a)}{a^2J_0^2(\pi\alpha_{0n})\sqrt{(\pi\alpha_{0n}/a)^2-k^2}}.$$

Показать, что доля падающей волны, проходящая через отверстие в сторону $+\infty$, равна $|Q/\pi a^2 k|^2$, причем $\int\int u_0{}' d\varphi_0\, r_0 dr_0 = AQ$. Показать, что, принимая $u_0 = AQ/2\pi b^2 \sqrt{1-(r_0/b)^2}$, полагая $r=0$ в G и используя соотношение

$$\int\limits_0^{\pi/2} J_0(z\sin w)\sin w\, dw = j_0(z),$$

можно получить приближенное решение

$$Q = \pi a^2 k\left[i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k j_0(\pi\alpha_{0n} b/a)}{2J_0^2(\pi\alpha_{0n})\sqrt{(\pi\alpha_{0n}/a)^2 - k^2}}\right]^{-1}.$$

11.24. Показать, что для решения интегрального уравнения задачи 11.23 может быть использован вариационный принцип

$$[Q] = \frac{\left[4\pi\int\limits_0^b \varphi(r_0)\, r_0 dr_0\right]^2}{\int\limits_0^b r_1 dr_1 \int\limits_0^b \varphi(r_1)\, G(r_1\,|\,r_0)\,\varphi(r_0) r_0 dr_0}.$$

Взяв функцию сравнения в виде $\varphi = 1/\sqrt{1-(r/b)^2}$, подсчитать Q и сравнить с результатом задачи 11.23.

11.25. Прямоугольная труба бесконечной протяженности вдоль оси z имеет в направлении оси y постоянную ширину b, а ее ширина в направлении оси x при $z=0$ увеличивается скачком от a_- до a_+ (другими словами, труба ограничена поверхностями $y = \pm b/2$, $x = \pm a_-/2$ при $z<0$, $x = \pm a_+/2$ при $z>0$, $a_+ > a_-$, и частью плоскости $z=0$ между $|x| = a_-/2$ и $|x| = a_+/2$). Предполагая, что скорость в плоскости $z=0$ ($|x| < a_-/2$, $|y| < b/2$) приближенно равна $V_0[1-(2x/a_-)^2]^{-1/3}$, рассчитать отраженную и проходящую волны, возникающие, когда вдоль трубы от $z=-\infty$ распространяется плоская волна.

11.26. Методом задачи 11.22 решить задачу об акустическом излучении из круглой трубы, вделанной в плоскую стену, уже рассмотренную в формуле (11.3.34) и следующих. Пусть труба имеет радиус a, ее ось совпадает с отрицательной полуосью $z<0$, фланец $z=0$, $r>a$ жесткий и область $z>0$ совершенно свободна. Волна с амплитудой A распространяется из $z=-\infty$ и частично излучается из открытого конца трубы, а частично отражается обратно к $z=-\infty$. Показать, что для области $z>0$ соответствующая функция Грина имеет вид

$$G_k^+ = 2i\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos[m(\varphi-\varphi_0)]\int\limits_0^{\infty} J_m(kr) J_m(kr_0)\frac{\lambda d\lambda}{K}\begin{cases}\cos(Kz)\, e^{ikz_0}, & z<z_0,\\ \cos(Kz_0)\, e^{ikz}, & z>z_0,\end{cases}$$

где $K = \sqrt{k^2-\lambda^2} = i\sqrt{\lambda^2-k^2}$. Предполагая, что z-составляющая скорости воздуха в отверстии $z=0$ равна $v_z = U[1-(r/a)^2]^{-1/3}$, найти U, приравнивая значения ψ при $r=0$, вычисленные с помощью функций Грина для $z>0$ и для $z<0$ при $z\to 0$. Использовать формулу

$$\int\limits_0^{\pi/2} J_0(z\sin w)\sin w\cos^{1/3} w\, dw = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{(2z^2)^{\frac{1}{3}}} J_{2/3}(z) \simeq \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}, \quad z\to 0,$$

чтобы показать, что U при $k < \pi\alpha_{01}/a$ приближенно равно

$$U \simeq \frac{2Ak\Gamma(5/3)}{\Gamma(2/3)}\left\{i + 2^{\frac{1}{3}} ia^2k\Gamma(5/3)\int_0^\infty J_{2/3}(\lambda a)\frac{\lambda d\lambda}{(2\lambda a)^{2/3}K} + \right.$$

$$\left. + 2^{\frac{1}{3}}k\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_{2/3}(\pi\alpha_{0n})}{(2\pi\alpha_{0n})^{2/3}K_nJ_0^2(\pi\alpha_{0n})}\right\}^{-1},$$

где $K_n^2 = (\pi\alpha_{0n}/a)^2 - k^2$. Выразить через U/A полную мощность, излучаемую из открытого конца трубы при падающей волне единичной интенсивности.

11.27. Сфера радиуса a и массы M совершает колебания внутри полой сферы с внутренним радиусом $b = 2a$. В положении равновесия центры сфер совпадают. Вычислить механический импеданс воздуха, находящегося между сферами, для колеблющейся сферы. Каково будет движение внутренней сферы, если ей при $t = 0$ сообщен начальный импульс?

11.28. Акустический импеданс поверхности сферы радиуса a равен $Z = 2\rho c$ (активный и не зависящий от ω). Вычислить эффективные поперечные сечения рассеяния и поглощения [см. (11.3.76)] сферы как функции ka. Вычислить отношение полной силы, действующей на сферу, к давлению падающей волны как функцию от ka и начертить график.

11.29. Установить вариационный принцип для резонатора Гельмгольца, рассмотренного в формуле (11.3.78) и следующих.

11.30. Сравнить с точностью до величин третьего порядка малости по $h = ka/2$ результаты вычислений по формулам (11.2.103) и (11.4.68).

11.31. Диск радиуса a, так расположенный в плоскости x, y, что его центр совпадает с началом координат, рассеивает плоскую звуковую волну. Направление распространения волны лежит в плоскости x, z и составляет угол ϑ_i с осью z. Рассеянная волна измеряется на некотором расстоянии от диска в точке, направление на которую образует угол ϑ_s с осью z, причем плоскость, проходящая через это направление и ось z, образует угол φ_s с плоскостью x, y. Применяя формулу (11.4.61), в которой

$$g_k = i\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\cos[m(\varphi-\varphi_0)]\int_0^\infty J_m(\lambda r)\,J_m(\lambda r_0)\frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{k^2-\lambda^2}},$$

подсчитать рассеяние. В качестве функций сравнения использовать $\varphi^+ - \varphi^- = 1 + \alpha r\sin\vartheta_i\cos\varphi_i$, $\widetilde{\varphi}^+ - \widetilde{\varphi}^- = 1 + \alpha r\sin\vartheta_s\cos(\varphi - \varphi_s)$. Варьируя параметр α, получить наилучшие выражения для φ и $\widetilde{\varphi}$. Показать, что для получения исправленной формы функции ψ при помощи интеграла (11.4.57) лучше всего взять

$$\psi_1(\mathbf{r}) = -4\pi iC\varphi(\mathbf{r})\frac{\oint(\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{n})\widetilde{\varphi}(\mathbf{r}^s)e^{i\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}^s}dA}{\oint\oint\widetilde{\varphi}(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}_0)\left[\frac{\partial^2}{\partial n\,\partial n_0}g_k(\mathbf{r}^s\,|\,\mathbf{r}_0^s)\right]dA\,dA_0}.$$

11.32. Падающая плоская волна $Ce^{i\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}}$ рассеивается телом с показателем преломления n по отношению к окружающему пространству. Доказать, что вариационный принцип для функции углового распределения $f(\mathbf{k}_i\,|\,\mathbf{k}_s)$ имеет вид

$$[f]=\frac{(n^2-1)k^2\int\tilde{\varphi}(\mathbf{r}_0)\,e^{i\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}_0}dv_0\int\varphi(\mathbf{r})\,e^{-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}}dv}{\int\tilde{\varphi}(\mathbf{r})\,\varphi(\mathbf{r})\,dv-(n^2-1)k^2\int dv\int\tilde{\varphi}(\mathbf{r})\,g_k(\mathbf{r}\,|\,\mathbf{r}_0)\,\varphi(\mathbf{r}_0)\,dv_0},$$

где все интегралы берутся по объему рассеивающего тела и $g_k=e^{ikR}/R$ $(R=|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|)$. Вычислить функцию f, когда рассеивающее тело имеет форму шара радиуса a и когда в качестве функций сравнения взяты $\varphi=e^{i\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}}$ и $\tilde{\varphi}=e^{-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}}$. Использовать разложения g_k и $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ по сферическим гармоникам.

Цилиндрические функции Бесселя

[См. формулу (5.3.63) и таблицу из гл. 10.]

$$J_m(z)\underset{z\to 0}{\simeq}\frac{1}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^m;\quad \underset{z\to\infty}{\simeq}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left[z-\frac{1}{2}\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)\right].$$

$$\left.\begin{aligned}&N_0(z)\underset{z\to 0}{\simeq}\frac{2}{\pi}[\ln z-0{,}11593];\\&N_m(z)\underset{z\to 0}{\simeq}-\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^m\quad(m>0);\end{aligned}\right\}\underset{z\to\infty}{\simeq}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left[z-\frac{1}{2}\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)\right].$$

$$H_m(z)=J_m(z)+iN_m(z)\underset{z\to\infty}{\simeq}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,e^{iz-(i\pi/2)(m+1/2)}.$$

Амплитуды и фазовые углы ($m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) (см. табл. XIV Приложения).

$$J_m(z)=C_m(z)\sin[\delta_m(z)],\qquad \frac{dJ_m(z)}{dz}=-C'_m(z)\sin[\delta'_m(z)].$$

$$N_m(z)=-C_m(z)\cos[\delta_m(z)],\qquad \frac{dN_m(z)}{dz}=C'_m(z)\cos[\delta'_m(z)].$$

$$H_m(z)=-iC_m(z)\,e^{i\delta_m(z)},\qquad \frac{dH_m(z)}{dz}=iC'_m(z)\,e^{i\delta'_m(z)}.$$

$$\operatorname{tg}[\alpha_m(z)]=\frac{-z}{J_m(z)}\left[\frac{d}{dz}J_m(z)\right],\qquad \operatorname{tg}[\beta_m(z)]=\frac{-z}{N_m(z)}\left[\frac{d}{dz}N_m(z)\right].$$

$$\operatorname{tg}[\delta'_m(z)]=\operatorname{tg}[\delta_m(z)]\operatorname{tg}[\alpha_m(z)]\operatorname{ctg}[\beta_m(z)].$$

$$\operatorname{tg}[\gamma_m(z)]=\operatorname{tg}\delta_m\frac{\cos\beta_m}{\cos\alpha_m}=\operatorname{tg}\delta'_m\frac{\sin\beta_m}{\sin\alpha_m}.$$

$$\Delta(J_m,N_m)=\frac{2}{\pi z}=C_m(z)\,C'_m(z)\sin[\delta_m(z)-\delta'_m(z)].$$

Асимптотические значения.

При $z\gg m$ и $z\gg 1$ $\quad C_m\simeq\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\simeq C'_m,\quad \delta_m\simeq z-\frac{1}{2}\pi\left(m-\frac{1}{2}\right),$

$$\delta'_m\simeq z-\frac{1}{2}\pi\left(m+\frac{1}{2}\right),\qquad \operatorname{tg}\alpha_m\simeq z\operatorname{tg}\delta'_m,\qquad \operatorname{tg}\beta_m\simeq z\operatorname{tg}\delta_m.$$

При $z\ll 2m+1$ имеем $\quad C_0\simeq\sqrt{1+\left(\frac{2}{\pi}\ln z\right)^2},\quad C'_0\simeq\frac{2}{\pi z},$

$$\alpha_0\simeq\frac{1}{2}z^2,\quad \delta'_0\simeq\frac{1}{4}\pi z^2,\quad \operatorname{tg}\beta_0\simeq\frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\delta_0\simeq-\left(\frac{1}{\ln z}\right),$$

$$C_m\simeq\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^m,\quad C'_m\simeq\frac{m!}{2\pi}\left(\frac{2}{z}\right)^{m+1}\quad(m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

$$\delta_m\simeq\frac{\pi m}{(m!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}\simeq-\delta'_m,\quad -\operatorname{tg}\alpha_m\simeq m\simeq\operatorname{tg}\beta_m.$$