Заключение. Мы заканчиваем параграф, посвященный волновой механике. Здесь не могли быть упомянуты важные вопросы, связанные со спином частиц или с принципом запрета Паули, а также и другой существенный материал. Эти вопросы рассматриваются во многих других книгах, специально посвященных квантовой теории; наша же книга имеет дело прежде всего с аналитическими приемами решения задач теории поля, а не с физическим истолкованием уравнений. Мы уже касались большинства приемов, используемых в квантовой механике: определения связанных и свободных состояний, применения теории возмущений, вариационных методов и применения интегральных уравнений в связи с приближением Борна. Были рассмотрены трудности, возникающие в проблеме нескольких частиц, в объеме достаточном для того, чтобы показать сложность этой проблемы; были указаны некоторые приемы, применяемые для преодоления этих трудностей. Дальнейшее рассмотрение этих вопросов завело бы нас слишком далеко от нашей основной задачи. Мы должны перейти к нашему последнему важному вопросу, к вычислению чисто векторных полей.

Задачи к главе 12

12.1. Проволока радиуса R помещена в среду, температура которой колеблется по закону $T = T_0 + \Delta T e^{-i\omega t}$. Сопротивление материала проволоки при температуре, близкой к T_0, равно $\rho = \rho_0 + \rho_1 (T - T_0)$. Вычислить сопротивление единицы длины проволоки как функцию времени. Вычислить сопротивление как функцию времени, если температура при $r = R$ равна $T_0 + \Delta T u(t)$.

12.2. Найти ряд, выражающий поток тепла, идущий внутрь параллелепипеда задачи 10.1, как функцию времени, если нагреватель включается при $t = 0$ и его температура равна $T_0 u(t)$.

12.3. Если ускоренный ион ударяется о металлическую поверхность, то он отдает свою кинетическую энергию eV_0 малой области поверхности металла. Температура металла в точке (x, y, z) по прошествии времени t после столкновения дается приближенно функцией Грина

$$T = \frac{A}{t^{3/2}} \exp\left(-\frac{a^2 (x^2+y^2+z^2)}{4t} \right) u(t)\, u(x),$$

где a — постоянная диффузии металла, $x = y = z = 0$ в точке удара иона, область $x \geqslant 0$ заполнена металлом, область $x \leqslant 0$ является свободным пространством, а A подобрана так, чтобы интеграл от дополнительной тепловой энергии $\rho C T$, распространенный по металлу, был равен eV_0. Скорость улетучивания металла с его поверхности $x = 0$ в зависимости от температуры на его поверхности T_s равна

$$J_e = B \exp\left(-\frac{E_0}{kT_s} \right),$$

где E_0 — средняя энергия, необходимая для выбивания атома металла с поверхности. Подсчитать полное количество металла, улетучившегося с поверхности (разбрызганного с нее), вследствие удара одного иона, выразив это количество как функцию от B, E_0, V_0 и тепловых свойств металла.

12.4. В жидком гелии II связь между потоком тепла $\mathbf{J}$ калорий в секунду на квадратный сантиметр и относительной температурой τ состоит не в том, что $\mathbf{J}$ пропорционален градиенту τ, а в том, что производная $\partial \mathbf{J}/\partial t$

пропорциональна градиенту τ

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = -\rho_2 C_2 c_2^2 \operatorname{grad} \tau,$$

где действительная температура равна $T_0 + \tau$, $\rho_2 C_2$ — удельная теплоемкость гелия на кубический сантиметр и c_2 — величина, имеющая размерность скорости. Показать, что температура подчиняется точному волновому уравнению, причем c_2 является скоростью волны (и называется скоростью второго звука или скоростью тепловых волн). Пластинка из проводящего материала с обычными тепловыми и электрическими свойствами толщины l погружена в ванну, наполненную жидким гелием II; ванна берется достаточно большой, так что можно предполагать, что она простирается безгранично. Показать, что граничные условия на обеих поверхностях пластинки (взять их при $x = \pm l/2$) сводятся к тому, чтобы соотношение между потоком тепла J внутрь гелия и относительной температурой τ имело вид $J = \rho_2 C_2 c_2 \tau$ для тех частей J и τ, которые изменяются с течением времени. Предположим, что электропроводность пластинки есть σ, ее плотность ρ удельная теплоемкость C и теплопроводность $\varkappa$ и что через каждую часть пластинки проходит электрический ток плотности $I \cos(\omega t/2)$. Показать, что распределение температуры в пластинке ($x < l/2$) и в гелии ($x > l/2$) определяется действительными частями следующих выражений:

$$T = \begin{cases} T_0 + \dfrac{I^2 R}{4\sigma\varkappa}\left(\dfrac{1}{4} l^2 - x^2\right) + \\ \quad + \dfrac{I^2 R}{2\sigma\gamma^2\varkappa^2} \dfrac{\cos(\gamma x) - \cos(\gamma l/2) + (\gamma\varkappa/\rho_2 C_2 c_2)\sin(\gamma l/2)}{\cos(\gamma l/2) - \gamma(\varkappa/\rho_2 C_2 c_2)\sin(\gamma l/2)} e^{-i\omega t}, & x < \dfrac{1}{2} l, \\ -\dfrac{I^2 R}{2\sigma\gamma^2\varkappa^2}\left[1 - \dfrac{\rho_2 C_2 c_2}{\gamma\varkappa}\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\gamma l}{2}\right)\right]^{-1} e^{i(\omega/c_2)(x - ct)}, & x > \dfrac{1}{2} l, \end{cases}$$

где $\gamma^2 = i\omega\rho C/\varkappa$, а R — термический эквивалент работы, выраженный в *кал/дж*.

12.5. Экран для защиты от нейтронов, расположенный между плоскостями $x = 0$ и $x = l$, состоит из материала, в котором средний свободный пробег нейтронов равен $\lambda_a (\ll l)$; доля, выражаемая числом $\varkappa$, всех столкновений в этом материале приводит к поглощению нейтронов. При $t = 0$ «ливень» нейтронов плотности $\delta(t)$ падает на поверхность $x = l$. Показать, что приближенные выражения плотности нейтронов внутри пластинки ($0 \leqslant x \leqslant l$, $0 < t$) имеют вид (воспользоваться приближенными граничными условиями $\rho = 0$ при $x = 0$; l)

$$\rho_\delta(x, t) = \frac{e^{-\chi t}}{2a\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [(2n+1)l - x] \exp\left\{\frac{-1}{4a^2 t}[x - (2n+1)l]^2\right\} =$$

$$= -\frac{2\pi a^2}{l^2} \sum_{m=l}^{\infty} (-1)^m m \sin\left(\frac{\pi m x}{l}\right) \exp\left\{-\left[\chi + \left(\frac{\pi m a}{l}\right)^2\right] t\right\},$$

где $a^2 = \lambda_a v_a/3$ и $\chi = \varkappa v_a/\lambda_a$. Вывести выражения для потока нейтронов внутрь пластинки при $x = l$ и из пластинки при $x = 0$; рассмотреть зависимость этих выражений от l/λ_a, $\varkappa$ и t. Каковы соответствующие выражения в случае, когда $\rho(l) = u(t)$?

12.6. Пучок интенсивности I электронов в секунду с начальной скоростью v_i вводится в полый цилиндрический сосуд, ограниченный поверхностями $z = 0$; $z = l$; $r = a$. Пучок вводится через малое отверстие в начале координат и направлен вдоль оси цилиндра. Средний свободный пробег электрона в газе внутри сосуда равен λ ($\ll l$), а доля кинетической энергии, теряемая при столкновении с атомом газа, равна η. Предположим что здесь нет неупругих столкновений и что все электроны, ударяющиеся о стенки сосуда, выбывают из распределения. Показать, что в этом случае стационарная плотность заряда электронов внутри сосуда равна

$$\rho=\frac{6eI\lambda^2}{l^2a^2v_i}\sum_{m,n}\frac{m}{J_1^2(\pi\beta_{0n})}\frac{J_0(\pi\beta_{0n}r/a)\sin(\pi mz/l)}{\left[1+\left(\frac{\pi m\lambda}{l}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\pi m\lambda}{l}\right)^2+\left(\frac{\pi\lambda\beta_{0n}}{a}\right)^2-\frac{3}{\eta}\right]},$$

если только $3/\eta$ меньше чем $(\pi\lambda/l)^2+(\pi\lambda\beta_{01}/a)^2$. [Числа β_{0n} являются корнями уравнения $J_0(\pi\beta)=0$.]

12.7. Рассчитать начальное поведение однородного сферического реактора, воспользовавшись формулой (12.1.31) и выбирая подходящие значения содержащихся там постоянных. Взять эффективный радиус сферы a равным десятикратному среднему свободному пробегу λ; предположить, что $\delta=1/10$ и $\varkappa_i=\varkappa_\rho=1/5$; пусть $\eta=1/3$ и $v_i/v_\rho=10$, и подобрать $\nu\zeta$ так, чтобы w_1^- для наинизшего члена было равно нулю. Построить график плотности нейтронов в точке $r=0$, рассматривая эту плотность как функцию от tv_ρ/λ, если при $t=0$ в начале координат находился единственный нейтрон. Построить также график потока нейтронов через поверхность во внешнее пространство, рассматривая этот поток как функцию от tv_ρ/λ.

12.8. Неограниченно простирающаяся среда состоит из атомов, которые рассеивают проникающие частицы равномерно во всех направлениях [т. е. в (12.2.2) $\alpha=1/4\pi$] с ничтожно малой потерей энергии при столкновениях. Найти с помощью преобразования Фурье функцию распределения для стационарного состояния $f(\mathbf{r},\mathbf{a}_v)$ [$\mathbf{a}_v$ — единичный вектор, имеющий направление скорости $\mathbf{v}$ частицы, и $\mathbf{r}$ — вектор положения в единицах расстояния, использованных в (12.2.2)], порожденного распределением источников частиц $s(\mathbf{r},\mathbf{a}_v)=(1/4\pi)\,s(\mathbf{r})$ (каждый элементарный источник испускает новые частицы одинаково во всех направлениях). Положить

$$F(\mathbf{k},\mathbf{a}_v)=(2\pi)^{-3/2}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}f(\mathbf{r},\mathbf{u}_v)\,dv \quad \text{и} \quad S(\mathbf{k})=(2\pi)^{-3/2}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}s(\mathbf{r})\,dv$$

и показать, что (12.2.2) принимает вид (для стационарного состояния)

$$(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_v+1)\,F(\mathbf{k},\mathbf{a}_v)=\frac{1}{4\pi}\left[S(\mathbf{k})+\varkappa\int F(\mathbf{k},\mathbf{a}_v')\,d\Omega'\right].$$

Использовать (6.3.44) для получения разложения функции F по сферическим гармоникам от $\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{a}_v$ ($\mathbf{a}_k$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{k}$, так что $\mathbf{k}=k\mathbf{a}_k$)

$$F(\mathbf{k},\mathbf{a}_v)=\frac{(i/4\pi)\,S(\mathbf{k})}{k-i\varkappa Q_0(i/k)}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,P_n(\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{a}_v)\,Q_n\left(\frac{i}{k}\right).$$

12.9. Составить функцию распределения в условиях задачи 12.8 в случае точечного источника частиц в начале координат, $S=(2\pi)^{-3/2}$. Вычислить обращение интеграла Фурье для f с помощью разложения показательной функции $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ под знаком интеграла в ряд по сферическим гармоникам от $\mathbf{a}_k\cdot\mathbf{a}_r$ и, воспользовавшись формулой $iQ_0(i/k)=\operatorname{arc\,tg}k$, получить

$$f(\mathbf{r},\mathbf{a}_v)=\frac{i}{16\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-i)^nP_n(\mathbf{a}_r\cdot\mathbf{a}_v)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Q_n(i/k)\,h_n(kr)}{k-\varkappa\operatorname{arc\,tg}k}\,k^2dk.$$

Показать, что это выражение может быть формально вычислено как контурный интеграл вокруг полюса $k = i\sigma$, где σ — положительный корень уравнения $\sigma = \operatorname{th}(\sigma/\varkappa)$, что дает

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{a}_v) = \frac{\sigma^2}{8\pi^3} \frac{1-\sigma^2}{1-\varkappa-\sigma^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n P_n(\mathbf{a}_r \cdot \mathbf{a}_v) Q_n\left(\frac{1}{\sigma}\right) h_n(i\sigma r).$$

Исследовать сходимость этого ряда для малых $\varkappa$ и для малых $1-\varkappa$.

12.10. Выразить функцию стационарного распределения как функцию от ξ и μ [см. (12.2.2)], если источником является постоянный поток плотности I_0, направленный вдоль оси ξ из начала $\xi = 0$, в случае, когда функция рассеяния $\alpha(\theta')$ имеет резко выраженный передний максимум $\alpha\left(\theta' \ll \frac{1}{2}\pi\right) \gg \alpha\left(\theta' > \frac{1}{2}\pi\right)$. Показать, что в этом случае приемлемым приближением к функции распределения при малом $1-\mu$ является решение видоизмененного уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi, \mu) + f(\xi, \mu) - \frac{1}{2}\varkappa \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n P_n(\mu) \int_{-1}^{1} P_n(\lambda) f(\xi, \lambda)\, d\lambda;$$

числа A_n определены в (12.2.4). Показать, что решением этого уравнения, удовлетворяющим соответствующему граничному условию, а именно условию $f(0, \mu) = (I_0/2\pi)\,\delta(1-\mu)$, является

$$f(\xi, \mu) = \frac{I_0}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\mu) \exp[(\varkappa A_n - 1)\xi].$$

Рассмотреть подробно решение в случае, когда $\alpha(\theta) = [(N+1)/4\pi] \cos^{2N}\left(\frac{1}{2}\theta\right)$, где $N \gg 1$. Что происходит при $N \to \infty$? Почему?

12.11. Предположим, что при каждом столкновении падающая частица (например, нейтрон) поглощается ядром-мишенью, а затем снова испускается одинаково во всех направлениях, но с уменьшенной кинетической энергией; часть частиц, испускаемых с энергией, лежащей между E и $E+dE$, выражается числом $\alpha(E/E')^{\alpha}(dE/E)$, где E' — кинетическая энергия бомбардирующей частицы ($E' \gg E$). Составить уравнение, аналогичное (12.2.2), для функции распределения $f(\xi, \mu, \varepsilon)$, указывающей количество частиц, находящихся в единичном объеме, расположенном на расстоянии ξ средних свободных пробегов от поверхности рассеивающей среды, движущихся в направлении, образующем угол $\vartheta = \arccos\mu$ с осью ξ, и имеющих кинетическую энергию, определяемую параметром $\varepsilon = \ln(E_0/E)$. Показать, что для распределения, не зависящего от ξ, уравнение для f имеет вид

$$f(\mu, \varepsilon) = \frac{\alpha}{4\pi} \int_0^{\varepsilon} e^{\alpha(\varepsilon'-\varepsilon)} R(\varepsilon')\, d\varepsilon' + s(\mu)\,\delta(\varepsilon),$$

где $R(\varepsilon) = 2\pi \int f\, d\mu$, а s — функция источников, дающих частицы с начальной энергией E_0. С помощью преобразования Лапласа относительно ε показать, что

$$f(\mu, \varepsilon) = \frac{1}{2}\alpha\varepsilon \int_{-1}^{1} s(\mu)\, d\mu + s(\mu)\,\delta(\varepsilon).$$

Каково общее решение, если функция источников имеет вид $s(\mu, \varepsilon)$ $(\varepsilon \gg 0)$?

12.12. Предположим, что доля частиц, испускаемых с энергиями, лежащими в промежутке между ε и $\varepsilon + d\varepsilon$ $[\varepsilon = \ln(E_0/E)]$ в условиях задачи 12.11, есть $w(\varepsilon)$ $(\varepsilon \geqslant 0)$, причем $\int\limits_0^\infty w(\varepsilon)\, d\varepsilon \leqslant 1$. Показать, что уравнение для преобразования Лапласа $f \longrightarrow \varphi$ $(\varepsilon \longrightarrow \eta)$ и решение для преобразования $R \longrightarrow \rho$ имеют вид

$$\varphi(\mu, \eta) = \frac{1}{4\pi}\,\omega(\eta)\,\rho(\eta) + s(\mu), \qquad \omega(\eta) = \int\limits_0^\infty w(\varepsilon)\, e^{-\eta\varepsilon}\, d\varepsilon,$$

$$\rho(\eta) = \frac{\sigma}{1 - \omega(\eta)}, \qquad \sigma = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} s(\mu)\, d\mu.$$

Показать, что при $w = \varkappa\delta(\varepsilon) + \alpha\varkappa' u(\varepsilon - \varepsilon_0)\, e^{-\alpha(\varepsilon - \varepsilon_0)}$ $(\varkappa + \varkappa' \leqslant 1)$ имеем

$$f(\mu, \varepsilon) = \frac{\sigma}{4\pi(1-\varkappa)} \left\{ \varkappa\delta(\varepsilon) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\varkappa'\alpha}{1-\varkappa} \right)^n \frac{(\varepsilon - n\varepsilon_0)^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-\alpha(\varepsilon - n\varepsilon_0)}\, u(\varepsilon - n\varepsilon_0) \right\} + $$
$$+ s(\mu)\,\delta(\varepsilon).$$

Рассмотреть физическое значение ступенчатых функций u в ответе.

12.13. Применить обратное преобразование Лапласа относительно ξ к (12.2.2) в случае полубесконечной среды $(x \geqslant 0)$ при равномерном рассеянии частиц, пренебрегая потерей энергии при столкновениях. Показать, что при $s(\xi, \mu) = (I/2\pi)\,\delta(\xi)\,\delta(1-\mu)$ (что соответствует пучку, падающему нормально к поверхности $\xi = 0$) уравнение для преобразования Лапласа функции f $(f \longrightarrow F,\ \xi \longrightarrow p)$ имеет вид

$$(1 + \mu p)\, F(p, \mu) = \frac{\varkappa}{4\pi}\, G(p) + \frac{I}{2\pi}\,\delta(1-\mu), \qquad G(p) = 2\pi \int\limits_{-1}^{1} F\, d\mu.$$

С помощью интегрирования относительно μ и перестановки членов показать, что

$$G(p) = \frac{Ip}{(p+1)(p - \varkappa \operatorname{Ar\,th} p)}, \qquad G(p) = \int\limits_0^\infty R(\xi)\, e^{-p\xi}\, d\xi.$$

Рассмотреть вычисление $R(\xi) = 2\pi \int f\, d\mu$ и вывести отсюда f.

12.14. Предположим, что угол рассеяния имеет преимущественно малое значение, так что можно пренебречь рассеянием назад. Тогда под знаком интеграла в (12.2.2) функцию $f(\mu')$ можно разложить в ряд Тейлора, полагая $\mu' \simeq \mu\left(1 - \frac{1}{2}\theta'^2\right) + \theta'\sqrt{1-\mu^2}\cos\beta$, если $d\Omega' \simeq \theta'\, d\theta'\, d\beta$. Показать, что с точностью до членов второго порядка относительно ϑ (12.2.2) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} + (1 - \varkappa)\, f - \frac{\Delta^2 \varkappa}{2\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\vartheta \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) \simeq s(\vartheta, \xi),$$

где $\mu = \cos\vartheta \simeq 1 - \frac{1}{2}\vartheta^2$ и $\Delta^2 = 2\pi \int\limits_0^\pi \alpha(\theta')\,(\theta')^3\, d\theta' \ll 1$ (постоянная Δ может быть названа средним углом рассеяния). Показать, что если пучок $s(\vartheta)$ падает на плоскость $x = 0$, то решение этого приближенного уравнения имеет вид

$$f(\vartheta, \xi) \simeq \int_0^\infty J_0(\lambda\vartheta) \exp\left[-\left(1-\varkappa+\frac{1}{2}\Delta^2\varkappa\lambda^2\right)\xi\right]\lambda\,d\lambda \int_0^\infty s(\theta) J_0(\lambda\theta)\,\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{e^{(\varkappa-1)\xi}}{\Delta^2\varkappa\xi} \int_0^\infty I_0\left(\frac{\vartheta\theta}{\varkappa\Delta^2\xi}\right)\exp\left(\frac{-\vartheta^2-\theta^2}{2\varkappa\Delta^2\xi}\right) s(\theta)\,\theta\,d\theta.$$

12.15. Скомбинировать прием, предложенный в задаче 12.14, с первой частью задачи 12.12. Предположить, что $\Delta = \Delta_0(1-e^{-\gamma\varepsilon})$, но что $w(\varepsilon)$ не зависит от ϑ. Рассчитать $f(\vartheta, \xi, \varepsilon)$.

12.16. Предположим, что частица, рассеянная под углом θ', теряет часть своей кинетической энергии, выражаемую числом $(2m/M)(1-\cos\theta')$ [см. (2.4.45)]. Воспользовавшись приближениями, рассмотренными в задаче 12.14 для рассеяния под малыми углами, показать, что уравнение для f имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} + (1-\varkappa) f - \varkappa\Delta^2\frac{m}{M}\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} + \frac{\varkappa\Delta^2}{2\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\vartheta\frac{\partial f}{\partial\vartheta}\right) = s(\vartheta, \xi)\,\delta(\varepsilon),$$

где $\varepsilon = \ln(E_0/E)$, а Δ^2 определено в задаче 12.14. Показать, что при $s(\vartheta, \xi) = e^{-\xi}\delta(1-\mu)$ (падающий нормально пучок, ослабленный благодаря проникновению) функция распределения имеет вид

$$f \simeq \frac{1}{\varkappa\Delta^2\varepsilon}\exp\left(-\xi+\frac{M\varepsilon}{m\Delta^2}-\frac{m\vartheta^2}{2M\varepsilon}\right)\left[1-u\left(\varepsilon-\frac{\varkappa\Delta^2 m}{M}\xi\right)\right].$$

(*Указание*: применить преобразование Лапласа для ξ и ε и преобразование Ганкеля для ϑ.)

12.17. Потенциальная энергия частицы с массой M равна ∞ при $x<0$, равна $U_0\hbar^2/2M$ (постоянна) при $a<x<b$ и нулю при всех прочих значениях x. Показать, что решение уравнения Шредингера для энергии $k^2\hbar^2/2M$ имеет вид

$$\psi(k, x) = \begin{cases} \dfrac{1}{A}\sin(kx), & 0<x<a, \\ \dfrac{1}{A}\left[\sin(ka)\,\mathrm{ch}\,\varkappa(x-a)+\dfrac{k}{\varkappa}\cos(ka)\,\mathrm{sh}\,[\varkappa(x-a)]\right], & a<x<b, \\ \sin[k(x-b)+\Omega], & b<x, \end{cases}$$

где

$$A^2 = \mathrm{cosec}^2\varphi\,\{\sin^2(ka+\varphi)\,e^{2\varkappa(b-a)} + \sin^2(ka-\varphi)\,e^{-2\varkappa(b-a)} -$$
$$- 2\cos(2\varphi)\sin(ka+\varphi)\sin(ka-\varphi)\},$$
$$\sin\varphi = k/\sqrt{U_0}, \quad \varkappa = \sqrt{U_0}\cos\varphi$$

и

$$\Omega = \mathrm{arc\,tg}\left\{\frac{\sin(ka+\varphi)\,e^{\varkappa(b-a)}+\sin(ka-\varphi)\,e^{-\varkappa(b-a)}}{\sin(ka+\varphi)\,e^{\varkappa(b-a)}-\sin(ka-\varphi)\,e^{-\varkappa(b-a)}}\,\mathrm{tg}\,\varphi\right\}.$$

Показать, что при $k^2<U_0$ и большом $\varkappa(b-a)\psi$ в интервале $0<x<a$ может оказаться большой только в узкой полосе значений энергии. Найти эти «виртуальные уровни энергии» и выяснить их физический смысл.

12.18. Показать, что для задачи 12.17 последующее решение уравнения Шредингера с временной зависимостью, соответствующее начальному значению ψ, равному $\psi_0(x)$, дает

$$\Psi(x, t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-ik^2\tau}\psi(k, x)\,dk \int_0^\infty \psi_0(\xi)\,\psi(k, \xi)\,d\xi,$$

где $\tau = \hbar t/2M$ пропорционально времени. Предположим, что первоначально частица достоверно находится внутри «долинной области» $0 < x < a$, так что, например, $\psi = \sqrt{2/a}\,\sin(\pi n x/a)\,u(a-x)$, $x > 0$. Показать, что если $(\pi n/a)^2 \ll U_0$ и $\exp[\sqrt{U_0}(b-a)] \gg 1$, то хорошее приближение для Ψ в «долине» определяется формулой

$$\sqrt{2a}\,\frac{(n\pi)^2}{\pi a^4 U_0}\exp[-2\sqrt{U_0}(b-a)]\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin[(k_n+\lambda)x]}{\lambda^2+\delta_n^2}\exp[-ik_n^2-2ik_n\lambda\tau]\,d\lambda,$$

$$0 < x < a, \quad \tau > 0,$$

где

$$k_n = \frac{n\pi}{a} - \frac{n\pi}{a^2\sqrt{U_0}}$$

и

$$\delta_n = \frac{(2\pi n)^2}{a^3 U_0}\exp[-2\sqrt{U_0}(b-a)].$$

Показать, что это выражение приближенно равно

$$\sqrt{2/a}\,\sin(k_n x)\exp\left\{-\left[ik_n^2 + \frac{(2\pi n)^3}{a^4 U_0}\exp[-2\sqrt{U_0}(b-a)]\right]\tau\right\},$$

$$0 < x < a, \quad \tau > 0.$$

Каков физический смысл действительной части показательной функции?

12.19. Одномерная потенциальная энергия частицы с массой M равна $-(U_0\hbar^2/2M)$ при $-a < x < a$ и нулю при $|x| > a$. Каковы энергии связанных состояний и волновые функции? Сколько связанных состояний имеется при очень малом U_0? Трехмерная потенциальная энергия той же частицы равна $-(U_0\hbar^2/2M)$ для радиуса $r < a$ и нулю для $r > a$. Каковы энергии связанных состояний и волновые функции? Сколько связанных состояний имеется при очень малом U_0?

12.20. Система до момента $t = 0$ имеет оператор Гамильтона $\mathscr{H}_0$ и находится в стационарном состоянии, характеризуемом решением φ_n уравнения $\mathscr{H}_0\varphi_n = E_n\varphi_n$. При $t = 0$ внезапно прилагается возмущающая энергия $\mathscr{H}_1$. Формально, применяя преобразование Лапласа, показать, что последующее после $t = 0$ решение уравнения Шредингера с временной зависимостью будет иметь вид

$$\Psi(t) = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon}\frac{\exp(-iEt/\hbar)}{E-\mathscr{H}_0-\mathscr{H}_1}\varphi_n\,dE =$$

$$= \exp\left[-\frac{i(\mathscr{H}_0+\mathscr{H}_1)t}{\hbar}\right]\varphi_n =$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty+i\varepsilon}^{\infty+i\varepsilon}\exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\mathscr{P}_n)\mathscr{H}_1^n}{[E-\mathscr{H}_0-\mathscr{P}_n\mathscr{H}_1]^{n+1}}\varphi_n\,dE,$$

где оператор $\mathcal{P}_n$ определен в рассуждениях, предшествовавших (9.1.43). Исходя из последней формулы, получить разложение $\Psi(t)$ в ряд по собственным функциям φ_m, аналогичный рядам теории возмущений (9.1.12). Перегруппировкой членов получить ряды, аналогичные рядам Финберга и Фредгольма из § 9.1.

12.21. Показать, что уравнение Шредингера для атома водорода ($V = -e^2/r$) допускает разделение переменных в вытянутых сфероидальных координатах с ядром, помещенным в одном из фокусов. Подсчитать энергии и волновые функции для четырех наинизших связанных состояний.

12.22. Рассчитать амплитуду рассеяния для рассеяния в потенциальном поле $U = A\exp(-\alpha^2r^2)$. Применить вариационный принцип (12.3.68), используя в качестве пробной функции падающую волну $\exp(ikz)$. (*Указание*: двойное интегрирование в знаменателе провести не в импульсном, или K-пространстве, а в координатном пространстве.) В какой области изменения k полученный результат будет отличаться от борновского приближения меньше чем на 10%?

12.23. Частица массы M находится в потенциальном поле

$$V = \frac{1}{2}M\omega^2x^2 + \frac{b^2}{x^2}.$$

Показать, что допустимые энергии даются равенством

$$W_n = 2\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha\right), \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где $\alpha^2 = 2Mb^2/\hbar^2 + \frac{1}{4}$, а соответствующие волновые функции имеют вид

$$\psi_n = N_n e^{-\frac{1}{2}z^2} z^{\alpha+\frac{1}{2}} L^{\alpha}_{n+\alpha}(z^2),$$

где $z = x\sqrt{M\omega/\hbar}$. Выразить нормирующий множитель N_n через n, α, M, ω и h.

12.24. Частица массы M движется в центральном поле

$$V = \frac{\hbar^2}{2M}\frac{b(b+1)}{r^2}\sec^2\vartheta - \frac{Ze^2}{r}.$$

Показать, что допустимые энергии связанных состояний имеют вид

$$W_n = -\frac{Me^4Z^2}{\hbar^2\sigma^2}, \qquad \sigma = b+1,\ b+2,\ \ldots,\ b+n,\ \ldots,$$

и соответствующие волновые функции определяются равенством

$$\psi = Ne^{im\varphi}\cos^{b+1}\vartheta\sin^m\vartheta \times$$
$$\times F\left(m-l+1,\ \frac{1}{2}l+\frac{1}{2}m+b+1\,\middle|\,b+\frac{3}{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}\cos^2\vartheta\right)x^{l+b}e^{-\frac{1}{2}x}L^{2l+2b+1}_{\sigma+l+b}(x).$$

Каково должно быть значение l, чтобы ψ было конечно?

12.25. Гармонический осциллятор возмущается потенциалом bx^2, причем b мало по сравнению с $M\omega^2/2$. Рассчитать возмущение уровней энергии с точностью до членов второго порядка относительно b.

12.26. На частицу действует центральная сила с потенциалом

$$-\frac{\hbar^2 b^2}{2M}e^{-r/d}.$$

Найти наинизшую допустимую энергию как функцию от $1/bd$ для $0<1/bd<2$, используя таблицы функций Бесселя (см. стр. 620, 621). Найти эту энергию также вариационным методом, используя в качестве пробной функции волновую функцию $Ne^{-\alpha r}$. Сравнить результаты.

12.27. Подсчитать фазовый угол рассеяния η_0 для потенциального поля задачи 12.26 при $bd=1/2$ как функцию от kd для $0<kd<1$ (см. стр. 637). Подсчитать η_0 также на основе борновского приближения и вариационным методом (см. стр. 641 и 650). Сравнить результаты.

12.28. Получить функцию Грина стр. 659 для точечного источника, расположенного на оси x. Что произойдет, если источник будет находиться в начале координат?

12.29. Воспроизвести детали вывода (12.3.85).

12.30. Подсчитать следующее приближение для волновой функции основного состояния гелия. Использовать для этого в равенстве стр. 680 вариационную волновую функцию со стр. 679 и функцию Грина (12.3.94).

12.31. До момента $t=0$ система характеризуется оператором Гамильтона $\mathscr{H}_0$ и имеет двукратно вырожденное основное состояние: $\mathscr{H}_0\varphi_1=E\varphi_1$ и $\mathscr{H}_0\varphi_2=E\varphi_2$ (причем φ_1 ортогонально к φ_2). После момента $t=0$ в гамильтониане имеется дополнительный член $\mathscr{H}_1$ со свойствами

$$\mathscr{H}_1\varphi_1=\hbar(\alpha\varphi_1+\beta\varphi_2),\qquad \mathscr{H}_1\varphi_2=\hbar(\beta\varphi_1-\alpha\varphi_2).$$

Показать, что если до момента $t=0$ система находилась в состоянии 1, то при $t>0$ волновая функция будет иметь вид

$$\Psi=\left\{\left[\cos(\gamma t)-\frac{i\alpha}{\gamma}\sin(\gamma t)\right]\varphi_1-\frac{i\beta}{\gamma}\sin(\gamma t)\,\varphi_2\right\}e^{-iEt/\hbar},$$

где $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2$. Выяснить физический смысл этого результата.

12.32. Даны две системы, одна из которых имеет два дискретных уровня энергии:

$$\mathscr{H}_1\varphi_n=E_n\varphi_n\quad (n=0,1,\ E_0=0,\ E_1=E),$$

а другая один дискретный уровень (при нулевой энергии) и континуум уровней (излученные частицы):

$$\mathscr{H}_2\chi_0=0,\quad \mathscr{H}_2\chi_k=\varepsilon(k)\chi_k,\quad \chi_k=e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_2}.$$

Начиная с момента $t=0$, обе эти системы связаны энергетическим членом $\mathscr{H}_{12}$, имеющим свойства

$$\mathscr{H}_{12}\varphi_0\chi_k=M(k)\varphi_1\chi_0e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0},\quad \mathscr{H}_{12}\varphi_1\chi_0=\int\overline{M}(k)\,\varphi_0\chi_ke^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0}\,dv_k,$$

где dv_k — элемент объема трехмерного «k-пространства» и где $\mathbf{r}_0$ можно считать равным радиус-вектору центра тяжести системы 1. Полагая

$$\Psi=a_0(t)\,\varphi_1\chi_0e^{-iEt/\hbar}+\int a_k(t)\,\varphi_0\chi_ke^{-i\varepsilon(k)t/\hbar}\,dv_k$$

в зависящем от времени уравнении Шредингера и решая полученные уравнения относительно a_k, показать, что если ε зависит только от модуля $\mathbf{k}$ и если M мало по сравнению с E, то

$$a_0 \simeq e^{-\gamma t}, \qquad a_k \simeq \overline{M}(k)\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} \frac{e^{-\gamma t + i(\varepsilon - E)t/\hbar} - 1}{E - \varepsilon(k) - i\hbar\gamma},$$

где $\gamma = \pi\,|M(k_1)|^2 k_1^2/\hbar\varepsilon'(k_1)]$, k_1 — корень уравнения $\varepsilon(k) = E$ и ε' — производная от ε по k. Показать далее, что волновая функция при $t > 0$ будет иметь вид

$$\Psi \simeq \varphi_1\chi_0 e^{-\gamma t - iEt/\hbar} + $$
$$+ \frac{4\pi\overline{M}(k_1)}{r_2'} \varphi_0 e^{ik_1 r_2' - iEt/\hbar} u\left[t - \frac{\hbar r_2'}{\varepsilon'(k_1)}\right] \exp\left\{-\gamma\left[t - \frac{\hbar r_2'}{\varepsilon'(k_1)}\right]\right\},$$

где $r_2' = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0|$. Предполагая, что φ представляет атом или ядро и что χ_0, χ_k представляют частицы (фотоны, позитроны и т. д.) в их «скрытом» или эмитированном состоянии соответственно, выяснить физическое значение этого результата.

Полиномы Якоби

Полиномы $F(-n, n+a\,|\,c\,|\,z)$ называются *полиномами Якоби* n-го порядка для параметров a и c ($n = 0, 1, 2, \ldots$; $c \neq 0, 1, 2, \ldots, n-1$). Эти полиномы ортогональны между собой в интервале $0 \leqslant z \leqslant 1$ с весовой функцией $z^{c-1}(1-z)^{a-c}$:

$$\int_0^1 z^{c-1}(1-z)^{a-c} F(-m, m+a\,|\,c\,|\,z)\, F(-n, n+a\,|\,c\,|\,z)\, dz =$$
$$= \delta_{mn} \frac{n!\,[\Gamma(c)]^2\,\Gamma(n+a-c+1)}{(a+2n)\,\Gamma(a+n)\,\Gamma(c+n)}, \quad \mathrm{Re}\, c > 0, \quad \mathrm{Re}(a-c) > -1.$$

Общие соотношения.

$$F(-n, n+a\,|\,c\,|\,z) = \frac{z^{1-c}(1-z)^{c-a}}{c(c+1)\ldots(c+n-1)} \frac{d^n}{dz^n}\left[z^{c+n-1}(1-z)^{a+n-c}\right],$$

$$\frac{d}{dz} F(-n, n+a\,|\,c\,|\,z) = -\frac{n(n+a)}{c} F(-n+1, n+a+1\,|\,c+1\,|\,z),$$

$$zF(-n, n+a\,|\,c\,|\,z) = \frac{c-1}{2n+a}\left[F(-n, n+a-1\,|\,c-1\,|\,z) - \right.$$
$$\left. - F(-n-1, n+a\,|\,c-1\,|\,z)\right],$$

$$F(-n, n+a\,|\,c\,|\,z) = \frac{(a+n)(c+n)}{c(2n+a)} F(-n, n+a+1\,|\,c+1\,|\,z) -$$
$$- \frac{n(n+a+c)}{c(2n+a)} F(-n+1, n+a\,|\,c+1\,|\,z) =$$
$$= \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a)}{\Gamma(n+c)\,\Gamma(c-a-n)} F(-n, n+a\,|\,a-c+1\,|\,1-z) =$$
$$= \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(2n+a)}{\Gamma(n+a)\,\Gamma(n+c)} (-z)^n F\left(-n, 1-c-n\,|\,1-2n-a\,|\,\frac{1}{z}\right) =$$
$$= \frac{\Gamma(c)\, z^{1-c}}{\Gamma(n+a)\,\Gamma(c-n-a)} \int_0^z (z-t)^{c-n-a-1} t^{n+a-1} (1-t)^n\, dt.$$