ных диполей. Например, если

$$D_x^h + iD_y^h = -c\left[\frac{1}{2}(\pi\beta_{ln})^3\left(\frac{b}{a}\right)^3(2l+1)(-1)^n j_l^2\left(\frac{\pi\beta_{ln}r_0}{a}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{D_l(\pi\beta_{ln})}{j_{l+1}(\pi\beta_{ln})}\right]^{1/2}(D_x^e - iD_y^e),$$

то δ_l близко к $n\pi$, допустимые частоты в точности равны

$$\omega = \frac{\pi c\beta_{ln}}{a}$$

и стоячая волна приближенно равна $\mathbf{M}_{e1l}^1(\mathbf{r}) + i\mathbf{M}_{o1l}^1(\mathbf{r})$ всюду, кроме малой окрестности объекта. С другой стороны, другая система допустимых частот имеет вид

$$\omega = \frac{\pi c\beta_{ln}}{a} + \frac{cd_{ln}}{a},$$

где

$$d_{ln} \simeq \frac{1}{2}(-1)^n(2l+1)\left(\pi\beta_{ln}\frac{b}{a}\right)^3\left[\frac{D_l(\pi\beta_{ln})}{j_{l+1}(\pi\beta_{ln})}\right]\left[j_l^2(z) + \left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}zj_l\right)^2\right]_{z=\pi\gamma_{ln}r_0/a},$$

что соответствует

$$D_x^h + iD_y^h \simeq c\left[\frac{1}{2}(-1)^n(2l+1)\left(\pi\beta_l\frac{b}{a}\right)^3\frac{D_l(\pi\beta_{ln})}{j_{l+1}(\pi\beta_{ln})}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}zj_l\right)^2_{z=\pi\gamma_{ln}r/a}\right]^{1/2}(D_x^e + iD_y^e).$$

Форма волны опять приблизительно равна $\mathbf{M}_{e1l}^1 + i\mathbf{M}_{o1l}^1$. Наконец, имеется подобная пара систем собственных функций и частот вблизи $ka = \pi\gamma_{ln}$ ($\varepsilon_l \simeq n\pi$), включающая комбинации $D_x^e + iD_y^e$ и $D_x^h + iD_y^h$. Эти функции соответствуют стоячим волнам, приближенно равным $\mathbf{N}_{e1l}^1 + i\mathbf{N}_{o1l}^1$. [Можно, конечно, получить стоячую волну определенной поляризации $\mathbf{N}_{e1l}^1$ или $\mathbf{M}_{o1l}^1$ и т. д. вместо волн круговой поляризации $(\mathbf{N}_e + i\mathbf{N}_o)$, $(\mathbf{M}_e + i\mathbf{M}_o)$].

Таким образом, наличие малой сферы частично снимает вырождение системы собственных функций полой сферы. При отсутствии включения каждому значению l отвечают две различные системы частот $\omega = \pi c\beta_{ln}/a$ и $\omega = \pi c\gamma_{ln}/a$, соответствующие $2(2l+1)$ различным системам собственных функций $\mathbf{M}_{\sigma ml}^1$ и $\mathbf{N}_{\sigma ml}^1$. При наличии малой сферы каждому значению l отвечает лишь пять различных систем собственных частот.

Резюме. Мы пришли к концу нашего рассмотрения векторных решений уравнения Лапласа и волнового уравнения. Без сомнения, можно разобрать много еще более поучительных примеров, и многие методы, изученные ранее в применении к скалярным полям, могут быть видоизменены для применения к векторным полям. Но нам кажется, что нет большой необходимости в подробном обсуждении оставшихся возможностей и что уже разобранные примеры дают достаточно для того, чтобы читатель сам при необходимости проделал переход от скалярной задачи к векторной. Поэтому мы заканчиваем этот раздел, как должны кончаться все книги, точкой.

Задачи к главе 13

13.1. Показать, что функция $\mathbf{M}_{mn} = \operatorname{rot}[\mathbf{a}_z S_{mn}(h, \eta)\, he_{mn}(h, \xi)]$ касательна к сфероиду $\xi = \mathrm{const}$ лишь при $m = 0$ и что ротор функции $\mathbf{N}_{mn} = \operatorname{rot}\mathbf{M}_{mn}$ касателен к этому сфероиду только при $m = 0$ [функции S и he

определены в (11.3.83) и (11.3.91)]. Используя функцию $\mathbf{N}_{01}$, рассмотреть излучение электрического диполя, рассматриваемого как предельный случай вытянутого сфероида. Распределение тока и угловую зависимость асимптотического излучения от ϑ взять в виде $\vartheta = \arccos \eta$ при $h = 0,\ 1/4,\ 1/2$. Воспользоваться разложениями, приведенными на стр. 468 и 473.

13.2. Уравнения Прока, аналогичные уравнениям Клейна — Гордона и Дирака, для частиц со спином единица устанавливают между векторным потенциалом $\mathbf{A}$ и скалярным потенциалом φ соотношения

$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} - \varkappa^2\mathbf{A} + (k - V)^2\,\mathbf{A} = (k - V)\operatorname{grad}\varphi,$$
$$\nabla^2\varphi - \varkappa^2\varphi = \operatorname{div}\,[(k - V)\,\mathbf{A}],$$

где V — потенциальная энергия частицы, k — ее полная энергия в соответствующих единицах; $\varkappa$ пропорционально массе покоя. Рассмотреть разделение этой системы уравнений при $V = 0$, при $V = V(z)$ и при $V = V(r)$. Показать, что для решений типа $\mathbf{M}$ [см. (13.1.4)] φ можно положить равным нулю. Получить уравнение для скалярной функции ψ. Рассмотреть также решения типа $\mathbf{L}$ и $\mathbf{N}$.

13.3. Написать системы собственных векторных функций, соответствующих формулам (13.1.15), (13.1.17), (13.1.19) и (13.1.20), для областей внутри кругового цилиндра (ограниченного поверхностями $r = a$, $z = 0$, $z = b$) и внутри сферы ($r = a$).

13.4. Векторная функция источника

$$\mathbf{Q} = \mathbf{a}_z Q_0 \left[1 - \frac{1}{a^2}(x^2 + y^2 + z^2)\right] e^{-ikct}, \quad r < a,$$

равная нулю при $r > a$, излучает в свободном пространстве. Используя формулы (13.1.31), (13.1.32) и (13.1.39), вычислить решения уравнений

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\frac{4\pi\mathbf{Q}}{c^2},$$
$$-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = -\frac{4\pi\mathbf{Q}}{c^2},$$
$$c_e^2\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - c_t^2\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} + \omega^2\mathbf{A} = -4\pi\mathbf{Q}$$

при $r \gg a$ и при $ak \ll 1$. Чем отличаются решения при r, немного большем a? При r, меньшем a? (В каждом случае принять $ka \ll 1$.)

13.5. Несжимаемая жидкость с вязкостью η находится в состоянии покоя в круглой трубе с внутренним радиусом a. Начиная с момента $t = 0$, вдоль трубы поддерживается постоянное падение давления F. Используя преобразования Лапласа, показать, что скорость жидкости в момент t в точке r, φ, z (цилиндрические координаты) равна

$$v = k\,\frac{2Fa^2}{\eta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{J_0(\pi\beta_{0n}r/a)}{(\pi\beta_{0n})^3\,J_0(\pi\beta_{0n})}\left\{1 - \exp\left[-\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\pi\beta_{0n}}{a}\right)^2 t\right]\right\}.$$

Сравнить со стационарным решением (13.2.10).

13.6. Упругий диск толщины h и радиуса a закреплен во втулке на неподвижной оси радиуса b. По диску радиально от оси течет ток I, который на внешнем периметре снимается щетками, не оказывающими никакого механического воздействия на диск. Диск закручивается под действием постоянного магнитного поля B, параллельного оси диска.

Показать, что смещение точки диска, находящейся на расстоянии r от оси, равно

$$\mathbf{s} = \frac{2IB}{\mu c}\left[a\left(\frac{r}{b}-1\right) - r\ln\left(\frac{r}{b}\right)\right]\mathbf{a}_\varphi.$$

Определить напряжение как функцию от r. Найти усилие во втулке.

13.7. Показать, что $-\operatorname{rot}\operatorname{rot}[\mathbf{a}_\varphi\psi(\xi_1, \xi_2)] = \mathbf{a}_\varphi[\nabla^2\psi - (1/r^2)\psi]$, где ξ_1, ξ_2, φ — криволинейные координаты вращения, определенные соотношениями $x = r(\xi_1, \xi_2)\cos\varphi$, $y = r(\xi_1, \xi_2)\sin\varphi$, $z = z(\xi_1, \xi_2)$. Затем показать, что решение векторного уравнения $-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F} + k^2\mathbf{F} = 0$ имеет вид $\mathbf{F} = \mathbf{a}_\varphi\psi_n(\xi_1, \xi_2)$, где $\psi_n(\xi_1, \xi_2)\cos\varphi$ — решение скалярного уравнения Гельмгольца. Используя этот результат, получить «крутильную» часть» функции Грина в вытянутых сфероидальных координатах ξ, η, φ [см. (10.3.53)], т. е. показать, что решение уравнения

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{G}_\varphi(\xi, \eta \mid \xi_0, \eta_0) = \frac{32\pi}{a^3(\xi^2-\eta^2)}\delta(\xi-\xi_0)\,\delta(\eta-\eta_0)\,\mathbf{a}_\varphi$$

имеет вид

$$\mathbf{G}_\varphi = \mathbf{a}_\varphi\frac{4\pi}{ia}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}P_n^1(\eta)P_n^1(\eta_0)\begin{cases} P_n^1(\xi)\,Q_n^1(\xi_0) & \text{при } \xi_0 > \xi, \\ P_n^1(\xi_0)\,Q_n^1(\xi) & \text{при } \xi_0 < \xi. \end{cases}$$

Получить соответствующее выражение для сплюснутых сфероидальных координат.

13.8. Используя результаты задачи 13.7, решить следующие задачи:

а) Сплюснутый сфероид, равномерно заряженный по поверхности $\xi = \xi_0$, вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Найти создающееся при этом магнитное поле.

б) На проводящем сплюснутом сфероиде заряд распределен так, что поверхность $\xi = \xi_0$ является эквипотенциальной. Какое магнитное поле возникает при вращении сфероида?

в) Наружная поверхность $\xi = \xi_0$ вытянутого сфероида прикреплена у концов $1 \geqslant \eta \geqslant 1 - \eta_0$ и $-1 \leqslant \eta \leqslant -1 + \eta_0$ к двум жестким коаксиальным стержням. Какое нужно приложить усилие, чтобы повернуть один стержень на угол α по отношению к другому? Найти смещение различных частей сфероида.

13.9. На свободную (напряжение на поверхности равно нулю) плоскую поверхность падает плоская поперечная волна (волна сдвига). Найти углы отражения и амплитуды отраженных продольной и поперечной волн как функции угла падения для двух поляризаций: $\mathbf{s}$ в плоскости падения; $\mathbf{s}$ ортогонально плоскости падения. Рассмотреть случай, когда угол падения настолько велик, что угол отражения продольной волны комплексный.

13.10. Показать, что ряд (13.3.14) определяет аффинорную функцию Грина для цилиндрического волновода, удовлетворяющую граничным условиям $\mathbf{n}\times\mathfrak{G} = 0$ на боковой поверхности волновода и при $z = 0$, если функции f_n и g_n имеют вид

$$f_n = \frac{1}{\gamma}\begin{cases} \sin\gamma z\cdot e^{i\gamma z_0} & \text{при } z_0 > z, \\ \sin\gamma z_0\cdot e^{i\gamma z} & \text{при } z_0 < z, \end{cases} \qquad \gamma = \sqrt{k^2 - k_{mn}^2} = i\sqrt{k_{mn}^2 - k^2}.$$

$$g_n = \frac{i}{\gamma}\begin{cases} \cos\gamma z\cdot e^{i\gamma z_0} & \text{при } z_0 > z, \\ \cos\gamma_0 z\cdot e^{i\gamma z} & \text{при } z_0 < z. \end{cases}$$

Полученное выражение представляет аффинорную функцию Грина для области волновода $z > 0$, поэтому его можно обозначить через $\mathfrak{G}^+$. Какой вид имеют функции f_n и g_n для $\mathfrak{G}^-$? Используя эти функции Грина, решить следующую задачу. Из $-\infty$ по волноводу распространяется наинизшая гармоника; в сечении $z=0$ стоит диафрагма, частично отражающая и частично пропускающая волну. Показать, что уравнение для векторного потенциала имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \oint_O \mathrm{rot}_0 [\mathfrak{G}^+(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0^s)] \cdot [\mathbf{a}_z \times \mathbf{A}(\mathbf{r}_0^s)]\, dS_0 & \text{для } z>0, \\ \mathbf{B}_{01} \sin\left[z\sqrt{k^2-k_{01}^2}\right] - \frac{1}{4\pi} \oint_O \mathrm{rot}_0\, \mathfrak{G}^- \cdot [\mathbf{a}_z \times \mathbf{A}]\, dS_0 & \text{для } z<0, \end{cases}$$

где интеграл берется по площади отверстия в диафрагме $z=0$. Каково асимптотическое выражение амплитуды прошедшей волны, если k больше k_{01}, но меньше k_{10}? Для касательной компоненты $\mathbf{A}$ в отверстии диафрагмы получить интегральное уравнение

$$\sqrt{1-\left(\frac{k_{01}}{k}\right)^2}\, \mathrm{grad}\, \psi_{01}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_O \mathfrak{F}(xy\,|\,x_0y_0) \cdot [\mathbf{a}_z \times \mathbf{A}(x_0y_0)]\, dx_0\, dy_0,$$
$$z,\ z_0 = 0,$$

где $\mathfrak{F} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}_0\, \mathfrak{G}^0$. Найти вариационный принцип, из которого получаются наилучшие значения $\mathbf{A}$ и амплитуды прошедшей волны.

13.11. Используя вариационный принцип задачи 13.10, рассчитать прохождение волны через щель ширины Δ, параллельную оси x в центре диафрагмы, помещенной в сечении $z=0$ прямоугольного волновода со сторонами a и $b\,(b>a)$. В качестве функции сравнения для $\mathbf{A}$ в отверстии использовать $A_0\mathbf{a}_x\sqrt{1-[2(y-b/2)/\Delta]^2}$.

13.12. Рассчитать излучение провода, помещенного по диаметру поперечного сечения круглого волновода, если по нему течет ток $Ie^{-i\omega t}$. Получить формулу, аналогичную (11.3.16), для возбуждающего напряжения в проводе.

13.13. Рассчитать и построить график коэффициента затухания $\varkappa$ (в соответствующих единицах) из (11.3.17) как функции от ω или k (в соответствующих единицах) для трех низших гармоник прямоугольного волновода ($b=1{,}5a$). Для трех низших гармоник круглого волновода.

13.14. Рассмотреть типы волн, распространяющихся внутри волновода эллиптического поперечного сечения. Найти выражения гармоник типа $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ и затухание трех низших гармоник.

13.15. Для передачи колебаний высокой частоты используется коаксиальная линия, образованная двумя концентрическими круговыми цилиндрами. Показать, что наинизшая гармоника в этом волноводе имеет критическую частоту, равную нулю (см. стр. 756). Чему равна постоянная затухания для этой волны?

13.16. Рассмотреть парциальные волны, распространяющиеся в «эллиптической концентрической линии» (провод внутри эллиптического цилиндра). Выписать выражения трех низших гармоник, их критические частоты и постоянные затухания.

13.17. Графическим или численным методом найти значение k для наинизшей волны удлинения в круглом брусе [см. (13.3.34)] при $k_s a = 2$ и $k_c a = 1$. Построить амплитуды r и z компонент $\mathbf{s}$ как функции от r/a.

13.18. Рассчитать волны кручения и удлинения в упругой среде, заполняющей внутренность жесткой круглой трубы с внутренним радиусом a.

13.19. Сфера радиуса a, первоначально находившаяся в состоянии покоя в неограниченном пространстве, заполненном вязкой жидкостью, в момент $t = 0$ внезапно приводится во вращение вокруг оси z с угловой скоростью ω. Показать, что установившееся движение жидкости (для $t \to \infty$) имеет вид

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_\varphi \omega a \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sin\vartheta, \quad r > a.$$

При помощи преобразования Лапласа рассчитать неустановившееся движение.

13.20. Выписать выражения для стоячих волн типа $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ внутри электромагнитного резонатора, имеющего форму цилиндрической коробки с внутренним радиусом a и расстоянием между крышками b. Найти выражение Q резонатора для этих волн, если проводимость металлических стенок резонатора равна σ. Написать аффинорную функцию Грина для этого резонатора в форме, аналогичной (13.3.46) и (13.3.47).

13.21. Прямоугольный электромагнитный резонатор возбуждается U-образной петлей тока $Ie^{-i\omega t}$. (Стороны петли лежат на прямых $x = l_x/2 - \Delta/2$, $y = l_y/2$, $0 \leqslant z \leqslant \Delta$; $y = l_y/2$, $z = \Delta$, $l_x/2 - \Delta/2 \leqslant x \leqslant l_x/2 + \Delta/2$; $x = l_x/2 + \Delta/2$, $y = l_y/2$, $0 \leqslant z \leqslant \Delta$.) Найти возбужденное поле. Какие гармоники отсутствуют? Найти резонансные частоты.

13.22. Стоячие волны $\mathbf{F}_n(\mathbf{r})$ $(= \mathbf{M}_n, \mathbf{N}_n)$ внутри электромагнитного резонатора являются решениями уравнения

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F}_n = k_n^2 \mathbf{F}_n.$$

Внутрь резонатора помещен маленький проводящий объект с боковой поверхностью S_0. Показать, что интегральное выражение для возмущенной волны, ближайшей по форме к $\mathbf{F}_m$, имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_m(\mathbf{r}) - \frac{1}{4\pi} \oint \mathfrak{G}_m(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0^s) \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}_0^s)\, dS_0$$

для $\mathbf{r}$ на S_0 и вне S_0 внутри резонатора. Аффинор $\mathfrak{G}_m$ определен в (13.3.46), где надо опустить член $\overline{\mathbf{F}}_m(\mathbf{r})\,\mathbf{F}_m(\mathbf{r}_0)$; вектор $\mathbf{K}$ представляет поверхностный ток $\mathbf{n} \times \operatorname{rot}\mathbf{A}$, индуцированный на S_0 возмущенной стоячей волной $\mathbf{A}$. Показать, что вариационный принцип, из которого можно определить наилучшую форму $\mathbf{K}$ (тем самым $\mathbf{A}$ получается из интегрального выражения), записывается в виде

$$J = \frac{\left[\oint \mathbf{U}(\mathbf{r}^s) \cdot \mathbf{F}_m(\mathbf{r}^s)\, dS\right]^2}{\oint\oint \mathbf{U}(\mathbf{r}^s) \cdot \mathfrak{G}_m(\mathbf{r}^s \mid \mathbf{r}_0^s) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{r}_0^s)\, dS\, dS_0}, \quad \delta J = 0,$$

где «наилучшая» форма $\mathbf{U}$ пропорциональна истинному поверхностному току $\mathbf{K}$, а стационарное значение J равно $\oint \mathbf{K} \cdot \mathbf{F}_m\, dS$. Показать, что это «наилучшее» значение J приблизительно равно разности $k^2 - k_n^2$ между истинным собственным значением k^2 и k_n^2, деленной на интеграл от $\mathbf{F}_n \cdot \mathbf{F}_n$ по объему резонатора.

13.23. В прямоугольном резонаторе ($l_z > l_y > l_x$) наинизшая гармоника электромагнитных колебаний имеет вид

$$\mathbf{M}_{011}(x, y, z) = -\mathbf{a}_x \frac{\pi}{l_y k_{011}} \sin\left(\frac{\pi y}{l_y}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l_z}\right).$$

В точке (x_1, y_1, z_1) внутри резонатора помещена маленькая проводящая сфера радиуса a ($a \ll l_x$). Используя вариационный принцип предыдущей задачи, рассчитать частоту возмущенных колебаний для наинизшей гармоники. В качестве функции сравнения использовать $\mathbf{U} = \mathbf{a}_\vartheta \sin\vartheta$, где r, ϑ, φ — сферические координаты с началом в центре сферы и полярной осью, параллельной оси x. Приближенно найти изменение $\mathbf{\Lambda}$, вызванное сферой, используя интегральное выражение для $\mathbf{\Lambda}$.

13.24. Атом водорода, волновая функция ψ_{mln} которого имеет вид (12.3.40), переходит из состояния $m=0$, $l=1$, $n=2$ в состояние $m=l=0$, $n=1$, излучая электромагнитную волну. При этом эквивалентные осциллирующие заряд и ток даются выражениями

$$\rho = \overline{\psi}_{001}\psi_{012} \exp\left[-i(E_2 - E_1)\frac{t}{\hbar}\right];$$

$$\mathbf{J} = \frac{\hbar}{M} \operatorname{Im}(\psi_{001} \operatorname{grad} \psi_{012}) \exp\left[-i(E_2 - E_1)\frac{t}{\hbar}\right].$$

Используя формулы (13.3.83) и (13.3.87), подсчитать эффективный дипольный момент перехода и полную мощность излучения. (Можно принять, что средний радиус атома значительно меньше длины волны, так что можно пользоваться (13.3.83).) Рассчитать квадрупольный момент для перехода из состояния $m=0$, $l=2$, $n=3$ в состояние $m=0$, $l=0$, $n=1$ и соответствующую мощность излучения. Меньше или больше эта мощность, чем мощность излучения при переходе $012 \to 001$? При каком переходе появляется магнитный диполь?

13.25. Найти комбинацию $\mathbf{L}_{01}^1$ и $\mathbf{N}_{01}^1$ [см. (13.3.78)], для которой вектор напряжения на поверхности сферы ($r=a$) равен нулю (т. е. найти аксиально симметричную волну сжатия в свободной сфере). Каковы допустимые частоты трех низших гармоник? Как меняется форма сферы и какой вид имеют внутренние смещения на этих трех гармониках?

13.26. Жесткая сфера массы M и радиуса a колеблется в неограниченной упругой среде по закону $\mathbf{a}_z D e^{-i\omega t}$. Показать, что пока длина возбуждаемых упругих волн велика по сравнению с $2\pi a$, смещение упругой среды в точке r, ϑ, φ ($r > a$) равно

$$\mathbf{s} \simeq -\frac{3iDe^{-i\omega t}}{2(k_s a)^2 + (k_c a)^2}\left[(k_c a)^3 \mathbf{L}_{01}^3 + (k_s a)^3 \mathbf{N}_{01}^3\right] \to$$

$$\to -\frac{3De^{-i\omega t}}{2(k_s a)^2 + (k_c a)^2}\frac{a}{r}\left[\mathbf{a}_r (k_c a)^2 e^{ik_c r}\cos\vartheta - \mathbf{a}_\vartheta (k_s a)^2 e^{ik_s r}\sin\vartheta\right], \; r \to \infty,$$

где в $\mathbf{L}$ [см. (13.3.67)] $k = k_c = \omega\sqrt{\rho/(\lambda + 2\mu)}$, а в $\mathbf{N}$ [см. (13.3.69)] $k = k_s = \omega\sqrt{\rho/\mu}$. Показать, что сила, перемещающая сферу на расстояние $\mathbf{a}_z z$ со скоростью $\mathbf{a}_z \dot{z}$ и ускорением $\mathbf{a}_z \ddot{z}$, равна

$$\mathbf{F} = \mathbf{a}_z\left\{M\ddot{z} + 4\pi a z \frac{3\mu(\lambda + 2\mu)}{2\lambda + 5\mu}\right\},$$

пока все частоты, входящие в разложение Фурье z, малы по сравнению с $(1/2\pi a)\sqrt{\mu/\rho}$.

13.27. Плоская поперечная волна

$$\mathbf{s} = s_0\mathbf{a}_x \exp(ik_s z - i\omega t)$$

падает на сферу радиуса a, рассмотренную в предыдущей задаче. Показать, что сила давления падающей волны равна $(4/3)\pi\mu k_s^2 a^3 s_0 \mathbf{a}_x$. Используя полученные в задаче 13.26 результаты, подсчитать амплитуду колебаний сферы и асимптотическое выражение рассеянной волны при $k_s a \ll 1$. Показать, что плоская продольная волна

$$\mathbf{s} = s_0\mathbf{a}_z \exp(ik_c z - i\omega t)$$

действует на сферу с силой $(4\pi/3)(\lambda + 2\mu) k_c^2 a^3 s_0 \mathbf{a}_z$. Рассчитать соответствующую амплитуду колебаний и асимптотическое выражение рассеянной волны. Вызывает ли поперечная падающая волна рассеянную продольную волну и наоборот? Почему?

13.28. На диэлектрическую сферу с коэффициентом преломления $n > 1$ падает плоская электромагнитная волна, распространяющаяся по направлению z. Вектор $\mathbf{E}$ направлен по оси x. Выписать ряды, определяющие рассеянную волну. Рассчитать рассеянное поле и поперечное сечение рассеяния при радиусе сферы, малом по сравнению с длиной волны.

13.29. Результаты предыдущей задачи для различных поляризаций падающей плоской волны можно записать в аффинорной форме

$$\mathfrak{A}(\mathbf{r}) = \mathfrak{J}_i \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) + \mathfrak{A}_s(\mathbf{r}) \longrightarrow \mathfrak{J}_i \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) + \frac{e^{ikr}}{r}\mathfrak{F}(\mathbf{k}_s \mid \mathbf{k}_i), \quad r \longrightarrow \infty,$$

где $\mathfrak{J}_i = \mathfrak{J} - \mathbf{a}_i\mathbf{a}_i$, $\mathbf{a}_i$ — единичный вектор, направленный по $\mathbf{k}_i$ $(\mathbf{k}_i = k\mathbf{a}_i)$. Полное поле для падающей волны $\mathbf{a}_e A_0 \cdot \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ при этом можно получить, умножая обе части уравнения на $\mathbf{a}_e A_0$ (где $\mathbf{a}_e$ — единичный вектор, ортогональный $\mathbf{a}_i$). $\mathfrak{A}\cdot\mathbf{a}_e A_0$ дает $\mathbf{A}$, а $\mathfrak{A}_s \cdot \mathbf{a}_e A_0$ — рассеянную волну. Аффинор $\mathfrak{F}$ в асимптотическом выражении является обобщением функции углового распределения f формулы (11.4.58), направление и амплитуда рассеянной волны при больших r определяются выражением $\mathfrak{F}\cdot\mathbf{a}_e A_0$. С другой стороны, $\mathbf{a}_s$ является единичным вектором в направлении рассеяния $\mathbf{k}_s = \mathbf{a}_s k$. Показать, что для диэлектрического объекта рассеяния с коэффициентом преломления n (отличным от единицы лишь внутри области, заключенной в сфере радиуса a) интегральное уравнение для $\mathfrak{A}$ имеет вид

$$\mathfrak{A}(\mathbf{r}) = \mathfrak{J}_i \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) + \frac{k^2}{4\pi}\int \mathfrak{G}_t(\mathbf{r} \mid \mathbf{r}_0)\cdot\mathfrak{A}(\mathbf{r}_0)\, U(\mathbf{r}_0)\, dv_0,$$

где $U = n^2 - 1$ отлично от нуля лишь внутри объекта рассеяния, а $\mathfrak{G}_t$ — поперечная функция Грина для электромагнитного поля. Показать, что

$$\mathfrak{F} = \frac{k^2}{4\pi}\int U(\mathbf{r}_0)\, \mathfrak{J}_s : \mathfrak{A}(\mathbf{r}_0) \exp(-i\mathbf{k}_s \cdot \mathbf{r}_0)\, dv_0,$$

где $\mathfrak{J}_s = \mathfrak{J} - \mathbf{a}_s\mathbf{a}_s$. Показать, что вариационный принцип для $\mathfrak{F}$ можно записать в виде

$$\frac{4\pi}{k^2}[\mathfrak{F}] = \frac{\int U(\mathbf{r}_0)\, \mathfrak{J}_s \cdot \mathfrak{B}(\mathbf{r}_0)\, e^{-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}_0}\, dv_0 \int |\widetilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{r})\cdot\mathfrak{J}_i|\, U(\mathbf{r})\, e^{i\mathbf{k}_i\mathbf{r}}\, dv}{\int |\widetilde{\mathfrak{B}}\cdot\mathfrak{B}|\, U\, dv - \frac{k^2}{4\pi}\int\int U(r)\, |\widetilde{\mathfrak{B}}(\mathbf{r})\cdot\mathfrak{G}_t\cdot\mathfrak{B}(\mathbf{r}_0)|\, U(\mathbf{r}_0)\, dv\, dv_0}, \quad \delta|\mathfrak{F}| = 0,$$

где $|\widetilde{\mathfrak{B}}|$ — след аффинора $\mathfrak{B}$ (см. стр. 65 в т. I), $\mathfrak{B}$ — функция сравнения для $\mathfrak{A}$, а $\widetilde{\mathfrak{B}}$ — функция сравнения для $\widetilde{\mathfrak{A}}$, сопряженной к $\mathfrak{A}$ (см. стр. 506).

13.30. Вариационным методом предыдущей задачи рассчитать аффинор рассеяния $\mathfrak{F}(\mathbf{k}_s\,|\,\mathbf{k}_i)$ для сферы радиуса a с коэффициентом преломления n. В качестве функций сравнения использовать $\mathfrak{B}=\mathfrak{J}_i\exp(i\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r})$; $\widetilde{\mathfrak{B}}=\mathfrak{J}_s\exp(-\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r})$. (Обе эти функции поперечные, поэтому для упрощения вычислений в знаменателе в интеграле можно писать $\mathfrak{G}$ вместо $\mathfrak{G}_t$.) Подсчитать рассеянные поля $\mathbf{E}_s$ и $\mathbf{H}_s$, а также Q для $\lambda \gg 2\pi a$ и сравнить их с соответствующими выражениями для рассеяния на проводящей сфере.

Таблица сферических векторных гармоник

Решения векторных уравнений Лапласа и Гельмгольца в сферических координатах r, ϑ, φ представляются произведениями амплитудных функций радиуса на одну из следующих трех систем векторных функций углов ϑ и φ : $\mathbf{P}$, $\mathbf{B}$ или $\mathbf{C}$. Эти функции выражаются через скалярные сферические гармоники

$$X_n^m(\vartheta,\varphi)=e^{im\varphi}P_n^m(\cos\vartheta);$$

$$=[\cos m\varphi+i\sin m\varphi]\sin^m\vartheta\,T_{n-m}^m(\cos\theta),\quad m=0,1,2,\ldots,n.$$

Действительную часть векторной функции обозначим индексом e (для четных по φ), а мнимую часть индексом o (для нечетных по φ), т. е.

$$\mathbf{P}_{mn}=\mathbf{P}_{mn}^e+i\mathbf{P}_{mn}^o.$$

Эти функции следующие:

$$\mathbf{P}_{mn}(\vartheta,\varphi)=\mathbf{a}_rX_n^m(\vartheta,\varphi)=$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left[r^{1-n}\operatorname{grad}(r^nX_n^m)-r^{n+2}\operatorname{grad}(r^{-n-1}X_n^m)\right]=$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left\{\frac{1}{2}\mathbf{i}\left[(1-\delta_{0m})(n+m)(n+m-1)X_{n-1}^{m-1}-(1+\delta_{0m})X_{n-1}^{m+1}-\right.\right.$$

$$-(1-\delta_{0m})(n-m+1)(n-m+2)X_{n+1}^{m-1}+(1+\delta_{0m})X_{n+1}^{m+1}\big]+$$

$$+\frac{1}{2}\mathbf{j}\left[(1-\delta_{0m})(n+m)(n+m-1)iX_{n-1}^{m-1}+(1+\delta_{0m})iX_{n-1}^{m+1}-\right.$$

$$-(1-\delta_{0m})(n-m+1)(n-m+2)iX_{n+1}^{m-1}-(1+\delta_{0m})iX_{n+1}^{m+1}\big]+$$

$$\left.+\mathbf{k}\left[(n+m)X_{n-1}^m+(n-m+1)X_{n+1}^m\right]\right\},$$

где $\delta_{mn}=0$ при $m\neq n$ и 1 при $m=n$;

$$\mathbf{B}_{mn}(\vartheta,\varphi)=\frac{r}{\sqrt{n(n+1)}}\operatorname{grad}[X_n^m(\vartheta,\varphi)]=\mathbf{a}_r\times\mathbf{C}_{mn}=$$

$$=\frac{1}{2n+1}\left[\sqrt{\frac{n+1}{n}}\,r^{1-n}\operatorname{grad}(r^nX_n^m)+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\,r^{n+2}\operatorname{grad}(r^{-n-1}X_n^m)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{n(n+1)}}{(2n+1)\sin\vartheta}\left\{\mathbf{a}_\vartheta\left[\frac{n-m+1}{n+1}X_{n+1}^m-\frac{n+m}{n}X_{n-1}^m\right]+\mathbf{a}_\varphi\frac{m(2n+1)}{n(n+1)}iX_n^m\right\}=$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\mathbf{i}}{2n+1}\left\{\sqrt{\frac{n+1}{n}}\left[(1-\delta_{0m})(n+m)(n+m-1)X_{n-1}^{m-1}-(1+\delta_{0m})X_{n-1}^{m+1}\right]+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{n}{n+1}}\left[(1-\delta_{0m})(n-m+1)(n-m+2)X_{n+1}^{m-1}-(1+\delta_{0m})X_{n+1}^{m+1}\right]\right\}+$$