отношения, фигурирующие в (9.4.151), и подставить их в уравнения (9.4.150) и (9.4.149), отбрасывая в последнем все члены, содержащие индекс 2 и более высокие индексы. Мы получим тогда квадратное уравнение для λ, из которого можно найти λ_0 и λ_1. Мы получаем 5,78325 для λ_0 (точное значение 5,78319), в то время как λ_1 получается равным 32,5, что следует сравнить с точным значением 30,471. Нужно включить в уравнение по крайней мере еще один член непрерывной дроби, чтобы получить значение λ_1 с такой же точностью, как и λ_0.

В заключение мы хотели бы отметить еще одно преимущество метода минимизированных итераций. Если мы имеем дело с данным отрезком интегрирования, то для данной весовой функции $\mathcal{M}$ существует только одно семейство ортогональных функций, удовлетворяющих граничным условиям. Если эти функции будут известны заранее, то нет надобности проводить ортогонализацию (9.4.146). Нужно только определить постоянные, на которые нужно умножить каждую из ортогональных функций для того, чтобы было выполнено соотношение (9.4.146).

Задачи к главе 9

9.1. У эллиптической мембраны массы σ на единицу площади, находящейся под натяжением T, жестко закреплен край — эллипс с большой осью a и малой осью b. Показать, что решение уравнения свободных поперечных колебаний этой мембраны можно выразить в виде ряда

$$\psi = \sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn} x^{2m} y^{2n}.$$

Получить вековой определитель, дающий волновое число k, подставляя это выражение в формулу (9.4.71) и выполняя нужные вариации. Получить возмущенное решение для низшего колебания, используя главный член A_{11}. Получить вариационное решение при условии, что в пробную волновую функцию включены только члены A_{11}, A_{02} и A_{20}. Получить оценку снизу из соотношения (9.4.117).

9.2. Частица массы m движется в поле с потенциалом $-V_0 \exp(-\beta r)$, где β и V_0 — постоянные. Показать, что решение уравнения Шредингера для сферически симметричного связанного состояния можно преобразовать к виду $u(x)$, где u — решение уравнения

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (-1 + \lambda e^{-x/2})u = 0; \quad u = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = \infty,$$

а для β взято частное значение. Выбрав в качестве исходной пробной функции $u_0 = e^{-x}$, получить u_1 и u_2 по методу минимизированных итераций, рассматривая параметр λ как собственное значение. Найти λ из получающейся непрерывной дроби. Сравнить ответ с точным значением, данным в § 12.3.

9.3. Однородное электрическое поле E, направленное вдоль оси z, действует на электрический диполь с моментом p, который может только свободно вращаться. Записать уравнение Шредингера в сферических координатах (r, ϑ, φ), где ϑ — угол между осью диполя и осью z. Показать, что если движение не зависит от φ, то уравнение принимает вид

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\psi}{d\mu}\right] + \frac{2I}{\hbar^2}(W + Ep\mu)\psi = 0,$$

где $\mu = \cos\vartheta$, а I — момент инерции. Найти решение уравнения для состояния с минимальной энергией, используя (a) итерационно-пертурбационный метод, (б) вариационно-итерационный метод, начиная с постоянной в качестве исходной пробной функции. Найти две итерации и получить верхнюю и нижнюю границу. Отметим, что в вариационном методе параметром собственного значения является величина Ep. Сравнить результаты обоих методов.

9.4. Плоская звуковая волна падает под углом ϑ на диск радиуса a. Вычислить поперечное сечение рассеяния в длинноволновом приближении (см. в § 10.3 решения соответствующего уравнения Лапласа). Найти давление и вращающий момент, действующие на диск.

9.5. Звуковая волна распространяется вдоль канала, который внезапно меняет поперечное сечение. Канал ограничен следующими четырьмя линиями: $y=a$, положительная полуось x, ось y между $y=0$ и $y=a-b$ и линия $y=a-b$ при $x \leqslant 0$. Мы рассматриваем движения, не зависящие от z. Показать, что при конформном отображении $w=w(\zeta)$, $\zeta=x+iy$, $w=u+iv$ уравнение Гельмгольца переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2}+k^2\left|\frac{\partial\zeta}{\partial w}\right|^2\psi=0.$$

Определить величину $|\partial\zeta/\partial w|$ для отображения ступенчатого канала в канал без ступеньки (см. задачу 10.21). Решить задачу об отражении волны, движущейся в канале в направлении положительной оси x, используя борновское приближение в координатах u, v.

9.6. При расчете задач рассеяния часто желательно получить асимптотическую фазу радиального множителя решения [см. уравнение (9.3.13), § 11.3 и § 12.3]. Предположим, что в такой задаче уравнение для радиального множителя имеет вид

$$\frac{d^2u}{dr^2}+(k^2+\lambda U)\,u=0; \quad u(0)=0; \quad u \to \sin(kr-\eta).$$

Показать, что решение u_+ этого уравнения, которое приближается к e^{ikr} для больших r, удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$u_+(r)=e^{ikr}\left(1-\frac{i\lambda}{2k}\int\limits_r^\infty e^{-ikr_0}U(r_0)u(r_0)dr_0\right)+\frac{i\lambda}{2k}\int\limits_r^\infty e^{ik(r_0-r)}U(r_0)\,u(r_0)\,dr_0.$$

Найти интегральное уравнение для функции $u_-(r)$, которая приближается к e^{-ikr}. Показать, что

$$u=u_-(r)+S(k)\,u_+(r); \quad S(k)=-u_-(0)/u_+(0).$$

Установить связь между S и сдвигом фазы η и показать, что $|S|=1$ для действительных U. Показать, что $S(\alpha)=0$ определяет возможные связанные состояния системы. Вычислить u_+ и u_-, а с ними и S, с точностью до второго порядка по λ для потенциальной ямы, т. е. для потенциала, который постоянен вплоть до точки $r=a$, а после нее равен нулю (используя e^{ikr} как начальное приближение для u_+ и e^{-ikr} для u_-). Сравнить с фредгольмовским решением.

9.7. Показать, что вариационный интеграл (9.4.61) для $\operatorname{ctg}\eta_0$ переходит в случае малых k в интеграл

$$k\operatorname{ctg}\eta_0=\left[\int\limits_0^\infty Uu_0^2dr-2\int\limits_0^\infty Uu_0\int\limits_0^{r_0} rUu_0drdr_0\right]\Big/\left[\int\limits_0^\infty Uu_0rdr\right]^2.$$

Подставить пробную функцию $\alpha+\beta r$ в это выражение. U — притягивающий потенциал, имеющий постоянную глубину λ вплоть до радиуса a и равный нулю при $r > a$. Определить α, β и, наконец, $k \operatorname{ctg} \eta_0$ по вариационному методу.

9.8. Радиальное уравнение Шредингера для частицы с угловым моментом l имеет вид

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\left[k^2+U(r)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]u=0,$$

$$u(0)=0, \quad u \simeq \cos\left[kr-\frac{1}{2}(l+1)\pi-\eta\right] \text{ при } r \to \infty.$$

Показать, что функция

$$y(r)=u(r)+w_1 \operatorname{ctg}\eta - w_{2\infty}, \quad w_1=krj_l(kr), \quad w_{2\infty}=\cos\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right),$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2y}{dr^2}+k^2y-\frac{l(l+1)}{r^2}(y+w_{2\infty})+U(y-w_1\operatorname{ctg}\eta+w_{2\infty})=0,$$

$$y(0)=w_{2\infty}(0)+\text{члены порядка } r^{l+1}, \quad y(\infty)=0.$$

Показать, что можно вывести вариационный принцип для $k\operatorname{ctg}\eta$:

$$[k\operatorname{ctg}\eta]=\int_0^\infty\left\{\left(\frac{dy}{dr}\right)^2-k^2y^2+\frac{l(l+1)}{r^2}(y+w_{2\infty})^2+U(y-w_1\operatorname{ctg}\eta+w_{2\infty})^2\right\}dr.$$

Это можно переписать в виде

$$A(k\operatorname{ctg}\eta)^2-2B(k\operatorname{ctg}\eta)+C=0.$$

Показать, что вариационный принцип, эквивалентный написанному выше, выражается формулой

$$[k\operatorname{ctg}\eta]=(B+\sqrt{B^2-AC})/A.$$

Определить A, B и C.

9.9. Плоская волна с волновым числом k падает на бесконечный жесткий цилиндр радиуса a. Показать, что в пределе при $ka \gg 1$

$$\psi=0 \text{ на затененной стороне цилиндра,}$$
$$\psi=2\psi_i \text{ на освещенной стороне цилиндра,}$$

где ψ_i — падающая волна. Доказать, что точное выражение для амплитуды рассеяния дается формулой

$$|f(\varphi)|^2=\frac{1}{8\pi k}\left|\int e^{-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r}}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial n}-i\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{n}\psi_s\right)ds\right|^2,$$

где ψ_s — рассеянная волна. Подставить указанное коротковолновое приближение в интеграл. Показать, что интеграл по тени цилиндра дает вклад

$$\frac{ka^2}{2\pi}\cos^2\frac{\varphi}{2}\,\frac{\sin^2(ka\sin\varphi)}{k^2a^2\sin^2(\varphi/2)}.$$

Приближенно вычислить интеграл по освещенной стороне. Его вклад в поперечное сечение равен

$$\frac{a}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+\text{быстро осциллирующие члены.}$$

Показать, что полное поперечное сечение равно $4a$. Проанализировать результаты.

9.10. Частица массы m движется в притягивающем сферическом потенциальном поле $U = -V_0 \exp[-(r/a)^2]$. Использовать для вычисления сдвига фазы для $l=0$ пробную функцию $\sin \varkappa r$ (считая $\varkappa$ вариационным параметром) в вариационном принципе (9.4.61). Сравнить результат по порядку величины ka с борновским приближением для V_0, удовлетворяющим условию

$$2mV_0 a^2/\hbar^2 = \frac{1}{4}\pi^2.$$

9.11. В дифференциальном уравнении

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + a^2 q(x)\psi = 0, \quad q = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \quad a_1 \neq 0,$$

произвести замену независимой переменной на $z = \int\limits_0^x \sqrt{q(x)}\,dx$ и ввести функции

$$Q = q^{-1/4}\frac{d^2 q^{1/4}}{dz^2} = -\left(\frac{5}{36z^2} + \lambda z^{-2/3} + \lambda_0 + \lambda_1 z^{2/3} + \ldots\right)$$

и

$$Q_1(z) = \int\limits_0^z Q(y)\,dy.$$

Показать, что два решения уравнения для ψ выражаются приближенно формулами

$$\psi_{1,2} \simeq q^{-1/4}\exp\left[\pm i\left(az - \frac{Q_1}{2a} \mp \frac{i}{4a^2 Q}\right)\right], \quad z \neq 0,$$

$$\psi_{1,2} \simeq \sqrt{\frac{1}{2}\pi a}\, i^{\pm 5/6}\left\{\exp \mp \left[\frac{1}{2ia}\int\limits_0^\infty \left(Q + \frac{5}{36z^2}\right)dz\right]\right\} z^{1/6}\zeta H_{1/3}^{(1,2)}(\eta),$$

где

$$\zeta = \sqrt{z^{2/3} + \lambda\varkappa^{-2} - \frac{1}{5}\lambda_1\varkappa^{-2}\xi^2}, \quad \eta = \varkappa\left(\xi + \frac{1}{5}\lambda_1\varkappa^{-2}\xi^2\right)^{3/2},$$

$$\varkappa^2 = a^2 + \lambda_0, \quad \xi = z^{2/3} + \lambda\varkappa^{-2}.$$

Применить эти формулы к функции Ганкеля $H_p(p \sec \lambda)$.

Таблица приближенных методов

Связанные состояния. Объемные возмущения. Уравнение, подлежащее решению:

$$\nabla^2\psi + (k^2 - U_0 - \lambda U)\psi = 0.$$

Невозмущенная задача $\nabla^2\varphi_n + (k_n^2 - U_0)\varphi_n = 0$, которая может быть решена точно, имеет собственные функции φ_n и собственные значения k_n^2 (предполагаемые здесь невырожденными; об эффектах вырождения см. стр. 623). Различные приближенные ряды для ψ содержат матричные элементы возмущающего потенциала

$$U_{mn} = \int \ldots \int \bar{\varphi}_m U \varphi_n dx_1 \ldots dx_N.$$