Упражнение 1.2. Угловой диаметр Солнца составляет 30′. Примем, что из-за влияния земной атмосферы предельное разрешение равно 1″. Показать, что это ограничивает снизу то значение μ, до которого можно точно получить $I(\mu)$, и определить это $\mu_{\min}$.

1.2. Средняя интенсивность и плотность излучения

МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Как при физическом, так и при математическом описании поля излучения удобно использовать различные угловые средние, или *моменты*. Так, *средняя интенсивность* определяется как прямое среднее (момент нулевого порядка) от удельной интенсивности по всем телесным углам, т.е.

$$J(\mathbf{r}, \nu, t) = (4\pi)^{-1} \oint I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) d\omega. \tag{1.4}$$

Размерность средней интенсивности — эрг/(см^2 · с · Гц). Элемент телесного угла $d\omega$ равен $d\omega = \sin\theta d\theta d\phi = -d\mu d\phi$. Если рассматриваются одномерные атмосферы, то I не зависит от ϕ, и поэтому

$$J(z, \nu, t) = (4\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^{1} d\mu I(z, \mu, \nu, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I(z, \mu, \nu, t) d\mu. \tag{1.5}$$

Это выражение применимо и при сферической геометрии, если заменить z на r.

Чтобы рассчитать *плотность энергии* поля излучения в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$, рассмотрим малый объем V, через который со всех сторон протекает энергия. Количество энергии, протекающей в пределах некоторого телесного угла $d\omega$ через элемент площади поверхности dS этого объема, равно

$$\delta\mathscr{E} = I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)(dS \cos\theta) d\omega d\nu dt.$$

Будем рассматривать теперь только те фотоны, которые имеются в объеме V. Если длина их пути через V равна l, то время, в течение которого они находятся в пределах V, есть $dt = l/c$. Далее, $l dS \cos\theta = dV$, где dV — бесконечно малый элемент объема V, через который пролетают фотоны. Поэтому энергия в dV, приходящая в пределах телесного угла $d\omega$, равна

$$\delta\mathscr{E} = c^{-1} I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) d\omega d\nu dV.$$

Интегрируя по всем телесным углам и по всему объему, получаем полную энергию, содержащуюся в объеме V:

$$\mathscr{E}(\mathbf{r}, \nu, t)d\nu = c^{-1}\left[\int_V dV \oint d\omega I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)\right]d\nu. \tag{1.6}$$

Если теперь перейти к предельному случаю бесконечно малого V, то I перестает зависеть от положения в объеме V, и интегрирования по объему и по углам можно выполнить по отдельности. *Монохроматическая плотность энергии излучения* $E_R(\mathbf{r}, \nu, t) = \mathscr{E}(\mathbf{r}, \nu, t)/V$ равна, таким образом,

$$E_R(\mathbf{r}, \nu, t) = c^{-1}\oint I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)d\omega \equiv \frac{4\pi}{c} J(\mathbf{r}, \nu, t). \tag{1.7}$$

Размерность E_R — эрг/см^3 · Гц. Полная плотность энергии излучения (размерность эрг/см^3) находится интегрированием по всем частотам:

$$\mathrm{E}_R(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty E_R(\mathbf{r}, \nu, t)d\nu = (4\pi/c)\int_0^\infty J(\mathbf{r}, \nu, t)d\nu \equiv (4\pi/c)J(\mathbf{r}, t). \tag{1.8}$$

ОПИСАНИЕ В ТЕРМИНАХ ФОТОННОГО ГАЗА

Легко показать, что полученные выше результаты согласуются с описанием поля излучения как фотонного газа. По определению $f_R(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)d\nu d\omega$ — это число фотонов в единице объема в интервале частот $d\nu$, обладающих энергией $h\nu$ и распространяющихся в направлении $\mathbf{n}$ в элементе телесного угла $d\omega$. Ясно, что плотность энергии — это просто число фотонов, умноженное на энергию одного фотона и проинтегрированное по всем телесным углам, т.е.

$$E_R(\mathbf{r}, \nu, t) = h\nu\oint f_R(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)d\omega. \tag{1.9}$$

Но, согласно формуле (1.2), $h\nu f_R = c^{-1}I$. Поэтому формула (1.9) тождественна формуле (1.7).

РАВНОВЕСНОЕ ЗНАЧЕНИЕ

При *термодинамическом равновесии* поле излучения в теплоизолированной полости однородно, изотропно, не зависит от времени и имеет распределение по частотам, даваемое *функцией Планка*

$$B_\nu(T) = (2h\nu^3/c^2)/(e^{h\nu/kT} - 1)$$

(см. [520], [392], стр. 365). Поэтому при термодинамическом равновесии монохроматическая плотность энергии излучения равна $E_R^*(\nu) = (4\pi/c)B_\nu(T)$. а полная плотность энергии излучения дается *законом Стефана*:

$$E_R^* = (8\pi h/c^3)\int_0^\infty (e^{h\nu/kT} - 1)^{-1}\nu^3 d\nu = a_R T^4, \tag{1.10}$$

где $a_R = 8\pi^5 k^4/(15c^3h^3)$. Здесь, как и всюду в этой книге, величины, вычисленные по соотношениям, справедливым при термодинамическом равновесии, отмечены звездочкой.

Упражнение 1.3. С помощью подстановки $x = h\nu/kT$ вывести закон Стефана, разложив $(e^x - 1)^{-1} = e^{-x}(1 - e^{-x})^{-1}$ в ряд по степеням e^{-x}. Сумма числового ряда, получающегося почленным интегрированием степенного ряда, выражается через дзета-функцию Римана [4], стр. 807.

Закон Стефана применим в недрах звезд и в глубоких слоях звездных атмосфер, где перепады температуры на расстоянии, равном средней длине свободного пробега фотона, чрезвычайно малы, так что поле излучения становится изотропным и термализуется, приближаясь к равновесному. У поверхности звезды поле излучения становится сильно анизотропным и приобретает распределение по частотам, сильно отличающееся от планковского, вследствие крутых градиентов температуры и наличия свободной границы, через которую фотоны уходят в межзвездное пространство. Здесь закон Стефана уже неприменим.

ОПИСАНИЕ В ТЕРМИНАХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Альтернативное описание поля излучения дается электромагнитной теорией. Покажем, каким путем между макроскопическим и электромагнитным описаниями поля излучения можно установить полное взаимное соответствие. Электромагнитное поле описывается *уравнениями Максвелла* (см., например, [331], гл. 6), которые в гауссовых единицах имеют вид

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \tag{1.11а}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{1.11б}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = 0, \tag{1.11в}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{1.11г}$$

Напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ связана с *электрической индукцией* $\mathbf{D}$ через посредство *диэлектрической постоянной* ε, а именно $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$. Аналогичным образом *магнитная индукция* $\mathbf{B}$ выражается через *напряженность магнитного поля* $\mathbf{H}$ и *магнитную проницаемость* μ соотношением $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$. В вакууме $\varepsilon = \mu = 1$. В уравнениях (1.11) ρ — *плотность заряда* и $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$ — *плотность тока*, порождаемого зарядами, движущимися со скоростью $\mathbf{v}$. Напряженность электрического поля и магнитную индукцию можно найти, зная скалярный потенциал ϕ и векторный потенциал $\mathbf{A}$, которые определяются следующим образом:

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}, \tag{1.12а}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{1.12б}$$

Величина $\mathbf{B}$, даваемая (1.12а), удовлетворяет уравнению (1.11б), а $\mathbf{E}$ из (1.12б) — уравнению (1.11в). Поскольку $\mathbf{B}$ вводится как *ротор* $\mathbf{A}$, дивергенцию $\mathbf{A}$ можно задать произвольно. Удобно выбрать ее, наложив *условие Лоренца*

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}. \tag{1.13}$$

При таком выборе $\mathbf{A}$ уравнения Максвелла сводятся к

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \tag{1.14а}$$

и

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}. \tag{1.14б}$$

Решения этих уравнений можно записать в виде (см. [331], гл. 6; [494], гл. 19)

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \tag{1.15а}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\int \frac{\rho(\mathbf{r}', t')\mathbf{v}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r', \tag{1.15б}$$

где, как указано, ρ и $\mathbf{v}$ в $\mathbf{r}'$ берутся с учетом запаздывания, т.е.

$t' = t - c^{-1}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Этим учитывается конечность скорости распространения электромагнитных волн.

Одно из наиболее важных решений уравнений Максвелла — решение, описывающее *монохроматические плоские волны в вакууме*, распространяющиеся в направлении $\mathbf{n}_0$ со скоростью c:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos[2\pi(k\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r} - \nu t)], \tag{1.16а}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 \cos[2\pi(k\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r} - \nu t)], \tag{1.16б}$$

где $k = \lambda^{-1} = \nu/c$ — волновое число. Векторы $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{n}_0$ образуют взаимно ортогональную тройку, причем $\mathbf{H}_0 = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_0$, откуда следует, что $|\mathbf{H}_0| = |\mathbf{E}_0|$. Выражение, даваемое электромагнитной теорией для мгновенной плотности энергии поля $W(t)$, имеет вид

$$W(t) = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})/8\pi. \tag{1.17}$$

Усреднение по промежутку времени, равному периоду, приводит к появлению множителя $\langle \cos^2 \omega t \rangle_T = 1/2$. Пользуясь соотношениями $|\mathbf{E}_0| = |\mathbf{H}_0|$ и $\mu = \varepsilon = 1$ (в вакууме), приводим (1.17) к виду

$$W = \langle W(t) \rangle_T = E_0^2/8\pi.$$

Если использовать макроскопическое описание, то монохроматическая плоская волна, распространяющаяся в направлении $\mathbf{n}_0$, определяемом углами (θ_0, ϕ_0), имеет интенсивность

$$I(\mu, \phi) = I_0 \delta(\mu - \mu_0) \delta(\phi - \phi_0),$$

где через δ обозначена обычная дельта-функция Дирака. Подставляя это выражение для $I(\mu, \phi)$ в формулу (1.7), для плотности энергии получаем $E_R = c^{-1} I_0$ — результат, интуитивно очевидный для плоской волны, распространяющейся со скоростью c. Следовательно, чтобы получить соответствие между двумя способами описания, следует положить

$$I_0 = cE_0^2/8\pi. \tag{1.18}$$

Ниже будет показано, что такой выбор I_0 приводит к правильным соотношениям между вектором Пойнтинга и тензором напряжений Максвелла и величинами, соответствующими им при макроскопическом описании. Полученные выше результаты применимы, строго говоря, только к монохроматической плоской волне, но их легко обобщить на поля, имеющие произвольную угловую и частотную зависимость, произведя суммирование соответствующим образом выбранных элементарных плоских волн.