1.3. Поток

МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Определим *поток* излучения $\bar{\mathscr{F}}(\mathbf{r}, \nu, t)$ как такую *векторную* величину, что $\bar{\mathscr{F}} \cdot \mathbf{dS}$ дает тот эффективный *темп, с которым лучистая энергия протекает* через произвольно ориентированную площадку $\mathbf{dS}$; иными словами, $\bar{\mathscr{F}} \cdot \mathbf{dS}$ — это лучистая энергия, протекающая через $\mathbf{dS}$ за единицу времени в единичном интервале частот. Заметим, что $\mathbf{n} \cdot \mathbf{dS} = dS \cos\theta$, где θ — угол между направлением распространения излучения $\mathbf{n}$ и нормалью к $\mathbf{dS}$. Отсюда немедленно обнаруживаем, что поток можно выразить через удельную интенсивность, если воспользоваться формулой (1.1), так как фигурирующая в ней величина $\delta \mathscr{E}$ есть не что иное, как вклад пучка излучения, распространяющегося в направлении $\mathbf{n}$, в общий поток энергии. Поэтому достаточно лишь произвести суммирование по всем телесным углам, что дает

$$\bar{\mathscr{F}}(\mathbf{r}, \nu, t) = \oint I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)\mathbf{n} d\omega. \tag{1.19}$$

Размерность потока — эрг/(см^2 · с · Гц).

В декартовых координатах будем иметь

$$(\bar{\mathscr{F}}_x, \bar{\mathscr{F}}_y, \bar{\mathscr{F}}_z) = (\oint I n_x d\omega, \oint I n_y d\omega, \oint I n_z d\omega), \tag{1.20}$$

где

$$d\omega = -d\mu d\phi, \; n_x = (1 - \mu^2)^{1/2} \cos\phi, \; n_y = (1 - \mu^2)^{1/2} \sin\phi, \; n_z = \mu.$$

Если поле излучения зависит только от z и от μ, то ясно, что энергия, переносимая противоположно направленными лучами через площадку, нормаль к которой перпендикулярна к оси z, взаимно компенсируется, и поэтому поток через эту площадку тождественно равен нулю. В частности, в плоской атмосфере, однородной в направлениях x и y, отличаться от нуля может только $\bar{\mathscr{F}}_z$. Поэтому нам нужен будет только этот компонент потока, и мы будем называть его просто *потоком*, как если бы поток был скалярной величиной, и писать

$$\mathscr{F}(z, \nu, t) = 2\pi \int_{-1}^{1} I(z, \mu, \nu, t)\mu d\mu. \tag{1.21}$$

Таким образом, $\mathscr{F}$ является первым моментом интенсивности по угловой переменной.

Упражнение 1.4. а) Показать, что если в атмосфере интенсивность I не зависит от азимута ϕ, то потоки $\mathscr{F}_x$ и $\mathscr{F}_y$ равны нулю. б) Показать, что в сферически симметричной атмосфере лишь компонент $\mathscr{F}_r$ отличен от нуля и дается формулой (1.21) с заменой z на r. в) Вычислить $\mathscr{F}$ при $I(\mu) = \sum I_n \mu^n$. Показать, что вклад в $\mathscr{F}$ дают только члены нечетного порядка.

В астрофизике принято избавляться от множителя π, входящего в формулу (1.21), вводя *астрофизический поток*

$$F(z, \nu, t) \equiv \pi^{-1} \mathscr{F}(z, \nu, t).$$

Кроме того, если рассматривать поток как один из членов последовательности моментов по μ, то можно ввести *эддингтоновский поток*

$$H(z, \nu, t) \equiv (4\pi)^{-1} \mathscr{F}(z, \nu, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I(z, \mu, \nu, t) \mu d\mu, \tag{1.22}$$

выражение для которого по форме аналогично выражению (1.5) для средней интенсивности.

ПОТОК ЭНЕРГИИ В ТЕРМИНАХ ФОТОННОГО ГАЗА

Те же выражения для потока энергии можно получить, исходя из описания поля излучения как фотонного газа. Разность чисел фотонов, пролетающих со скоростью c сверху и снизу через единичную площадку, расположенную под углом θ к лучу, за единицу времени равна, очевидно,

$$N(\mathbf{r}, \nu, t) = c \oint f_R(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) \cos\theta d\omega. \tag{1.23}$$

Каждый фотон имеет энергию $h\nu$, и поэтому переносимая ими энергия должна равняться

$$\bar{\mathscr{F}}(\mathbf{r}, \nu, t) = ch\nu \oint f_R(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) \mathbf{n} d\omega. \tag{1.24}$$

Если учесть соотношения (1.2), становится очевидным, что выражение (1.24) тождественно (1.19).

Далее, фотоны с энергией $h\nu$, движущиеся в направлении $\mathbf{n}$, обладают импульсом $h\nu\mathbf{n}/c$. Поэтому выражение $c^{-1}\bar{\mathscr{F}} \cdot \mathbf{dS}dt$ есть импульс, переносимый через площадку dS за время dt частицами, движущимися со скоростью c. Отсюда следует, что *плотность импульса*, связанного с полем излучения, равна $\mathbf{G}_R = c^{-2}\bar{\mathscr{F}}$. Дальнейшее обсуждение смысла этого результата дается в § 2.3, а в § 14.3 этот результат будет использован.

Упражнение 1.5. Проверить утверждение, что $c^{-2}\vec{\mathscr{F}}$ представляет собой плотность импульса; убедиться в правильности размерности.

ВЕКТОР ПОЙНТИНГА

В теории электромагнитного поля поток энергии поля дается *вектором Пойнтинга*

$$\mathbf{S} = (c/4\pi)(\mathbf{E} \times \mathbf{H}). \tag{1.25}$$

Если взять, как и в § 1.2, плоскую волну, то среднее по периоду равно

$$\langle \mathbf{S} \rangle_T = c\langle \mathbf{E} \times \mathbf{H} \rangle_T/4\pi = (c\langle E^2 \rangle_T \mathbf{n}_0)/4\pi = cE_0^2\mathbf{n}_0/8\pi.$$

С другой стороны, если пользоваться макроскопическим представлением, то поток, обусловленный плоской волной, равен

$$\vec{\mathscr{F}} = \int I\mathbf{n}\,d\omega = \oint I_0\delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)\mathbf{n}\,d\omega = I_0\mathbf{n}_0. \tag{1.26}$$

Если теперь воспользоваться формулой (1.18), то становится ясно, что поток $\vec{\mathscr{F}}$, определенный формулой (1.26), тождествен $\langle \mathbf{S} \rangle_T$. Этот результат также можно обобщить на случай поля излучения с произвольным распределением по углам и по частотам.

АСТРОНОМИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

Энергию, приходящую от звезды к удаленному наблюдателю, можно непосредственно выразить через поток $\mathscr{F}_\nu$, выходящий с поверхности звезды. Предположим, что расстояние D от звезды до наблюдателя много больше радиуса звезды r_*, так что все лучи, идущие от звезды к наблюдателю, можно считать параллельными. Энергия, получаемая единичной площадкой, перпендикулярной к лучу зрения, от бесконечно малой площадки на поверхности звезды, равна $d\ell_\nu = I_\nu d\omega$, где $d\omega$ — телесный угол, под которым видна эта площадка, и I_ν — удельная интенсивность излучения, выходящего с поверхности звезды. С учетом геометрических соображений, иллюстрируемых рис. 1.3, находим, что $r = r_* \sin\theta$, и поэтому площадь бесконечно тонкого кольца на диске звезды равна $dS = 2\pi r dr = 2\pi r_*^2 \mu d\mu$, так что $d\omega = 2\pi(r_*/D)^2\mu d\mu$. Излучение, ис-

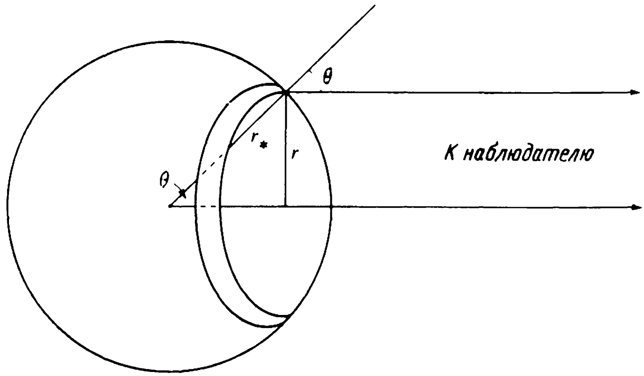

Рис. 1.3. Геометрическая схема, поясняющая измерение потока излучения от звезды. Круговое кольцо на поверхности звезды имеет в проекции на нормаль к лучу зрения площадь $dS = 2\pi r dr = 2\pi r_*^2 \sin\theta \cos\theta d\theta$. Наблюдатель видит эту площадь под телесным углом $d\omega = dS/D^2$.

пускаемое этим кольцом в направлении наблюдателя, выходит под углом θ к нормали, так что соответствующее значение удельной интенсивности будет $I(r_*, \mu, \nu)$. Интегрируя по диску, находим

$$f_\nu = 2\pi(r_*/D)^2\int_0^1 I(r_*, \mu, \nu)\mu d\mu =$$

$$= (r_*/D)^2\mathcal{F}(r_*, \nu) = \alpha_*^2\mathcal{F}(r_*, \nu)/4, \quad (1.27)$$

где α_* — *угловой диаметр* звезды. [В приведенном расчете принималось, что излучение на поверхность звезды извне не падает, т.е. $I(r_*, -\mu, \nu) = 0$.] От *точечных* объектов (например, звезд) можно измерить лишь поток. Поступающая энергия убывает обратно пропорционально квадрату расстояния (поскольку телесный угол, под которым виден диск звезды, изменяется пропорционально D^{-2}). Если угловой диаметр известен, то абсолютный поток, измеренный на Земле, можно пересчитать в абсолютный поток на поверхности звезды.

Упражнение 1.6. Показать, что поток, выходящий через малое отверстие из адиабатической полости (абсолютно черное тело), равен $\mathcal{F}_{BB}(\nu) = \pi B_\nu(T)$. Показать, что *интегральный* поток равен $\mathcal{F}_{BB} = \sigma_R T^4$, где

$$\sigma_R = (c/4)a_R = 2\pi^5 k^4/(15h^3c^3) = 5{,}67 \cdot 10^{-5} \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{К}^4)$$

— *постоянная Стефана.*
