1.4. Тензор давления излучения

МАКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И ПЕРЕНОС ИМПУЛЬСА В ФОТОННОМ ГАЗЕ

Средняя интенсивность и поток представляет собой скалярную и векторную величины, даваемые соответственно нулевым и первым моментами удельной интенсивности по направляющим косинусам углов между направлением распространения и осями координат. *Второй момент* дает тензорную величину, которая представляет собой *тензор давления излучения* (или *тензор напряжений поля излучения*):

$$\mathrm{P}(\mathbf{r}, \nu, t) = c^{-1}\oint I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)\mathbf{n}\,\mathbf{n}d\omega, \tag{1.28}$$

или в компонентах

$$P_{ij}(\mathbf{r}, \nu, t) = c^{-1}\oint I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)n_i n_j d\omega. \tag{1.29}$$

Размерность P есть эрг/(см^3 · Гц). Очевидно, что P — симметричный тензор, т.е. $P_{ij} = P_{ji}$.

Физическая интерпретация P непосредственно следует из описания поля излучения как фотонного газа. Действительно, переходя от удельной интенсивности к функции распределения фотонов f_R с помощью соотношения (1.2), мы видим, что

$$P_{ij}(\mathbf{r}, \nu, t) = \oint [f_R(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)cn_i] \times (h\nu n_j/c)d\omega. \tag{1.30}$$

Приведенное выражение дает, очевидно, поток импульса в j-м направлении на единицу времени, обусловленный излучением частоты ν, через единичную площадку, ориентированную перпендикулярно i-му направлению. Это в точности соответствует определению давления в любой сплошной среде и тем самым оправдывает использование термина «давление излучения».

Среднее арифметическое диагональных компонентов P можно использовать, чтобы ввести *среднее давление излучения*:

$$\bar{P} = \frac{1}{3}(P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}). \tag{1.31}$$

Поскольку для любого единичного вектора $\mathbf{n}$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1,$$

то

$$P(\mathbf{r}, \nu, t) = (3c)^{-1}\oint I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)d\omega = E_R(\mathbf{r}, \nu, t)/3. \tag{1.32}$$

Однако следует подчеркнуть, что, несмотря на общность этого результата, $\bar{P}$ *не дает* истинного давления излучения, если только поле излучения не является *изотропным*. Вообще говоря, поле излучения в звездных атмосферах далеко от изотропного, и обычно численный множитель, связывающий p_R (скалярный параметр, который можно использовать для расчета сил лучевого давления) и плотность энергии E_R, превосходит 1/3 (см. ниже).

СВЯЗЬ ТЕНЗОРА ДАВЛЕНИЯ С ОБЪЕМНЫМИ СИЛАМИ

Изучим теперь связь между тензором давления излучения и объемными силами, вызываемыми полем излучения. Рассмотрим элемент площади dS. Поток i-го компонента импульса поля излучения в единицу времени через этот элемент равен $\sum_j P_{ij}n_j dS$, где n_j — направляющие косинусы нормали к dS. Интегрируя эту величину по замкнутой поверхности S и применяя теорему Гаусса, находим

$$\oint_S \sum_j P_{ij}n_j dS = \int_V \sum_j (\partial P_{ij}/\partial x_j)dV = \int_V (\nabla \cdot \mathrm{P})_i dV, \tag{1.33}$$

где V — объем, охватываемый поверхностью S. Интеграл в левой части дает поток i-го компонента импульса за единицу времени через поверхность S. Тогда, рассматривая интеграл, стоящий справа, мы видим, что величина $(\nabla \cdot \mathrm{P})_i$ должна представлять собой скорость убывания i-го компонента плотности импульса, т.е. $c^{-2}(\partial\vec{\mathscr{F}}/\partial t)_i$.

Итак, для *поля излучения как такового* (т.е. в отсутствие поглощающего и излучающего вещества) будем иметь

$$\partial \mathbf{G}_R/\partial t = c^{-2}[\partial\vec{\mathscr{F}}(\mathbf{r}, \nu, t)/\partial t] = -\nabla \cdot \mathrm{P}(\mathbf{r}, \nu, t). \tag{1.34}$$

Уравнение (1.34), по существу, совпадает с обычным гидродинамическим уравнением движения для идеальной жидкости в отсутствие внешних сил (см. § 15.1). В § 2.3 дается обобщение этого результата, позволяющее учесть взаимодействие с веществом.

ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

В электромагнитной теории напряжения электромагнитного поля описываются *тензором напряжений Максвелла*, который определяется следующим образом:

$$\partial \mathbf{G}_{em}/\partial t = \nabla \cdot \mathrm{T}^{\mathrm{M}}. \qquad (1.35)$$

Здесь $\mathbf{G}_{em}$ — плотность импульса, связанная с электромагнитным полем. Компоненты T^M равны

$$T_{ij}^M = [E_iE_j + H_iH_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}(E^2 + H^2)]/4\pi, \qquad (1.36)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Сравнивая формулы (1.34) и (1.35), видим, что тензор напряжений Максвелла должен равняться взятому с обратным знаком тензору давления излучения. Поучительно проверить это заключение путем прямой выкладки.

Рассмотрим плоскую волну, распространяющуюся в направлении $\mathbf{n}_0$. Согласно макроскопическому определению давления излучения, имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= c^{-1}\oint I\mathbf{n}\mathbf{n}d\omega = c^{-1}I_0\oint\delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0)\mathbf{n}\mathbf{n}d\omega = \\ &= c^{-1}I_0\mathbf{n}_0\mathbf{n}_0 = (E_0^2/8\pi)\mathbf{n}_0\mathbf{n}_0, \end{aligned} \qquad (1.37)$$

что должно равняться T^M для плоской волны. Пусть имеется электромагнитное поле, которое характеризуется направленным вдоль $\mathbf{n}_0$ вектором Пойнтинга $\mathbf{S}$. Помимо задания θ_0, ϕ_0 нам нужно описать также поляризацию волны, фиксировав угол ψ_0 (рис. 1.4). Угол ψ_0 показывает, насколько $\mathbf{E}$ повернуто относительно $\mathbf{S}$, причем $\psi_0 = 0$, когда $\mathbf{S}$ лежит в плоскости, проходящей через $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{k}$, где $\mathbf{k}$ — единичный вектор оси z. Легко видеть, что

$$E_x = E_0(\sin\psi_0\sin\phi_0 - \cos\psi_0\cos\phi_0\cos\theta_0), \qquad (1.38а)$$

$$E_y = -E_0(\sin\psi_0\cos\phi_0 + \cos\psi_0\sin\phi_0\cos\theta_0), \qquad (1.38б)$$

$$E_z = E_0\cos\psi_0\sin\theta_0. \qquad (1.38в)$$

Упражнение 1.7. Вывести для H_x, H_y, H_z выражения, аналогичные соотношениям (1.38).

Подстановка выражений (1.38) и соответствующих формул для

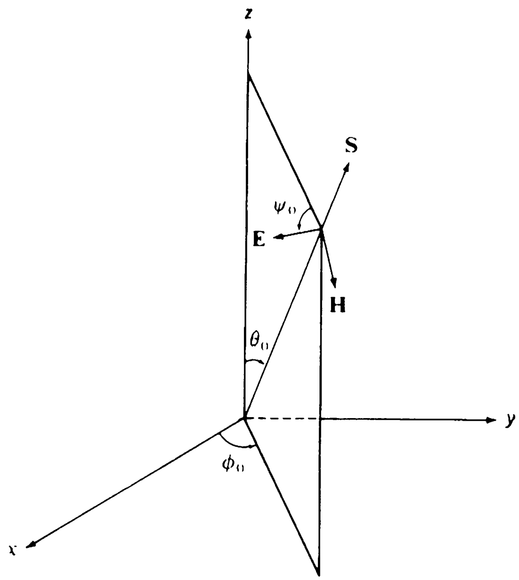

Рис. 1.4. Плоская электромагнитная волна, характеризуемая векторами **E** и **H**, распространяется по вектору Пойнтинга S в направлении $\mathbf{n}_0$. Угол ψ_0 характеризует, насколько **E** повернуто вокруг **S** относительно плоскости, определяемой $\mathbf{n}_0$ и **k**, где **k** — единичный вектор оси z.

H в (1.36) дает компоненты T^M. Например, для T^M_{zz} находим

$$T^M_{zz} = [E^2_z + H^2_z - \frac{1}{2}(E^2 + H^2)]/4\pi =$$

$$= E^2_0(\sin^2\theta_0 - 1)/4\pi = -E^2_0\cos^2\theta_0/4\pi. \qquad (1.39)$$

Усреднение по времени дает $\langle T^M_{zz}\rangle_T = -(E^2_0/8\pi)\cos^2\theta_0$, т.е. $-P_{zz}$. Отметим, что конечный результат не зависит от ψ_0.

Упражнение 1.8. Вычислить остальные компоненты T^M и показать, что $\mathrm{T}^M = -\mathrm{P}$ независимо от ψ_0.

Приведенные результаты показывают, что между электромагнитной теорией и макроскопическим описанием поля излучения или описанием его как фотонного газа существует полное соответствие. Это соответствие окажется для нас полезным. Оно найдет применение в § 14.3 и 15.3, где мы воспользуемся тем, что параметры электромагнитного поля изменяются при преобразовании Лоренца известным образом, и установим, как при этом преобразуются величины, соответствуюшие этим параметрам поля при макроскопическом описании поля излучения.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ: СИММЕТРИЯ, ИЗОТРОПИЯ, РАВНОВЕСИЕ. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ

В одномерной (плоской или сферически-симметричной) атмосфере поле излучения не зависит от азимута. Поэтому тензор давления становится диагональным:

$$\mathsf{P}(\mathbf{r}, \nu, t) = \begin{pmatrix} p_R & 0 & 0 \\ 0 & p_R & 0 \\ 0 & 0 & p_R \end{pmatrix} - \\ - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3p_R - E_R & 0 & 0 \\ 0 & 3p_R - E_R & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.40)$$

где

$$p_R(z, \nu, t) \equiv (4\pi/c)K(z, \nu, t), \quad (1.41)$$

а K — второй эддингтоновский момент интенсивности:

$$K(z, \nu, t) \equiv \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(z, \mu, \nu, t)\mu^2 d\mu. \quad (1.42)$$

Упражнение 1.9. а) При сформулированных выше условиях вывести выражение (1.40). б) Показать, что при сферической симметрии получается такое же выражение для P, если использовать тройку взаимно перпендикулярных ортов $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$. в) Проверить, что тензор (1.40) удовлетворяет соотношению (1.32).

Из формулы (1.40) ясно, что в случае одномерной атмосферы для задания полного тензора давления излучения достаточно двух скалярных величин: p_R и E_R. Далее, для таких атмосфер производные по x, y или по θ, ϕ соответственно в плоском и сферическом случаях тождественно равны нулю, и единственными ненулевыми компонентами дивергенции тензора давления излучения являются в случае плоской геометрии

$$(\nabla \cdot \mathsf{P})_z = \partial p_R(z, \nu, t)/\partial z, \quad (1.43а)$$

а при сферической геометрии

$$(\nabla \cdot \mathrm{P})_r = \partial p_R(r, \nu, t)/\partial r + [3p_R(r, \nu, t) - E_R(r, \nu, t)]/r. \qquad (1.43б)$$

В этой книге мы ограничимся рассмотрением лишь одномерных задач, и если не считать приведенного в § 15.3 изложения вопроса об уравнениях радиационной гидродинамики, полное тензорное описание поля излучения не потребуется. Поэтому в дальнейшем для краткости скалярную величину p_R будем называть просто давлением излучения.

Упражнение 1.10. Показать, что для произвольного диагонального тензора A в сферических координатах

$$(\nabla \cdot \mathrm{A})_r = \partial A_{rr}/\partial r + (2A_{rr} - A_{\theta\theta} - A_{\phi\phi})/r.$$

Пользуясь этим соотношением, вывести выражение (1.43б).

В общем случае величина p_R, определенная соотношением (1.41), *не равна* $\bar{P}$, даваемому (1.32), но если поле излучения изотропно, то эти две величины равны. Для изотропного поля интенсивность I не зависит от μ, и формулы (1.7) и (1.41) немедленно дают $p_R = E_R/3$, так что выражение (1.40) приводится к виду

$$\mathrm{P}(\mathbf{r}, \nu, t) = \begin{pmatrix} p_R & 0 & 0 \\ 0 & p_R & 0 \\ 0 & 0 & p_R \end{pmatrix}. \qquad (1.44)$$

Это означает, что *когда поле излучения изотропно*, тензор давления излучения *диагонален и изотропен*, и во всех расчетах его можно заменять скалярным *гидростатическим давлением* или исключить вовсе, перейдя от него к E_R. Если поле излучения не только изотропно, но и является *термодинамически равновесным*, то монохроматическое давление излучения равно

$$p_R^*(z, \nu, t) = E_R^*(z, \nu, t)/3 = (4\pi/3c)B_\nu(T), \qquad (1.45)$$

а полное давление излучения есть

$$p_R^*(z, t) = aT^4/3. \qquad (1.46)$$

Этот результат первоначально был получен из термодинамических соображений [160], стр. 55; [565], стр. 123.

Формулы (1.7) и (1.41) показывают, что p_R представляет собой среднее от $I(\mu)$, взятое с весом μ^2, а E_R — простое среднее. Если интенсивность излучения имеет максимум в направлении, в котором излучение выходит из атмосферы, то большие значения μ входят в p_R с бóльшим весом (вспомним, что $\mu = 1$ при $\theta = 0$), и p_R будет больше своего предельного значения $E_R/3$, соответствующего изотропии. Экстремальное отклонение от изотропии имеет место тогда, когда излучение распространяется в виде плоской волны. Для волны, распространяющейся наружу, можно написать $I(z, \nu, \mu) = I(z, \nu)\delta(\mu - 1)$. Тогда $K(z, \nu) = J(z, \nu) = H(z, \nu)$, и $p_R(z, \nu) = E_R(z, \nu)$. Ситуация близка к этому предельному случаю в самых наружных слоях очень протяженных оболочек звезд (или в туманностях), где поле излучения создается поверхностью звезды, которая при наблюдении с больших расстояний занимает лишь весьма малый телесный угол.

Упражнение 1.11. а) Показать, что для плоской волны, распространяющейся вдоль одной из координатных осей, тензор давления излучения имеет всего одну ненулевую компоненту. б) Показать, что если угловая зависимость интенсивности имеет вид $I(\mu) = I_0 + I_1\mu$, то тензор давления изотропен. Этот результат имеет важное значение, так как выражение приведенного вида хорошо описывает поле излучения в *диффузионном пределе*, который имеет место на больших глубинах в атмосфере (ср. § 2.5).

Упражнение 1.12. Предположим, что наблюдатель находится на расстоянии r от центра звезды радиуса r_*, поверхность которой равномерно яркая (т.е. I не зависит от μ). Вывести явные выражения для J, H и K через $\theta_* \equiv \arcsin(r_*/r)$ и показать, что $J = H = K$ в пределе при $r/r_* \to \infty$.

ПЕРЕМЕННЫЙ ЭДДИНГТОНОВСКИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Из полученных выше результатов следует, что отношение $p_R(\mathbf{r}, \nu, t)/E_R(\mathbf{r}, \nu, t)$ или $K(\mathbf{r}, \nu, t)/J(\mathbf{r}, \nu, t)$ представляет собой отвлеченное число, значение которого определяется степенью изотропии поля излучения и в типичных случаях заключено между 1/3 и 1. Ниже будет показано (§ 6.3), что в задаче о переносе излучения это отношение можно использовать в некоторых численных методах для уменьшения числа независимых переменных. Кроме того, его можно использовать для замыкания системы моментных уравнений, которые выводятся из уравнения переноса. Поэтому полезно ввести *переменный эддингтоновский множитель*

$$f(\mathbf{r}, \nu, t) \equiv K(\mathbf{r}, \nu, t)/J(\mathbf{r}, \nu, t), \qquad (1.47)$$

или в сокращенных обозначениях

$$f_\nu = K_\nu / J_\nu.$$

Упражнение 1.13. а) Рассмотрим разложение вида $I(\mu) = I_0 + \sum_n I_n \mu^n$. Показать, что если эта сумма содержит только члены с нечетными n, то $f = 1/3$. б) Предположим, что $I(\mu) \equiv I_1$ при $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ и $I(\mu) \equiv I_2$ при $-1 \leqslant \mu \leqslant 0$. Показать, что здесь тоже $f = 1/3$. Такое представление I дает некоторое грубое описание поля излучения звезды (*двухпотоковое приближение*), так как можно положить $I_2/I_1 \to 0$ на поверхности и $I_2/I_1 \to 1$ в глубоких слоях. в) Показать, что для слоя, протяженность которого в плоскости x, y бесконечна, а по z *конечна*, f может быть *меньше* $1/3$.
