

Глава 2

Уравнение переноса

Проходя сквозь газ, составляющий звездную атмосферу, излучение взаимодействует с веществом, многократно поглощаясь, переизлучаясь и рассеиваясь. Эти явления определяют, каким образом в атмосфере происходит *перенос излучения*. В этой главе вводятся макроскопические величины, которые характеризуют взаимодействие излучения и вещества (§ 2.1), и выводится *уравнение переноса*, описывающее перенос излучения в веществе (§ 2.2). Пользуясь этим уравнением, можно рассчитать спектр излучения, испускаемого звездой, и вычислить, каким образом зависимости поля излучения от частоты и направления изменяются с глубиной в атмосфере. Чтобы получить уравнения для моментов (§ 2.3), описывающее *динамические эффекты*, вызываемые полем излучения, будет выведено *нестационарное* уравнение переноса, но всюду в дальнейшем по гл. 13 включительно рассмотрение будет ограничено *неподвижными* атмосферами. В гл. 14 и 15 перенос излучения и вызываемые им динамические эффекты будут рассмотрены для *стационарных* (т.е. не меняющихся со временем) *движущихся атмосфер*.

2.1. Взаимодействие излучения и вещества

ПРОЦЕСС ПОГЛОЩЕНИЯ С ПОСЛЕДУЮЩИМ ИЗЛУЧЕНИЕМ И ПРОЦЕСС РАССЕЯНИЯ. РАЗЛИЧИЕ МЕЖДУ НИМИ

При взаимодействии излучения с веществом энергия может выводиться из поля излучения или поступать в него за счет весьма разнообразных физических процессов. Для начала эти процессы достаточно охарактеризовать некоторыми макроскопическими коэффициентами. Как будет показано в гл. 4 и 7, эти коэффициенты определяются атомными сечениями элементарных процессов и населенностями энергетических уровней атомов и ионов вещества звезды. Целесообразно с самого начала проводить четкое различие между «истинным» *поглощением* и *излучением*, с одной стороны, и *рассеянием* — с другой, поскольку, как мы не раз убедимся, после-

довательно развивая теорию звездных атмосфер, физическая природа взаимодействия между веществом атмосферы и излучением в этих двух случаях совершенно разная. Однако важно понимать и то, что в случае спектральных линий разграничение между этими двумя процессами можно установить однозначно только тогда, когда рассматривается переход лишь между какими-то двумя определенными атомными уровнями, без учета каких бы то ни было разрешенных переходов на другие уровни. Стоит только начать рассматривать *цепочки* переходов между несколькими взаимодействующими уровнями, как сразу появляются фундаментального характера неоднозначности. Строго описать теперь данную линию как образующуюся за счет «поглощения» или «рассеяния» становится уже невозможным, да это и не нужно и едва ли целесообразно. И тем не менее для дальнейшего существенно иметь интуитивное представление о принципиальном различии между этими двумя основными процессами, которое складывается из рассмотрения ряда характерных примеров.

Процессами *рассеяния* можно назвать те процессы, в ходе которых фотон взаимодействует с рассеивающим центром (вызывая, возможно, изменение его внутреннего состояния возбуждения) и в результате этого взаимодействия приобретает новое направление полета и, вообще говоря, слегка изменяет свою энергию. Существенно, что при этом процессе энергия фотона не превращается в кинетическую энергию частиц газа. В противоположность этому будем называть процессами *поглощения* те процессы, в которых фотон исчезает, а его энергия (полностью или частично) превращается в тепловую энергию газа. О таком процессе говорят, что здесь произошла *термализация* фотона. Принципиальным с физической точки зрения моментом, который следует отметить, является то, что локальная энергетическая мощность испускаемого в процессе *рассеяния* излучения зависит главным образом от *интенсивности рассеиваемого излучения* (которое могло возникнуть в какой-то другой, далеко расположенной точке атмосферы) и *лишь слабо связана с локальными значениями термодинамических параметров газа* (например, с его температурой). Напротив, *при процессах поглощения энергия фотонов непосредственно превращается в тепловую кинетическую энергию газа, и потому эти процессы более тесно связаны с локальными термодинамическими свойствами вещества*. Процесс, обратный поглощению, — *тепловое излучение* — превращает энергию, запасенную в газе в виде тепла, *непосредственно в излучение*. Поэтому процессы теплового поглощения и из-

лучения способствуют установлению *локального* равновесия между излучением и веществом. Процессы же рассеяния позволяют фотонам перемещаться из одной части атмосферы в другую, оставаясь не связанными с локальными условиями. В результате происходит *делокализация* процесса установления равновесия между газом и излучением, так что на состоянии газа начинают сказываться глобальные свойства атмосферы (например, наличие границ).

Чтобы проиллюстрировать развитые выше соображения, рассмотрим следующие примеры, считая их типичными примерами *процессов рассеяния*.

а) Взаимодействие фотона с атомом, находящимся в связанном состоянии a , которое приводит к возбуждению верхнего уровня b (при этом энергия фотона превращается во внутреннюю энергию возбуждения атома), и последующее возвращение непосредственно в состояние a с излучением фотона. Вообще говоря, излученный фотон будет распространяться в направлении, отличном от направления полета первичного фотона. Кроме того, и верхний, и нижний уровни атома a и b в излучающем газе не бесконечно тонкие, а будут иметь некоторые конечные ширины, обусловленные, например, конечностью времени жизни обоих состояний из-за радиативных переходов вниз или влиянием взаимодействия атома с частицами окружающей плазмы. Следовательно, можно считать, что каждый дискретный уровень состоит из некоторой совокупности подуровней, причем с любого подуровня одного состояния возможны радиативные переходы на любой подуровень другого состояния. Поэтому если переход с верхнего уровня происходит не на тот подуровень нижнего состояния, с которого произошло возбуждение, или если происходит перераспределение возбужденных атомов с первоначально возбужденных подуровней на некоторые другие подуровни (скажем, вследствие того, что атом испытал упругое столкновение с другой частицей), то энергия излученного фотона может слегка отличаться от энергии первоначального фотона. Аналогичным образом движение рассеивающих центров относительно неподвижной лабораторной системы отсчета может изменять энергию излучаемого фотона по сравнению с энергией первичного фотона, если проекции скорости рассеивающего атома на направления распространения возбуждающего и испускаемого фотонов различны, так как при этом будет происходить дифференциальный доплеровский сдвиг. (*Пример:* представим себе, что падающий фотон движется в том же направлении, в котором ориентирована скорость рассеивателя \mathbf{v} , а излученный фотон движется в противоположном направ-

лении. У излученного фотона возникает красное смещение на величину $\Delta\nu = -2\nu_0\nu/c$ по сравнению с падающим фотоном.) Изменения направления и частоты фотона при рассеянии описываются *функциями перераспределения* (см. ниже). Отметим, что при таком процессе передачи веществу сколько-нибудь значительной части энергии фотона не происходит.

б) Рассеяние фотона на свободном электроне (томсоновское или комптоновское рассеяние) либо на атоме или молекуле (рэлеевское рассеяние). Томсоновское рассеяние можно рассматривать как результат колебаний свободного заряда в электромагнитном поле излучения, комптоновское рассеяние — как столкновение фотона со свободной заряженной частицей, а рэлеевское рассеяние — как результат резонанса между собственным «колебанием» связанной системы и полем волны. Замечания, сделанные выше относительно перераспределения и отсутствия прямой связи между лучистой энергией и тепловым «резервуаром», в равной мере применимы и здесь.

Аналогичным образом нижеследующие процессы можно рассматривать в качестве примеров *процессов теплового поглощения* (а противоположные им процессы — как *тепловое излучение*).

а) Фотон поглощается атомом и ионизирует его, т.е. отрывает связанный электрон, давая ему возможность покинуть атом и перейти с конечной кинетической энергией в континуум. При этом процессе *фотоионизации*, или *связанно-свободного поглощения*, фотон гибнет, а избыток его энергии над энергией связи электрона переходит сначала в кинетическую энергию электрона, а в конечном счете, после того как этот электрон испытает упругие столкновения, устанавливающие тепловое распределение скоростей частиц, поступает в общий тепловой «резервуар». Обратный процесс захвата электрона на связанный уровень с рождением фотона, энергия которого равна сумме кинетической энергии электрона и его энергии связи, называется прямой *радиативной рекомбинацией*. Очевидно, что путем этих процессов осуществляется двусторонний обмен энергией между полем излучения и тепловой энергией, запасенной в веществе.

б) Фотон поглощается свободным электроном, движущимся в поле иона, что ведет к изменению кинетической энергии электрона относительно иона. Если говорить на языке классической физики, то после этого электрон удаляется от иона по другой (гиперболической) траектории. Этот процесс называют *свободно-свободным поглощением*, так как электрон не является связанным ни до, ни

после поглощения фотона. Обратный процесс, ведущий к излучению фотона, называется *тормозным излучением*.

в) Фотон поглощается атомом, вызывая переход электрона из одного связанного состояния в другое. Этот процесс называют *фотовозбуждением*, или *связанно-связанным поглощением*. После этого атом девозбуждается при неупругом столкновении с другой частицей, причем разность энергий уровней превращается в кинетическую энергию движения атома и столкнувшейся с ним частицы и в конце концов пополняет запас тепловой энергии. О фотоне говорят, что он *погиб в результате ударного девозбуждения*. Обратный процесс ведет к появлению фотона в результате столкновения, причем энергия черпается из тепловой энергии газа.

г) Фотовозбуждение атома с последующей *ударной ионизацией* возбужденного атома. И здесь энергия фотона идет на увеличение тепловой энергии частиц. Обратный процесс называют *ударной, или тройной рекомбинацией*.

Чтобы проиллюстрировать ограниченность тех исходных понятий, на которых основывалась приведенная выше аргументация, рассмотрим теперь ряд неоднозначных случаев. Предположим, что атом имеет три связанных уровня a , b и c (в порядке возрастания их энергии). Пусть произошло фотовозбуждение с a на c . Предположим, далее, что с уровня c происходит радиативный переход сначала на уровень b , а затем с уровня b на a . Такой процесс называется *флуоресценцией*. При этом один фотон с энергией $h\nu_{ac} = E_c - E_a$ дробится на два фотона с энергиями $h\nu_{ab} = E_b - E_a$ и $h\nu_{bc} = E_c - E_b$. Что произошло с первоначальным фотоном — рассеяние или поглощение? Согласно нашему первоначальному определению, он не был «рассеян», к тому же свойства новых фотонов (например, вероятность их выхода через граничную поверхность) могут быть совершенно не такими, как у первоначального фотона, так что характер нелокальности поля излучения испытывает изменение. В то же время тепловая энергия газа никак не изменялась. В качестве другого варианта рассмотрим тот же процесс, в котором однако, за ударным девозбуждением $c \rightarrow b$ следует излучение $b \rightarrow a$. О первоначальном фотоне можно сказать, что он погиб (поглотился). Но появился ли испущенный фотон за счет «теплого» излучения — ведь первоначальная энергия почерпнута из поля излучения? Можно построить много других, более сложных и тонких примеров, совместное рассмотрение которых устанавливает те границы, в пределах которых процессы поглощения и рассеяния целесообразно противопоставлять друг другу.

На самом деле полностью непротиворечивая картина получается только тогда, когда выписаны полные *уравнения статистического равновесия* (см. гл. 5), описывающие все возможные процессы, как радиативные, так и ударные, которые связывают произвольный уровень i с некоторым другим уровнем j . Эти уравнения должны быть решены совместно с уравнениями, которые описывают, как излучение поглощается, испускается и переносится через атмосферу (т.е. с *уравнениями переноса*). Сделать это, вообще говоря, очень трудно, и изложению методов, которые позволяют успешно решить поставленную задачу, посвящена большая часть настоящей книги. (Важность сказанного станет в полной мере ясной лишь тогда, когда читатель изучит весь материал, содержащийся по гл. 12. Тем не менее приведенные соображения следует в дальнейшем все время иметь в виду.)

КОЭФФИЦИЕНТ ОСЛАБЛЕНИЯ

Для описания того, как вещество выводит энергию из поля излучения, введем макроскопический коэффициент $\chi(\mathbf{r}, \nu, t)$, называемый *коэффициентом ослабления* или *непрозрачностью* или иногда (не совсем точно) *полным коэффициентом поглощения*. Этот коэффициент определяется следующим образом: элементарный объем вещества с поперечным сечением dS и толщиной ds выводит из пучка излучения интенсивности $I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)$, падающего по нормали к dS и распространяющегося в пределах телесного угла $d\omega$, за время dt в интервале частот $d\nu$ количество энергии, равное

$$\delta E = \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) dS ds d\omega d\nu dt. \quad (2.1)$$

Коэффициент ослабления равен сумме произведений атомных сечений поглощения (см^2) на концентрации поглощающих частиц (см^{-3}), причем суммирование проводится по всем состояниям, из которых возможно взаимодействие с фотонами частоты ν . Размерность χ — см^{-1} , так что $1/\chi$ — это расстояние, которое фотон может пройти, прежде чем он выбудет из пучка, т.е. $1/\chi$ — *средняя длина свободного пробега фотона* (ср. § 2.2)

Зависимость χ от частоты может быть весьма сложной. Вклад в нее могут давать тысячи или миллионы переходов (связанно-связанных, связанно-свободных и свободно-свободных). *Для неподвижных сред*, в которых на атомных масштабах отсутствуют выделенные направления (обусловленные, например, магнитным полем), *коэффициент ослабления изотропен. В движущихся средах он*

зависит от углов из-за доплеровских смещений, которым подвержена частота излучения в системе координат, связанной с движущимся веществом, по сравнению с первоначальной частотой в неподвижной (лабораторной) системе. Очевидно, что это доплеровское смещение зависит от проекции вектора скорости на направление падающего луча. В дальнейшем рассматриваются только неподвижные атмосферы.

Как указывалось выше в этом разделе, иногда целесообразно делать различие между «поглощением» и «рассеянием». Поэтому введем объемные коэффициенты $k(\mathbf{r}, \nu, t)$ и $\sigma(\mathbf{r}, \nu, t)$, описывающие с помощью формул типа (2.1) скорость, с которой энергия выводится из пучка излучения за счет «истинного поглощения» и «рассеяния» соответственно. Полный коэффициент ослабления дается выражением

$$\chi(\mathbf{r}, \nu, t) = k(\mathbf{r}, \nu, t) + \sigma(\mathbf{r}, \nu, t). \quad (2.2)$$

Иначе говоря, считается, что эти два процесса происходят независимо и просто суммируются. На самом деле для описания того, как энергия *выводится* из пучка, достаточно только χ . Проводить различие между k и σ становится удобным главным образом при введении коэффициента излучения.

При расчете χ необходимо вводить поправку на *вынужденное излучение* (см. § 4.1 и 4.3). Это квантовый процесс, при котором наличие излучения стимулирует переход из верхнего состояния в нижнее, причем число таких переходов пропорционально произведению соответствующего сечения, населенности верхнего уровня и интенсивности излучения. Так как скорость этого процесса пропорциональна $I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)$ и так как он эффективно ведет к некоторому уменьшению непрозрачности, его удобно включать в χ . Вынужденное излучение происходит только тогда, когда излучающая система находится в некотором *определенном* верхнем состоянии (неважно, связанном или свободном). Поэтому при томсоновском рассеянии (на свободных электронах) или при рэлеевском рассеянии (происходящем через виртуальные состояния) вынужденное излучение *отсутствует*, в спектральных же линиях вынужденное излучение *есть*, даже если поглощение в линиях описывается коэффициентом «рассеяния».

Если значение $\chi(\mathbf{r}, \nu, t)$ [или $k(\mathbf{r}, \nu, t)$ и $\sigma(\mathbf{r}, \nu, t)$] известно, то мы имеем полное макроскопическое описание того, с какой эффективностью вещество выводит энергию из пучка излучения. Однако очень важно подчеркнуть, что эта «полнота» описания является ка-

жущейся. Причина, по которой мы вынуждены сделать это неприятное замечание, кроется в следующем. Простая картина, казалось бы даваемая уравнением (2.1), нарушается вследствие того, что населенности уровней, которые «определяют» эффективность выведения энергии из поля излучения, давая вклад в χ , сами в свою очередь *определяются* полем излучения посредством фотовозбуждений, фотоионизаций, радиативных переходов на нижележащие уровни, радиативных рекомбинаций и других подобных процессов. Таким образом, на самом деле взаимодействие поля излучения с поглощающим веществом является *нелинейным*. Только что описанная трудность остается (хотя и в более тонкой форме) даже тогда, когда принимается, что населенности уровней можно рассчитывать по температуре и плотности, применяя в каждом данном месте соотношения, справедливые при термодинамическом равновесии. (Это — так называемое приближение *локального термодинамического равновесия*, или ЛТР.) Причина состоит в том, что температура определяется балансом между суммарной энергией, излучаемой веществом и поглощаемой им, а потому зависит от общего характера поля излучения и от того, как оно реагирует на основные свойства атмосферы (например, на наличие границ, присутствие рассеяния, градиенты ее параметров и т.п.). Замечания, сделанные в этом абзаце, в полной мере применимы и к макроскопическому описанию испускания излучения. Заметим также, что целиком смысл этих замечаний прояснится, только когда мы значительно продвинемся вперед в нашем изложении (см., в частности, § 5.1 и 5.3).

КОЭФФИЦИЕНТ ИЗЛУЧЕНИЯ

Для описания испускания излучения веществом звезды вводится макроскопический *коэффициент излучения* (или *излучательная способность*) $\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)$, определяемый следующим образом: количество энергии, выделяемой элементарным объемом вещества, имеющим поперечное сечение dS и толщину ds , в интервале частот $d\nu$ в пределах телесного угла $d\omega$ около направления \mathbf{n} за время dt равно

$$\delta E = \eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) dS ds d\omega d\nu dt. \quad (2.3)$$

Разномерность η — эрг/(см³·ср·Гц·с). Как и в случае непрозрачности, *коэффициент излучения*, обусловленный тепловыми процессами, в *неподвижных средах* (без выделенных внешними причинами направлений) является *изотропным*. В *движущемся ве-*

веществе вследствие влияния доплеровского смещения коэффициент излучения зависит от углов. Излучение, испускаемое при процессах рассеяния, как правило, имеет явную угловую зависимость, даже в неподвижных средах.

Для расчета коэффициента излучения надо произведения населенностей верхних уровней на соответствующие вероятности переходов просуммировать по всем процессам, при которых могут испускаться фотоны частоты ν . При записи уравнения переноса обозначение η без каких-либо индексов обычно будет использоваться для полного коэффициента излучения. Если в этом уравнении в явном виде присутствуют члены, описывающие электронное рассеяние, то η будет относиться ко всем остальным видам излучения. Индексы s и l будут иногда использоваться для обозначения континуума и линий соответственно. Здесь также следует отдавать себе отчет в том, что простота этого описания обманчива — по тем же причинам, которые были указаны выше при обсуждении коэффициента поглощения.

В случае строгого *термодинамического равновесия* (ТР) между коэффициентами излучения и поглощения существует важное соотношение. Если рассмотреть теплоизолированную полость, находящуюся в не изменяющемся со временем состоянии равновесия и содержащую однородное вещество, то известно, что это вещество будет иметь всюду в полости одну и ту же температуру (в противном случае можно было бы придумать процессы, позволяющие производить работу за счет градиента температуры, что противоречит второму началу термодинамики). Далее, следует ожидать, что поле излучения будет изотропно и однородно во всей полости (включая и внутреннюю поверхность ее стенок), так как в противном случае лучи, распространяющиеся в противоположных направлениях, не были бы в точности одинаковыми, и в результате возник бы направленный перенос энергии, за счет чего можно было бы совершать работу, что опять-таки противоречит второму началу термодинамики. Поэтому подсчет энергии, поглощенной и излученной в интервале телесного угла $d\omega$ и частоты $d\nu$ элементом вещества за время dt , показывает, что для достижения стационарного теплового равновесия (при котором разность между притоком энергии к веществу и ее оттоком от него равна нулю) коэффициент теплового излучения должен равняться

$$\eta'(\nu) = k(\nu)I(\mathbf{n}, \nu). \quad (2.4)$$

Это соотношение называется *законом Кирхгофа*. В полости, нахо-

дающейся в строгом ТР с температурой T , интенсивность излучения дается функцией Планка $B_\nu(T)$, так что

$$\eta^*(\nu) = k^*(\nu)B_\nu(T). \quad (2.5)$$

Это — соотношение Кирхгофа — Планка; результат получен нами без привлечения данных о свойствах вещества, и поэтому он справедлив (при ТР) для *любого* вещества. (Превосходное обсуждение вопроса о взаимодействии вещества и излучения при ТР см. в [160], стр. 199 — 206, и в статье Милна в [416], стр. 93 — 96.)

Строго говоря, закон Кирхгофа — Планка применим только к системам, находящимся в ТР. Однако если изменение параметров вещества *мало* на расстояниях, которые фотон способен пройти, прежде чем он погибнет при том или ином ударном процессе, а его энергия перейдет в тепло (таково, например, положение в недрах звезд), то можно ожидать, что соотношение (2.5) будет с высокой степенью точности выполняться при локальных значениях термодинамических переменных, определяющих состояние вещества в данном месте. В таком случае можно написать

$$\eta'(r, \nu, t) = k^*(r, \nu, t)B_\nu[T(r, t)]. \quad (2.6)$$

В только что сформулированной *гипотезе о локальном термодинамическом равновесии* (ЛТР) делается *предположение*, что во всей атмосфере, вплоть до самых наружных ее слоев, населенности связанных и свободных состояний атомов и ионов, коэффициенты поглощения и излучения, словом, все термодинамические свойства вещества те же самые, какими они были бы при ТР с локальными значениями температуры и плотности. Однако интенсивность излучения может отличаться от своего локального равновесного значения, равного $B_\nu[T(r)]$. Она находится решением уравнения переноса. Такой подход явно *внутренне противоречив*, хотя выражения для некоторых величин, справедливые при ЛТР, остаются в силе и в общем случае, когда ЛТР нет. Например, соотношение (2.6) сохраняет силу для коэффициента излучения *в континууме* даже при отсутствии ЛТР, если только распределение скоростей рекомбинирующих (а в случае излучения при свободно-свободных переходах — сталкивающихся) частиц максвелловское. Для излучения *в линии* это соотношение *не выполняется* и, кроме того, неприменима та формула для коэффициента поглощения, которая годится для ЛТР. Предположение о существовании ЛТР — средство упростить вычисления при построении моделей звездных атмосфер, и оно широко используется. (Мы будем иногда пользоваться им, чтобы по-

лучить простейшую модель, на которой можно проиллюстрировать основные математические методы решения задач переноса излучения; реалистичные модели, построенные в рамках предположения о ЛТР, обсуждаются в §7.2 — 7.4).

Однако следует подчеркнуть, что звездные атмосферы представляют собой области, в которых градиенты параметров вещества велики, и имеется открытая граница, через которую излучение свободно выходит. Поэтому поле излучения сильно анизотропно и значительно отличается от планковского. Когда поле излучения находится путем решения *нелокального* уравнения переноса, использование предположения об ЛТР можно считать оправданным, если можно показать, что некий механизм — обычно это столкновения между частицами — приводит к населенностям, соответствующим ЛТР. Как уже упоминалось выше и как подробно будет показано в § 5.3 и в гл. 7 и 11 — 14, обычно это не так. Наоборот, состояние вещества определяется полем излучения, ввиду чего соотношение (2.6) перестает выполняться. Поэтому в конечном итоге нам придется обратиться к более общему анализу, когда термодинамическое состояние газа и функция распределения фотонов, описывающая поле излучения, находятся одновременно путем совместного решения уравнений переноса и статистического равновесия.

Рассмотрим теперь излучение, *рассеиваемое* веществом. Чтобы упростить обозначения, не будем явно указывать зависимость от t , хотя все величины могут зависеть от времени. Как указывалось выше, в процессе рассеяния могут изменяться и направление полета, и частота фотона. Эти изменения описываются *функцией перераспределения*

$$R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) d\nu' d\nu (d\omega' / 4\pi)(d\omega / 4\pi),$$

представляющей собой *совместную вероятность* того, что фотон с частотой в интервале $\nu', \nu' + d\nu'$, летевший в телесном угле $d\omega'$ около направления \mathbf{n}' , окажется после рассеяния в пределах телесного угла $d\omega$ около направления \mathbf{n} и в интервале частот $\nu, \nu + d\nu$. Вывод явных выражений для функций перераспределения и подробное их обсуждение будут даны в гл. 13, однако некоторые общие свойства этих функций стоит отметить уже сейчас. Мы будем *нормировать* R следующим образом:

$$\frac{1}{(4\pi)^2} \oint d\omega' \oint d\omega \int_0^\infty d\nu' \int_0^\infty d\nu R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) = 1. \quad (2.7)$$

Знание функции перераспределения позволяет получить нормированный профиль поглощения $\phi(\nu)$ и нормированный профиль излучения $\psi(\nu)$ для процесса рассеяния. Из данного выше физического определения ясно, что, если выполнить интегрирование по всем частотам излучения и по всем углам, мы должны получить вероятность поглощения излучения, падающего в телесном угле $d\omega'$ и в интервале частот $d\nu'$, т.е. $\phi(\nu')d\nu'd\omega'/4\pi$. Поэтому

$$\phi(\nu') = \frac{1}{4\pi} \oint d\omega \int_0^\infty d\nu R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}), \quad (2.8)$$

причем в силу соотношения (2.7) $\phi(\nu')$ нормировано следующим

образом: $\int_0^\infty \phi(\nu')d\nu' = 1$. Если полный коэффициент рассеяния

обозначить через $\sigma_0(\mathbf{r})$, то можно написать $\sigma(\mathbf{r}, \nu') = \sigma_0(\mathbf{r})\phi(\nu')$. Совместная вероятность того, что энергия $\sigma_0(\mathbf{r})I(\mathbf{r}, \mathbf{n}', \nu')$ будет изъята из пучка излучения, распространяющегося в телесном угле $d\omega'$ на частоте ν' , и окажется рассеянной в $d\omega$ на частоте ν , равна

$$\sigma_0(\mathbf{r})R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n})I(\mathbf{r}, \mathbf{n}', \nu')d\nu' d\nu \frac{d\omega'}{4\pi} \frac{d\omega}{4\pi}.$$

Поэтому, проинтегрировав это выражение по всем начальным углам и частотам, мы получим полное количество энергии, излучаемой на частоте ν в телесном угле $d\omega$, а именно

$$\begin{aligned} \eta^S(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu)d\nu \frac{d\omega}{4\pi} &= \\ &= \sigma_0(\mathbf{r})d\nu \frac{d\omega}{4\pi} \oint \frac{d\omega'}{4\pi} \int_0^\infty d\nu' R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n})I(\mathbf{r}, \mathbf{n}', \nu'). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Упражнение 2.1. Показать, что полная мощность излучения $\int d\nu \oint d\omega \eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu)$ равна полной энергии, изымаемой из поля излучения за единицу времени $4\pi\sigma_0(\mathbf{r}) \int \phi(\nu')J(\mathbf{r}, \nu')d\nu'$, так что процесс рассеяния консервативен.

Формула (2.9) полностью характеризует распределение излучаемых фотонов по частотам и по углам. Рассматривать задачи переноса с той степенью общности и точности, как это только что

описано, обычно нелегко, но задачу можно существенно упростить. Например, если нас в первую очередь интересует перераспределение по частотам, а не по углам, то можно принять, что функция $I(\mathbf{r}, \nu, \nu)$ почти изотропна, и в формуле (2.9) заменить ее средней интенсивностью $J(\mathbf{r}, \nu)$. Тогда излучение в единичном интервале $d\nu d\omega$ будет равно

$$\eta^S(\mathbf{r}, \nu) = \sigma_0(\mathbf{r}) \int_0^\infty R(\nu', \nu) J(\mathbf{r}, \nu') d\nu', \quad (2.10)$$

где усредненная по углам функция перераспределения

$$R(\nu', \nu) \equiv \frac{1}{4\pi} \oint R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) d\omega' = \frac{1}{4\pi} \oint R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) d\omega \quad (2.11)$$

дает вероятность перераспределения из интервала $(\nu', \nu' + d\nu')$ в $(\nu, \nu + d\nu)$. Ее нормировка:

$$\int_0^\infty d\nu' \int_0^\infty d\nu R(\nu', \nu) = \int_0^\infty \phi(\nu') d\nu' = 1. \quad (2.12)$$

Зависимость $R(\nu, \nu')$ от угла исчезает в результате интегрирования либо по $d\omega'$, либо по $d\omega$. Это следует из того, что $R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n})$ зависит только от угла между \mathbf{n}' и \mathbf{n} (ср. § 13.2). Формулой (2.10) вводится приближение, чрезвычайно важное для задач о переносе излучения в линиях, поскольку в этом случае определяющее влияние оказывает явление диффузии фотонов по частотам из непрозрачного ядра линии (где они «заперты») в более прозрачные крылья линии (откуда они могут выходить из атмосферы с тех глубин, где I фактически еще почти изотропна). В приближении, когда выполняется усреднение по углам, так называемый *профиль излучения*, т.е.

$$\psi(\nu) \equiv \eta(\mathbf{r}, \nu) / \int_0^\infty \eta(\mathbf{r}, \nu) d\nu,$$

дается выражением

$$\psi(\nu) = \int_0^\infty R(\nu', \nu) J(\mathbf{r}, \nu') d\nu' / \int_0^\infty \phi(\nu') J(\mathbf{r}, \nu') d\nu', \quad (2.13)$$

которое показывает, что распределение излучаемых фотонов по частотам зависит от относительного частотного распределения падающего излучения.

В частном случае, когда интенсивность не зависит от частоты, получаем так называемое *естественное возбуждение*, для которого

$$\psi^*(\nu) = \int_0^{\infty} R(\nu', \nu) d\nu'. \quad (2.14)$$

Если $R(\nu', \nu) = R(\nu, \nu')$, как это имеет место в большинстве представляющих интерес случаев (ср. § 13.3), то $\psi^*(\nu) = \phi(\nu)$. Это значит, что *при естественном возбуждении профиль излучения совпадает с профилем поглощения* (в общем случае этот результат *неверен!*). При термодинамическом равновесии возбуждение, разумеется, является естественным. Именно этот случай и имеют обычно в виду, говоря о естественном возбуждении. Существуют, однако, и другие физические ситуации, когда получается тот же результат, т.е. $\psi(\nu) = \phi(\nu)$. В частности, предположим, что у атомов, находящихся на возбужденном уровне, имеет место полное перемешивание в пределах этого уровня, так что *между частотами падающих и рассеянных фотонов корреляция полностью отсутствует*. Тогда и те и другие фотоны имеют независимые друг от друга распределения по частотам, пропорциональные профилю поглощения $\phi(\nu)$. О таком случае говорят, что имеет место *полное перераспределение*, или *полная некогерентность*. Этот случай в хорошем приближении имеет место, например, тогда, когда во время процесса рассеяния атомы испытывают столь сильные возмущения из-за столкновений, что возбужденные электроны перераспределяются по подуровням верхнего состояния случайным образом. В этом случае вероятности поглощения и излучения (каждая из них *независимо* от другой) пропорциональны числу подсостояний, доступных для любой данной частоты в пределах линии [т.е. как раз величине $\phi(\nu)$], и совместная вероятность поглощения с излучением $R(\nu', \nu)$ является произведением этих двух независимых распределений, т.е. $R(\nu', \nu) = \phi(\nu')\phi(\nu)$. При *полном перераспределении* коэффициент излучения равен

$$\eta^S(\mathbf{r}, \nu) = \sigma_0(\mathbf{r})\phi(\nu) \int_0^{\infty} \phi(\nu')J(\mathbf{r}, \nu')d\nu', \quad (2.15)$$

откуда ясно видно совпадение профилей поглощения и излучения. Полное перераспределение является также хорошим приближением в пределах доплеровского ядра спектральной линии. В задачах о переносе излучения в линиях оно служит превосходным первым приближением. При изложении теории образования линий вплоть до гл. 13 будет допускаться, что имеет место полное перераспределение.

Другой класс задач появляется тогда, когда в центре внимания находится перераспределение испускаемого излучения по углам, но допускается, что рассеяние является практически когерентным (т.е. $\nu' = \nu$). Такие задачи представляют интерес, например, при изучении рассеяния света крупными частицами в планетных атмосферах (в том числе и в земной атмосфере). Тогда можно написать

$$R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) = g(\mathbf{n}', \mathbf{n})\phi(\nu')\delta(\nu' - \nu), \quad (2.16)$$

где δ — дельта-функция Дирака и g — *индикатриса рассеяния*, нормированная так, что

$$\frac{1}{4\pi} \oint g(\mathbf{n}', \mathbf{n})d\omega' = 1. \quad (2.17)$$

Два важных частных случая индикатрисы рассеяния — сферическая (*изотропное рассеяние*)

$$g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) = 1 \quad (2.18)$$

и *дипольная*, или *рэлеевская* (описывающая томсоновское и рэлеевское рассеяние),

$$g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) = (3/4)(1 + \cos^2\Phi), \quad (2.19)$$

где $\cos\Phi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'$. Индикатрисы рассеяния на крупных частицах (т.е. таких, размеры которых соизмеримы с длиной волны излучения) часто имеют чрезвычайно сложный вид и характеризуются большими и быстрыми вариациями при изменении угла рассеяния [312]; [359], гл. 4.

При *когерентном рассеянии* выражение (2.9) приводится к виду

$$\eta^S(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu) = \sigma(\mathbf{r}, \nu) \oint I(\mathbf{r}, \mathbf{n}', \nu)g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) \frac{d\omega'}{4\pi}. \quad (2.20)$$

В спектральной линии когерентное рассеяние могло бы происходить только тогда, когда нижний уровень перехода был бы бесконечно тонким, верхний уровень не испытывал бы возмущений в процессе рассеяния, а рассеивающие атомы покоились бы в системе отсчета наблюдателя. В действительности это не так, и рассеяние в линии гораздо точнее описывается предположением о полном перераспределении (за исключением далеких крыльев линии, где ϕ медленно меняется в пределах интервала частот, соответствующего доплеровским смещениям). С другой стороны, для рассеяния в континууме (например, на электронах) распределение излучения по частотам плавное, и в пределах типичных смещений по частоте, про-

исходящих в процессе рассеяния, интенсивность практически постоянна. По этой причине процессы рассеяния в континууме принято рассматривать как когерентные (хотя близ спектральных линий этого приближения может оказаться недостаточно). Кроме того, поскольку влияние эффектов перераспределения по углам, обусловленных тем, что индикатриса рассеяния рэлеевская, в звездных атмосферах, как правило, очень малы, принято допускать, что рассеяние в континууме является изотропным; поэтому

$$\eta^S(\mathbf{r}, \nu) = \sigma(\mathbf{r}, \nu)J(\mathbf{r}, \nu). \quad (2.21)$$

2.2. Уравнение переноса

Вывод

Исследуем теперь задачу о переносе излучения. Возьмем инерциальную систему координат и рассмотрим, как в течение какого-то определенного промежутка времени энергия протекает через некоторый фиксированный объем. Примем, что поле излучения, вообще говоря, изменяется со временем. Если предположить, что вещество неподвижно, то χ и η будут изотропны (если не рассматривать анизотропного рассеяния). В движущемся веществе следует учитывать изменения частоты фотона и направления его движения (т.е. доплеровский сдвиг и аберрацию), обусловленные необходимостью перехода от лабораторной системы отсчета к системе, движущейся вместе с веществом. Указанные эффекты зависят от величины $\mathbf{n} \times \mathbf{v}$. Поэтому χ и η будут в этом случае явным образом зависеть от углов.

Подсчитаем теперь энергию в интервале частот $d\nu$, проходящую за время dt через элемент объема толщины ds и поперечного сечения dS . Плошадка dS перпендикулярна к лучу, распространяющемуся в направлении \mathbf{n} в пределах телесного угла $d\omega$ (рис. 2.1). Разность между количеством энергии, которая вытекает из объема (в $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ в момент $t + \Delta t$) и втекает в него (в \mathbf{r} и t), должна быть равна притоку энергии за счет излучения вещества, содержащегося в объеме, минус количество поглощенной энергии. Таким образом,

$$\begin{aligned} & [I(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t + \Delta t) - I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)]dSd\omega d\nu dt = \\ & = [\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)]dsdSd\omega d\nu dt. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Пусть s — расстояние, отсчитываемое вдоль луча. Тогда $\Delta t = ds/c$, и

$$I(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t + \Delta t) = I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) + [c^{-1}(\partial I/\partial t) + (\partial I/\partial s)]ds. \quad (2.23)$$