

исходящих в процессе рассеяния, интенсивность практически постоянна. По этой причине процессы рассеяния в континууме принято рассматривать как когерентные (хотя близ спектральных линий этого приближения может оказаться недостаточно). Кроме того, поскольку влияние эффектов перераспределения по углам, обусловленных тем, что индикатриса рассеяния рэлеевская, в звездных атмосферах, как правило, очень малы, принято допускать, что рассеяние в континууме является изотропным; поэтому

$$\eta^S(\mathbf{r}, \nu) = \sigma(\mathbf{r}, \nu)J(\mathbf{r}, \nu). \quad (2.21)$$

## 2.2. Уравнение переноса

### Вывод

Исследуем теперь задачу о переносе излучения. Возьмем инерциальную систему координат и рассмотрим, как в течение какого-то определенного промежутка времени энергия протекает через некоторый фиксированный объем. Примем, что поле излучения, вообще говоря, изменяется со временем. Если предположить, что вещество неподвижно, то  $\chi$  и  $\eta$  будут изотропны (если не рассматривать анизотропного рассеяния). В движущемся веществе следует учитывать изменения частоты фотона и направления его движения (т.е. доплеровский сдвиг и абберацию), обусловленные необходимостью перехода от лабораторной системы отсчета к системе, движущейся вместе с веществом. Указанные эффекты зависят от величины  $\mathbf{n} \times \mathbf{v}$ . Поэтому  $\chi$  и  $\eta$  будут в этом случае явным образом зависеть от углов.

Подсчитаем теперь энергию в интервале частот  $d\nu$ , проходящую за время  $dt$  через элемент объема толщины  $ds$  и поперечного сечения  $dS$ . Площадка  $dS$  перпендикулярна к лучу, распространяющемуся в направлении  $\mathbf{n}$  в пределах телесного угла  $d\omega$  (рис. 2.1). Разность между количеством энергии, которая вытекает из объема (в  $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$  в момент  $t + \Delta t$ ) и втекает в него (в  $\mathbf{r}$  и  $t$ ), должна быть равна притоку энергии за счет излучения вещества, содержащегося в объеме, минус количество поглощенной энергии. Таким образом,

$$\begin{aligned} & [I(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t + \Delta t) - I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)]dSd\omega d\nu dt = \\ & = [\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)]dsdSd\omega d\nu dt. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Пусть  $s$  — расстояние, отсчитываемое вдоль луча. Тогда  $\Delta t = ds/c$ , и

$$I(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t + \Delta t) = I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) + [c^{-1}(\partial I/\partial t) + (\partial I/\partial s)]ds. \quad (2.23)$$

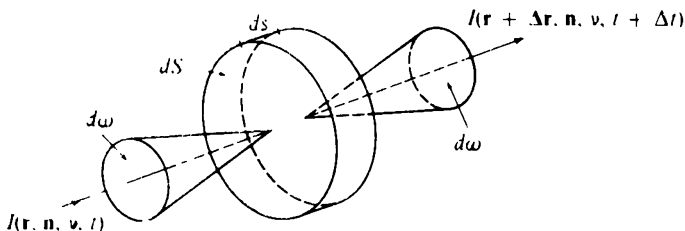


Рис. 2.1. Элемент объема, содержащий поглощающее и излучающее вещество, который рассматривается при выводе уравнения переноса.

Подставляя выражение (2.23) в соотношение (2.22), приходим к уравнению переноса

$$\left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) = \eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t). \quad (2.24)$$

Производную по направлению можно выразить через производные в направлении координатных осей

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial s} &= \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial I}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial I}{\partial z} = \\ &= n_x \frac{\partial I}{\partial x} + n_y \frac{\partial I}{\partial y} + n_z \frac{\partial I}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где  $(n_x, n_y, n_z)$  — компоненты единичного вектора  $\mathbf{n}$ . Поэтому уравнение (2.24) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla \right) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) = \\ = \eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Для одномерной плоской атмосферы  $n_z = \partial z / \partial s = \cos \theta = \mu$ , а производные  $\partial / \partial x$  и  $\partial / \partial y$  тождественно равны нулю, и мы получаем

$$\left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \right) I(z, \mathbf{n}, \nu, t) = \eta(z, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(z, \mathbf{n}, \nu, t) I(z, \mathbf{n}, \nu, t). \quad (2.27)$$

В стационарном случае

$$\mu dI(z, \mathbf{n}, \nu) / dz = \eta(z, \mathbf{n}, \nu) - \chi(z, \mathbf{n}, \nu) I(z, \mathbf{n}, \nu). \quad (2.28)$$

Уравнение (2.28) есть стандартное уравнение переноса, используемое при расчетах моделей плоских атмосфер. Координата  $z$  возрастает в атмосфере вверх (т.е. по направлению к внешнему наблюдателю). Для неподвижных сред  $u$ ,  $\eta$  и  $\chi$  вместо аргументов  $(z, \mathbf{n}, \nu)$  остаются только  $(z, \nu)$ . Заметим, что если  $\eta$  и  $\chi$  заданы, то уравнение (2.28) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно решить при любых  $\mu$  и  $\nu$ . Когда в  $\eta$  содержатся члены, описывающие рассеяние, уравнение переноса превращается в интегродифференциальное уравнение, содержащее интеграл от  $I$  по углам и по частоте.

### УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА КАК УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

В кинетической теории основным уравнением, описывающим перенос частиц, является уравнение Больцмана. Мы сейчас покажем, что уравнение переноса, по существу, является уравнением Больцмана для фотонов. Предположим, что имеется функция распределения частиц  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , дающая число частиц в элементарном объеме фазового пространства  $d^3r d^3p$  около точки  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ . Проследим, как изменяется  $f$  в пределах некоторого конкретного элемента фазового объема за время  $dt$ . При этом  $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \mathbf{v}dt$  и  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{F}dt$ , где  $\mathbf{F}$  — внешние силы, действующие на частицы. Элемент фазового объема изменяется следующим образом:

$$(d^3r)_0(d^3p)_0 \rightarrow (d^3r d^3p) = J[(d^3r)_0(d^3p)_0],$$

где  $J$  — якобиан преобразования.

Упражнение 2.2. Показать, что с точностью до членов первого порядка по  $dt$  якобиан преобразования элемента фазового объема равен единице:  $J = 1$ .

Учитывая результат, сформулированный в упражнении 2.2, мы видим, что элемент фазового объема деформируется, но его фазовый объем остается неизменным. Если внешние силы  $\mathbf{F}$  непрерывны, то деформация элемента фазового объема тоже непрерывна, и все частицы, первоначально находившиеся в элементе объема, остаются в нем. Поскольку объем остается постоянным, не изменяется и фазовая плотность частиц. Но если, кроме того, происходят столкновения, то отдельные частицы могут перескакивать из одного элемента фазового объема в другой с нарушением непрерывности; при этом с соседними с ними частицами ничего не происходит.

Следовательно, изменение концентрации частиц в элементе фазового объема должно равняться разности чисел частиц, попадающих в этот элемент, и покидающих его за счет столкновений, т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + F_x \frac{\partial f}{\partial p_x} + F_y \frac{\partial f}{\partial p_y} + F_z \frac{\partial f}{\partial p_z} = \left( \frac{Df}{Dt} \right)_{\text{столкн}}, \quad (2.29)$$

или, в более компактных обозначениях,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f + (\mathbf{F} \cdot \nabla_p) f = \left( \frac{Df}{Dt} \right)_{\text{столкн}} \quad (2.30)$$

Для «газа», состоящего из фотонов (масса покоя которых равна нулю), в отсутствие эффектов общей теории относительности  $\mathbf{F} \equiv 0$ , и распространение фотонов в инерциальной системе отсчета происходит вдоль прямых с  $\mathbf{v} = c\mathbf{n}$ , а частота остается постоянной. Функция распределения  $f_R$  выражается через удельную интенсивность излучения формулой (1.2). Аналогом «столкновений» является взаимодействие фотонов с веществом, так что число фотонов, появляющихся в элементе фазового объема, равно разности между излучаемой и поглощаемой в нем энергией, деленной на энергию одного фотона. Поэтому для фотонов уравнение (2.30) принимает вид

$$(ch\nu)^{-1} [(\partial I / \partial t) + c(\mathbf{n} \cdot \nabla) I] = (\eta - \chi I) / h\nu, \quad (2.31)$$

что совпадает с уравнением переноса (2.26). По существу, уравнение переноса есть уравнение Больцмана для сплошной среды, на которую не действуют внешние силы, но которая подвержена сильному влиянию столкновений. Как будет показано в § 2.3, моменты уравнения переноса дают динамические (моментные) уравнения для поля излучения, точно так же как моменты уравнения Больцмана для газа дают уравнения гидродинамики.

## СФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В сферически симметричной среде интенсивность излучения не должна зависеть от координат  $\Theta$  и  $\Phi$ , входящих в тройку переменных  $(r, \Theta, \Phi)$ , определяющих положение точки в атмосфере, и от азимутального угла  $\phi$ , входящего в пару переменных  $(\theta, \phi)$ , опреде-

ляющих направление распространения излучения относительно локальной внешней нормали  $\hat{r}$ . Поэтому  $I(r, \mathbf{n}, \nu, t)$  переходит в  $I(r, \theta, \nu, t)$ . Чтобы преобразовать общую форму уравнения переноса (2.24) применительно к нашему случаю, нужно учитывать изменение  $\theta$  при перемещении вдоль луча, так что следует пользоваться общим выражением  $d\mathbf{s} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta}$ . Из геометрических соображений ясно (рис. 2.2), что  $dr = \cos\theta ds$  и  $r d\theta = -\sin\theta ds$  ( $d\theta \leq 0$  для любых  $ds$ ), так что

$$\frac{\partial}{\partial s} \rightarrow \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu}, \quad (2.32)$$

где, как обычно,  $\mu = \cos\theta$ . Поэтому уравнение переноса для сферически симметричной атмосферы имеет вид

$$\left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) I(r, \mu, \nu, t) = \eta(r, \nu, t) - \chi(r, \nu, t) I(r, \mu, \nu, t). \quad (2.33)$$

В стационарном случае оно очевидным образом упрощается. Отметим, что даже при заданных  $\eta$  и  $\chi$  уравнение (2.33) является дифференциальным уравнением в частных производных по  $r$  и  $\mu$ . Однако это дополнительное усложнение можно обойти, используя характеристики (в данном случае прямые линии), что сводит пространственный оператор к обычной производной вдоль луча (см. § 7.6).

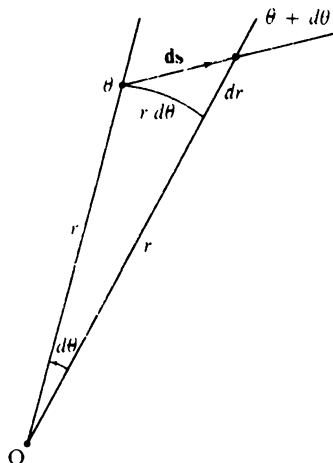


Рис. 2.2. Геометрические соотношения между переменными, используемыми при выводе уравнения переноса в сферически симметричной среде.

Поэтому уравнение (2.33) по своей структуре, по существу, не отличается от уравнения (2.28), и его можно решить столь же легко.

*Упражнение 2.3.* а) Рассмотреть атмосферу, которая является аксиально симметричной, но не является сферически симметричной (например, у звезды, сплюснутой из-за вращения). Показать, что в этом случае  $I(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = I(r, \Theta, \theta, \phi)$ . б) Показать, что в общем случае, когда  $I(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = I(r, \Theta, \Phi, \theta, \phi)$  (например, у звезды, сплюснутой из-за вращения и освещаемой звездой-спутником), уравнение переноса в сферических координатах с учетом всех пространственных переменных имеет вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mu \frac{\partial I}{\partial r} + \frac{\gamma}{r} \frac{\partial I}{\partial \Theta} + \frac{\sigma}{r \sin \Theta} \frac{\partial I}{\partial \Phi} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I}{\partial \mu} - \frac{\sigma \operatorname{ctg} \Theta}{r} \frac{\partial I}{\partial \Phi} = \eta - \chi I,$$

где

$$\gamma \equiv \cos \phi \sin \theta, \quad \sigma \equiv \sin \phi \sin \theta.$$

## ОПТИЧЕСКАЯ ГЛУБИНА И ФУНКЦИЯ ИСТОЧНИКОВ

В дальнейшем до конца § 2.2 мы ограничимся рассмотрением стационарного уравнения переноса для плоского случая [уравнение (2.28)]. Положим  $d\tau(z, \nu) \equiv -\chi(z, \nu) dz$ . Тем самым мы ввели *шкалу оптических глубин*  $\tau(z, \nu)$ . Величина  $\tau(z, \nu)$  определяет интегральное (общее) поглощение вещества по нормали:

$$\tau(z, \nu) = \int_z^{z_{\max}} \chi(z', \nu) dz'. \quad (2.34)$$

Знак минус в соотношении  $d\tau = -\chi dz$  введен для того, чтобы оптическая глубина возрастала *вглубь* атмосферы, причем на поверхности атмосферы (при  $z = z_{\max}$ ) она равна нулю. Тем самым эта величина служит мерой того, до какой глубины будет просматривать вещество внешний наблюдатель [см. формулы (2.47) и (2.52)]. Вспоминая, что  $\chi^{-1}$  представляет собой среднюю длину свободного пробега фотона, легко понять, что  $\tau(z, \nu)$  есть расстояние от  $z_{\max}$  до  $z$ , выраженное в длинах свободного пробега фотона частоты  $\nu$ . Далее, назовем *функцией источников* отношение полного коэффициента излучения к полному коэффициенту поглощения:

$$S(z, \nu) = \eta(z, \nu) / \chi(z, \nu). \quad (2.35)$$

Для упрощения обозначений не будем пока указывать зависимости от  $z$  и  $\mu$ , а зависимость от частоты будем обозначать индексом  $\nu$ . Тогда уравнение переноса запишется в стандартной форме

$$\mu(\partial I_\nu / \partial \tau_\nu) = I_\nu - S_\nu. \quad (2.36)$$

Принимая во внимание то, о чем говорилось в § 2.1, можно написать некоторые стандартные выражения для функции источников, которыми мы воспользуемся, чтобы обсудить методы решения уравнения (2.36). Предположим сначала, что имеет место строгое ЛТР. Тогда, согласно соотношению (2.6),

$$S_\nu = B_\nu. \quad (2.37)$$

Если мы имеем некоторую комбинацию теплового поглощения и теплового излучения плюс вклад от члена, учитывающего монохроматическое когерентное изотропное рассеяние в континууме (например, за счет томсоновского рассеяния на свободных электронах или за счет рэлеевского рассеяния), то можно написать

$$\chi_\nu = k_\nu + \sigma_\nu; \quad (2.38)$$

тогда

$$S_\nu = (k_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu) / (k_\nu + \sigma_\nu). \quad (2.39)$$

Для спектральной линии, налагающейся на континуум, имеем

$$\chi_\nu = \chi_c + \chi_l(\nu) = \chi_c + \chi_l \phi_\nu, \quad (2.40)$$

где  $\chi_c$  и  $\chi_l$  коэффициенты поглощения в континууме и в линии соответственно. Если принять, что доля  $\varepsilon$  излучения в линии обусловлена тепловыми процессами, а доля  $1 - \varepsilon$  — рассеянием с полным перераспределением по частотам [см. формулу (2.15)], то можно написать

$$\eta_\nu = \chi_c B_\nu + \chi_l \phi_\nu [\varepsilon B_\nu + (1 - \varepsilon) \int \phi_\nu J_\nu d\nu], \quad (2.41)$$

и тогда

$$\begin{aligned} S_\nu &= \frac{r + \varepsilon \phi_\nu}{r + \phi_\nu} B_\nu + \frac{(1 - \varepsilon) \phi_\nu}{r + \phi_\nu} \int \phi_\nu J_\nu d\nu = \\ &= \xi_\nu B_\nu + (1 - \xi_\nu) \int \phi_\nu J_\nu d\nu, \end{aligned} \quad (2.42)$$

где  $r \equiv \chi_c / \chi_l$ . (В пределах линии величины, описывающие континуум, можно считать не зависящими от частоты.) Формулы (2.39) и (2.42) иллюстрируют появление в явном виде в выражении для

функции источников интегралов от интенсивности по углам и по частоте. Это свидетельствует о том, что уравнение переноса является интегро-дифференциальным. Следует подчеркнуть, что функции источников, даваемые выражениями (2.37), (2.39) и (2.42), — всего лишь *иллюстрации*. Они написаны по сути дела на основе эвристических соображений, а физически строгий их вывод можно будет дать только после того, как будут получены уравнения статистического равновесия (гл. 5).

### ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Чтобы решить уравнение переноса, нужно задать *граничные условия*. Для астрофизики фундаментальное значение имеют два случая: а) *конечный слой* (плоская геометрия) или *оболочка* (сферическая геометрия) конечной толщины и б) *среда* (например, звездная атмосфера), имеющая по одну сторону свободную границу и настолько толстая оптически, что по другую сторону ее можно считать простирающейся до бесконечности, — так называемая *полу-бесконечная атмосфера*.

Для конечного слоя геометрической толщины  $Z$  и оптической толщины  $T_v$  (причем оптическая глубина отсчитывается от границы, обращенной к наблюдателю) мы получим единственное решение, если заданы интенсивности излучения, падающего на слой с обеих сторон. Обозначив через  $\theta$  угол между лучом и нормалью, направленной к наблюдателю, и положив  $\mu = \cos\theta$ , введем функции  $I^+$  и  $I^-$  следующим образом:

на верхней границе

$$I(0, \mu, \nu) = I^-(\mu, \nu) \quad -1 \leq \mu \leq 0; \quad (2.43)$$

на нижней границе

$$I(T_v, \mu, \nu) = I^+(\mu, \nu), \quad 0 \leq \mu \leq 1. \quad (2.44)$$

Определение (2.43) сохраняет силу и для оболочки (с наружным радиусом  $R$  и внутренним радиусом  $r_c$ ) при  $r = R$ .

*Упражнение 2.4.* а) Показать, что на внутренней поверхности сферической оболочки (при  $r = r_c$ ) граничное условие имеет вид  $I(r_c, +\mu, \nu) = I(r_c, -\mu, \nu)$ , если эта оболочка полая. Это так называемое граничное условие Милна для планетарной туманности. б) Если в центре полости имеется *точечный источник* (звезда), испускающий излучение интенсивности  $I_0$ , указанное в (а) граничное



условие надо дополнить требованием  $I(r_c, \mu, \nu) = I_0(\nu)\delta(\mu - 1)$ .  
 в) Обобщить результаты (а) и (б) на случай, когда внутри оболочки имеется непрозрачный источник радиуса  $r_*$  ( $r_* \leq r_c$ ), испускающий излучение интенсивности  $I_0(\mu', \nu)$ , где  $\mu'$  — косинус угла выхода излучения с поверхности непрозрачного источника. Этот случай служит моделью оболочки вокруг звезды. г) Показать, что в случае (а) поток тождественно равен нулю во всех точках с  $r \leq r_c$ .

В случае полубесконечной среды следует задать интенсивность излучения, падающего на ее верхнюю границу [формула (2.43)]. При рассмотрении звездных атмосфер обычно принимают  $I^- = 0$  (очевидно, что так *нельзя* поступать, например, в случае двойной звезды). В качестве граничного условия на нижней границе вместо (2.44) при аналитических исследованиях нужно налагать ограничение на скорость расходимости интенсивности при  $\tau_\nu \rightarrow \infty$ . В частности, мы будем требовать, чтобы

$$\lim_{\tau_\nu \rightarrow \infty} I(\tau_\nu, \mu, \nu)e^{-\tau_\nu/\mu} = 0. \quad (2.45)$$

Причина выбора именно такого условия станет ясна из последующего обсуждения. Другая возможность состоит в том, чтобы на больших глубинах в атмосфере задать выражение  $I(\tau_\nu, \mu, \nu)$  через *локальное* значение  $S(\nu)$  и градиент функции источников. Можно задать и *поток*. Эти условия естественным образом вытекают из физических соображений при *диффузионном режиме*, имеющем место на глубинах, больших по сравнению со средней длиной свободного пробега фотона.

#### ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ

Прежде чем приводить формальное решение уравнения переноса, полезно рассмотреть несколько простых примеров для случая плоской геометрии.

а) Предположим, что среда представляет собой вакуум. Тогда  $\chi_\nu = \eta_\nu = 0$ , и уравнение (2.28) принимает вид  $\partial I_\nu / \partial z = 0$ , откуда  $I_\nu = \text{const}$ . Этот результат находится в согласии с доказанной в §1.1 неизменностью удельной интенсивности при отсутствии источников и стоков энергии.

б) Предположим, что вещество на частоте  $\nu$  излучает, но не поглощает. Тогда уравнение (2.28) имеет вид  $\mu \partial I_\nu / \partial z = \eta_\nu$ , и интен-

сивность излучения, выходящего из слоя конечной толщины, равна

$$I(Z, \mu, \nu) = \frac{1}{\mu} \int_0^Z \eta(z, \nu) dz + I^+(0, \mu, \nu). \quad (2.46)$$

Такая физическая ситуация имеет место при формировании запрещенных линий в туманностях. Атомы могут возбуждаться, переходя на *метастабильные уровни* за счет столкновений. Поскольку плотности в туманностях очень низки, вероятность того, что произойдет еще одно столкновение, которое вызовет переход вниз, очень мала. Поэтому атомы могут долгое время оставаться на метастабильных уровнях, не подвергаясь внешним воздействиям, что ведет к накоплению на этих уровнях большого числа атомов. В конце концов некоторые из них совершают «запрещенные» переходы вниз, имеющие очень малую, но все же ненулевую вероятность. При этом излучаются фотоны. Поскольку линия запрещенная, вероятность поглощения пренебрежимо мала, и фотон выходит из среды. Таким образом, фотоны рождаются за счет тепловой энергии газа, а их гибели из-за поглощения не происходит.

в) Предположим, что вещество поглощает излучение, но не испускает его. Тогда  $\mu \partial I_\nu / \partial z = -\chi_\nu I_\nu$ , и если положить  $d\tau_\nu = \chi_\nu dz$ , то интенсивность излучения, выходящего из слоя конечной оптической толщины  $T_\nu$ , равна

$$I(0, \mu, \nu) = I^+(T_\nu, \mu, \nu) \exp(-T_\nu/\mu). \quad (2.47)$$

Формула (2.47) применима, например, к излучению, проходящему через фильтр, в котором фотоны поглощаются, переизлучаясь в какой-то другой частоте (например, в виде теплового излучения в далекой инфракрасной области) или гибнут в результате поглощения и их энергия переходит в кинетическую энергию частиц поглощающей среды.

#### ФОРМАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ

Получим теперь формальное решение уравнения переноса. Ограничимся случаем плоской геометрии. Если считать  $S_\nu$  заданным, то уравнение (2.36) — это линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами, и поэтому у него должен существовать интегрирующий множитель. Легко показать, что этот множитель равен  $\exp(-\tau_\nu/\mu)$ , так что

$$\partial (I_\nu \exp(-\tau_\nu/\mu)) / \partial \tau_\nu = -\mu^{-1} S_\nu \exp(-\tau_\nu/\mu). \quad (2.48)$$

Интегрирование уравнения (2.48) дает

$$I(\tau_1, \mu, \nu) = I(\tau_2, \mu, \nu) \exp[-(\tau_2 - \tau_1)/\mu] + \frac{1}{\mu} \int_{\tau_1}^{\tau_2} S_\nu(t) \exp[-(t - \tau_1)/\mu] dt. \quad (2.49)$$

Если  $S_\nu$  известно, то формула (2.49) дает полное решение задачи о переносе излучения в плоском случае.

Формулу (2.49) можно применить к *произвольной внутренней точке полубесконечной атмосферы*. При  $\mu \geq 0$  (восходящее излучение) положим  $\tau_1 = \tau_\nu$  и  $\tau_2 = \infty$  и наложим на поведение интенсивности на бесконечности ограничение, выражаемое соотношением (2.45). В результате получим

$$I(\tau_\nu, \mu, \nu) = \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t) \exp[-(t - \tau_\nu)/\mu] dt / \mu, \quad 0 \leq \mu \leq 1. \quad (2.50)$$

Для нисходящего излучения ( $-1 \leq \mu \leq 0$ ) положим  $\tau_2 = 0$  и воспользуемся граничным условием на верхней границе  $I^- = 0$ . Тогда получим

$$I(\tau_\nu, \mu, \nu) = \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t) \exp[-(\tau_\nu - t)/(-\mu)] dt / (-\mu), \quad -1 \leq \mu \leq 0. \quad (2.51)$$

Один из наиболее важных частных случаев формулы (2.50) — это выражение для *интенсивности выходящего излучения*, которое видит внешний наблюдатель ( $\tau_\nu = 0$ ):

$$I(0, \mu, \nu) = \int_0^{\infty} S_\nu(t) \exp(-t/\mu) dt / \mu. \quad (2.52)$$

Физический смысл формулы (2.52) состоит в том, что интенсивность выходящего излучения представляет собой взвешенное среднее от функции источников по лучу зрения. Весовой функцией служит та доля энергии, излучаемой на каждой данной глубине  $t$ , которая доходит до поверхности вдоль наклонного луча (оптическая толщина вдоль которого равна  $t/\mu$ ). С математической точки зрения формула (2.52) показывает, что интенсивность излучения явля-

ется преобразованием Лапласа от функции источников — факт, которым в задачах некоторых типов можно воспользоваться для нахождения  $S$ .

Многое можно понять, если принять, что функция источника является линейной функцией глубины:  $S_\nu(\tau_\nu) = S_{0\nu} + S_{1\nu}\tau_\nu$ . Формула (2.52) дает тогда так называемое соотношение Эддингтона — Барбье

$$I(0, \mu, \nu) = S_{0\nu} + S_{1\nu}\mu = S_\nu(\tau_\nu = \mu). \quad (2.53)$$

В силу этого соотношения интенсивность выходящего излучения совпадает со значением функции источников на оптическом расстоянии вдоль луча зрения, примерно равном единице (напомним, что  $\tau_\nu$  — это оптическая глубина вдоль нормали, так что единичное оптическое расстояние вдоль наклонного луча, идущего под углом  $\arccos \mu$ , достигается при  $\tau_\nu = \mu$ ). Соотношение Эддингтона — Барбье широко использовалось при эмпирическом анализе спектров Солнца и звезд. Оно служит основой многих методов интерпретации спектров. В случае Солнца, когда на любой фиксированной частоте можно наблюдать изменение интенсивности от центра диска ( $\mu = 1$ ) к краю ( $\mu = 0$ ), возможно (в принципе) получить информацию о  $S_\nu(\tau_\nu)$  при  $0 \leq \tau_\nu \leq 1$ . Для звезд наблюдать изменение интенсивности от центра диска к краю нельзя, но ясно, что если проводить наблюдения на разных частотах (например, в пределах спектральной линии), то единичная оптическая глубина будет достигаться в более высоких слоях на тех частотах, где непрозрачность высока (например, в центре линии), и в более глубоких слоях — на тех частотах, где непрозрачность низкая (например, в крыльях линии). Если при этом известна зависимость  $S_\nu$  от частоты, то можно извлечь информацию о ее изменении с глубиной. Например, при ЛТР  $S_\nu = B_\nu$ , и изменением  $S_\nu$  с частотой в пределах узкой линии можно пренебречь. Поэтому в принципе можно получить ход температуры с глубиной. Чрезвычайно полезное в принципиальном отношении, соотношение Эддингтона — Барбье не должно применяться без разбора, и использовать его буквально, т.е. утверждать, что  $I(0, \mu, \nu)$  совпадает с  $S_\nu(\tau_\nu = \mu)$ , нельзя, так как а) значительный вклад в  $I_\nu(0)$  всегда дают и другие глубины (так что в задаче по самой ее сути имеется некоторая неопределенность) и б) предположения, на которых оно основано, могут не выполняться. Подробное обсуждение границ применимости соотношения Эддингтона — Барбье можно найти в [18], стр. 121 — 130, и в [20], стр. 20 — 30.

**Упражнение 2.5.** Примем, что функцию источников можно представить в виде разложения в степенной ряд с центром в точке  $\tau_0$ , именно

$$S(\tau) \approx S(\tau_0) + S'(\tau_0)(\tau - \tau_0) + S''(\tau_0)(\tau - \tau_0)^2/2.$$

Вычислить интенсивность выходящего излучения и показать, что выбор  $\tau_0 = \mu$  является оптимальным в том смысле, что он *обращает в нуль* вклад в  $I(0, \mu)$  от  $S'$  и минимизирует вклад от  $S''$ .

Другой пример, который поучительно рассмотреть, — это конечный слой оптической толщины  $T$ , в пределах которого  $S$  постоянно и на который извне излучение не падает. Интенсивность излучения, выходящего по нормали, равна  $I(0, 1) = S(1 - e^{-T})$ . При  $T \gg 1$  имеем  $I = S$ . Этот результат физически вполне понятен, так как излучение, которое покидает звезду, состоит из фотонов, испускаемых на расстояниях, не превышающих средней длины свободного пробега от границы слоя. Коэффициент излучения равен  $\eta$ , а средняя длина свободного пробега есть  $1/\chi$ , и поэтому  $I = \eta/\chi = S$ . При  $T \ll 1$  имеем  $e^{-T} \approx 1 - T$ , и  $I \approx ST$ . Полученный результат тоже физически ясен: в том случае, когда оптическая толщина мала, просматривается весь объем. Поэтому энергия, излучаемая с единицы поверхности, должна равняться коэффициенту излучения  $\eta$  (который рассчитывается на единицу объема), умноженному на полную длину пути вдоль луча зрения  $Z$ , или  $I = \eta Z = (n/\chi)(\chi Z) = ST$ . Отметим, что этот результат находится в согласии с формулой (2.46).

#### УРАВНЕНИЯ ШВАРЦШИЛЬДА — МИЛНА

Интегрируя по углам удельную интенсивность излучения, даваемую формальным решением уравнения переноса, можно получить компактные выражения для моментов интенсивности по угловой переменной. Так, подставив выражения (2.50) и (2.51) в формулу (1.4), для средней интенсивности получим

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\tau_\nu, \mu) d\mu = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 d\mu \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t) \times \right. \\ \left. \times \exp[-(t - \tau_\nu)/\mu] \frac{dt}{\mu} + \int_{-1}^0 d\mu \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t) \exp[-(\tau_\nu - t)/(-\mu)] \frac{dt}{(-\mu)} \right\}. \quad (2.54)$$

Выражение (2.54) приводится к более удобной форме, если изменить порядок интегрирования и сделать подстановку  $w = \pm 1/\mu$  соответственно в первом и втором интегралах. Тогда

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_{\tau_\nu}^{\infty} dt S_\nu(t) \int_1^{\infty} dw \frac{\exp[-w(t - \tau_\nu)]}{w} + \\ + \int_0^{\tau_\nu} dt S_\nu(t) \int_1^{\infty} dw \frac{\exp[-w(\tau_\nu - t)]}{w}. \quad (2.55)$$

Интегралы по  $w$  имеют стандартный вид и называются первой *и.и.тегральной показательной функцией*. Вообще,  $n$ -я интегральная показательная функция для любого натурального значения  $n$  определяется так:

$$E_n(x) \equiv \int_1^{\infty} t^{-n} e^{-xt} dt = x^{n-1} \int_x^{\infty} t^{-n} e^{-t} dt. \quad (2.56)$$

С помощью  $E_1(x)$  формулу (2.55) можно переписать в виде

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S_\nu(t_\nu) E_1(|t_\nu - \tau_\nu|) dt_\nu. \quad (2.57)$$

Формула (2.57) была впервые получена К. Шварцшильдом и носит его имя. Статья Шварцшильда [416], стр. 35, является одной из основополагающих работ по теории переноса излучения. Она заслуживает внимательного чтения. Поскольку интеграл, фигурирующий в формуле (2.57), очень часто встречается в теории переноса излучения, для него используют операторное обозначение:

$$\Lambda_\tau[f(t)] \equiv \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(t) E_1(|t - \tau|) dt. \quad (2.58)$$

**Упражнение 2.6.** а) Показать, что выражения (2.50) и (2.51) эквивалентны следующему:

$$I(r, n) = \int_0^{s_{\max}} \eta(r') \exp[-\tau(r, r')] d|r' - r|,$$

где

$$r'(s) \equiv r - s\mathbf{n}, \quad \tau(r, r') \equiv \int_0^{r'-r} \chi[r'(s)] ds$$

и  $s_{\max}$  — расстояние до границы вдоль луча, распространяющегося в направлении  $-\mathbf{n}$ . В полубесконечной среде для лучей, направленных наружу,  $s_{\max} \equiv \infty$ . б) Путем подстановки приведенного выше выражения в определение  $J(r)$  [формула (1.3)], получить *уравнение Пайерлса*:

$$J(r) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left\{ \eta(r') \exp[-\tau(r', r)] / |r' - r|^2 \right\} d^3r',$$

где  $V$  — объем, содержащий вещество.

Тем же способом, которым была получена формула (2.57), можно вывести следующие выражения для  $F_\nu$  и  $K_\nu$ , впервые найденные Милном [416], стр. 77:

$$\begin{aligned} F_\nu(\tau_\nu) &:: 2 \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t_\nu) E_2(t_\nu - \tau_\nu) dt_\nu - \\ &- 2 \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t_\nu) E_2(\tau_\nu - t_\nu) dt_\nu, \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$K_\nu(\tau_\nu) \equiv \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S_\nu(t_\nu) E_3(|t_\nu - \tau_\nu|) dt_\nu. \quad (2.60)$$

Можно ввести и соответствующие операторы:

$$\begin{aligned} \Phi_\nu[f(t)] &\equiv 2 \int_\tau^{\infty} f(t) E_2(t - \tau) dt - \\ &- 2 \int_0^\tau f(t) E_2(\tau - t) dt, \end{aligned} \quad (2.61)$$

$$X_\tau[f(t)] \equiv 2 \int_0^\infty f(t) E_3(|t - \tau|) dt. \quad (2.62)$$

*Упражнение 2.7.* Вывести формулы (2.59) и (2.60).

Математические свойства интегральных показательных функций подробно обсуждаются в [4], стр. 228 — 231, и в [161], приложение 1; свойства операторов  $\Lambda$ ,  $\Phi$  и  $X$  рассмотрены в [361], гл. 2. Некоторые из наиболее важных результатов указаны в следующем упражнении.

*Упражнение 2.8.* а) Дифференцированием формулы (2.56) доказать, что  $E'_n(x) = -E_{n-1}(x)$ . б) Преобразовав выражение (2.56) интегрированием по частям, показать, что  $E_n(x) = [e^{-x} - xE_{n-1}(x)]/(n-1)$  при  $n > 1$ . в) Показать, что асимптотическое поведение  $E_n(x)$  при  $x \gg 1$  таково:  $E_n(x) \sim e^{-x}/x$ .

Физическая суть явлений переноса излучения становится яснее, если рассмотреть линейную по  $\tau$  функцию источников  $S(\tau) = a + b\tau$ . Если воспользоваться результатами, полученными при выполнении упражнения 2.8, легко показать, что

$$\Lambda_\tau(a + b\tau) = a + b\tau + [bE_3(\tau) - aE_2(\tau)]/2, \quad (2.63)$$

$$\Phi_\tau(a + b\tau) = (4/3)b + 2[aE_3(\tau) - bE_4(\tau)], \quad (2.64)$$

$$X_\tau(a + b\tau) = (4/3)(a + b\tau) + 2[bE_3(\tau) - aE_4(\tau)]. \quad (2.65)$$

*Упражнение 2.9.* Убедиться в справедливости формул (2.63) — (2.65).

Из приведенных выражений (они будут использованы в гл. 3 и далее) следует ряд важных результатов, которые стоит отметить. Во-первых, поскольку интегральные показательные функции асимптотически стремятся к нулю как  $e^{-x}/x$ , из формулы (2.63) ясно, что  $J(\tau) = \Lambda_\tau(S)$  при  $\tau \gg 1$  должно быть очень близко к локальному значению  $S(\tau)$ . Иначе говоря, применение оператора  $\Lambda$  к линейной функции источников в предельном случае больших оптических глубин воспроизводит саму эту функцию источников. Напротив, на границе  $E_2(0) = 1$  и  $E_3(0) = 1/2$ , откуда  $\Lambda_0(S) = (a/2) + (b/4)$ . В частности, при  $b = 0$  имеем  $J(0) = a/2 = S/2$ . Физически это отражает тот факт, что  $J$  на поверхности есть среднее по двум полусфе-



рам: одной, в которой излучения нет (извне излучение не падает), и другой, в которой  $I = S$  (вследствие равенства нулю градиента  $S$ ). Когда градиент  $S$  не равен нулю,  $J(0)$  может быть как больше, так и меньше  $S(0)$ , в зависимости от знака и величины этого градиента. Вообще говоря, сильнее всего  $J$  будет отличаться от  $S$  на поверхности. Во-вторых, из формулы (2.64) следует, что  $H = b/3$  при  $\tau \gg 1$ . Это значит, что поток на больших глубинах зависит только от градиента функции источников (см. также § 2.5). Поток на поверхности равен  $H(0) = a/4 + b/6$ . Очевидно, что поток на поверхности будет тем больше, чем быстрее функция источников возрастает вглубь. Отметим также, что влияние градиента функции источников (т.е. зависимость от  $b$ ) на  $H(0)$  сильнее, чем на  $J(0)$ . (Почему?)

Наконец, следует подчеркнуть, что решение уравнения переноса, даваемое формулами (2.50) и (2.51) или (2.57) и (2.59), является лишь формальным, и его кажущаяся простота иллюзорна. Например, предположим, что функция источников содержит член, описывающий рассеяние, как в выражениях (2.39) или (2.42). Тогда ясно, что функция источников, которую нужно знать для расчета поля излучения, сама зависит от поля излучения, а потому и от решения уравнения переноса. В таких случаях получить  $I$  или  $J$  простой квадратурой нельзя, приходится находить решение некоторого *интегрального уравнения* или соответствующего ему дифференциального уравнения.

*Упражнение 2.10.* Предположим, что функция источников имеет вид (2.39). Показать, что  $J_\nu(\tau_\nu)$  удовлетворяет интегральному уравнению

$$J_\nu(\tau_\nu) = \Lambda_{\tau_\nu} [\rho_\nu(t_\nu) J_\nu(t_\nu)] + \Lambda_{\tau_\nu} \{ [1 - \rho_\nu(t_\nu)] B_\nu(t_\nu) \},$$

где

$$\rho_\nu \equiv \sigma_\nu / (k_\nu + \sigma_\nu).$$

Сложности такого рода возникают и тогда, когда на решения накладываются другие физические ограничения. Например, в §2.4 будет показано, что требование сохранения энергии ведет к тому,

что поле излучения и распределение температуры в атмосфере оказываются связанными между собой. Таким образом, даже если предположить, что имеет место строгое ЛТР, и поэтому положить  $S_\nu$  равным  $B_\nu$  и заранее считать его не зависящим от  $J_\nu$ , то, вообще говоря, пока поле излучения не найдено, определить ход температуры  $T(\tau_\nu)$ , а вместе с ним и  $B_\nu[T(\tau_\nu)]$ , нельзя. В этом случае функция источников, которую необходимо знать для расчета поля излучения, сама зависит от этого поля излучения. Когда рассматривается более общая ситуация, в которой существования ЛТР заранее не предполагается, эти проблемы становятся более тонкими и сложными, так как здесь уже свойства вещества (его поглощательная и излучательная способности и т.п.) непосредственно зависят от поля излучения, поскольку оно определяет населенности уровней атомов. Итак, проблема переноса излучения в реальных звездных атмосферах существенно нелинейна. Изложение методов анализа сложных взаимодействий только что описанного типа составляет основную часть этой книги.

### 2.3. Моменты уравнения переноса

Рассмотрение угловых моментов уравнения переноса дает результаты, имеющие глубокий физический смысл и очень полезные математически. Основное нестационарное уравнение переноса (2.26) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)}{\partial t} + \sum_j n_j \frac{\partial I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)}{\partial x_j} = \\ = \eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t), \end{aligned} \quad (2.66)$$

где  $x_j$  —  $j$ -я декартова координата. Чтобы получить моментное уравнение нулевого порядка, проинтегрируем уравнение (2.66) по всем телесным углам  $d\omega$  и воспользуемся обозначениями (1.4) и (1.19), что дает

$$\begin{aligned} \frac{4\pi}{c} \frac{\partial J(\mathbf{r}, \nu, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{r}, \nu, t) = \\ = \oint [\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)] d\omega. \end{aligned} \quad (2.67)$$