что поле излучения и распределение температуры в атмосфере оказываются связанными между собой. Таким образом, даже если предположить, что имеет место строгое ЛТР, и поэтому положить S_ν равным B_ν и заранее считать его не зависящим от J_ν, то, вообще говоря, пока поле излучения не найдено, определить ход температуры $T(\tau_\nu)$, а вместе с ним и $B_\nu[T(\tau_\nu)]$, нельзя. В этом случае функция источников, которую необходимо знать для расчета поля излучения, сама зависит от этого поля излучения. Когда рассматривается более общая ситуация, в которой существования ЛТР заранее не предполагается, эти проблемы становятся более тонкими и сложными, так как здесь уже свойства вещества (его поглощательная и излучательная способности и т.п.) непосредственно зависят от поля излучения, поскольку оно определяет населенности уровней атомов. Итак, проблема переноса излучения в реальных звездных атмосферах существенно нелинейна. Изложение методов анализа сложных взаимодействий только что описанного типа составляет основную часть этой книги.

2.3. Моменты уравнения переноса

Рассмотрение угловых моментов уравнения переноса дает результаты, имеющие глубокий физический смысл и очень полезные математически. Основное нестационарное уравнение переноса (2.26) можно переписать в виде

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)}{\partial t} + \sum_j n_j \frac{\partial I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)}{\partial x_j} = \eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t), \quad (2.66)$$

где x_j — j-я декартова координата. Чтобы получить моментное *уравнение нулевого порядка*, проинтегрируем уравнение (2.66) по всем телесным углам $d\omega$ и воспользуемся обозначениями (1.4) и (1.19), что дает

$$\frac{4\pi}{c}\frac{\partial J(\mathbf{r}, \nu, t)}{\partial t} + \nabla\cdot\mathcal{F}(\mathbf{r}, \nu, t) = \oint [\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)\, I\,(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)]\, d\omega. \quad (2.67)$$

Здесь учтена возможность того, что χ и η могут зависеть от углов (как это имеет место для движущихся сред). Если уравнение (2.67) проинтегрировать по всем частотам и воспользоваться формулой (1.8), найдем, что

$$\frac{\partial E_R(\mathbf{r}, t)}{dt} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{r}, t) =$$

$$= \int_0^\infty d\nu \oint d\omega \, [\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) \, I \, (\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)]. \quad (2.68)$$

Это *уравнение энергии* для поля излучения. Оно очень напоминает обычное уравнение энергии для движущейся непрерывной среды (см. §15.1). Все члены в этом уравнении имеют непосредственный физический смысл. Скорость изменения плотности лучистой энергии со временем равна а) полной энергии, поступающей в поле излучения за счет излучения вещества, минус б) полная энергия, поглощаемая веществом из поля излучения, минус в) отток энергии через поверхность, охватывающую элемент объема (дивергенция потока). Если среда *неподвижна*, то χ и η *изотропны*, и интегралы в правой части упрощаются, что дает

$$\frac{\partial E_R(\mathbf{r}, t)}{dt} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{r}, t) =$$

$$= 4\pi \int_0^\infty [\eta(\mathbf{r}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \nu, t) J(\mathbf{r}, \nu, t)] d\nu. \quad (2.69)$$

Для *стационарного* поля излучения в *одномерной плоской неподвижной среде* соотношение (2.67) приводится к стандартному результату

$$\partial H(z, \nu)/\partial z = \eta(z, \nu) - \chi(z, \nu) J(z, \nu) \quad (2.70)$$

или, если ввести более краткие обозначения и воспользоваться формулами (2.34) и (2.35),

$$\partial H_\nu/\partial \tau_\nu = J_\nu - S_\nu. \quad (2.71)$$

В случае сферической геометрии, воспользовавшись соответствующим выражением для дивергенции, найдем (для стационарной неподвижной атмосферы)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 H_\nu) = \eta_\nu - \chi_\nu J_\nu. \tag{2.72}$$

Соотношения (2.70) — (2.72) будут неоднократно использоваться при получении решений уравнения переноса, а соотношение (2.69) будет использовано при выводе уравнений радиационной гидродинамики (см. § 15.3).

Упражнение 2.11. Получить соотношение (2.72) непосредственно из уравнения (2.33).

Уравнение для момента первого порядка относительно i-й координатной оси получается путем умножения уравнения (2.66) на n_i и интегрирования по $d\omega/c$, что дает

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathscr{F}_i(\mathbf{r}, \nu, t)}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial P_{ij}(\mathbf{r}, \nu, t)}{\partial x_j} =$$
$$= \frac{1}{c}\oint [\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)] n_i d\omega, \tag{2.73}$$

или в векторных обозначениях

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\mathscr{F}}(\mathbf{r}, \nu, t)}{\partial t} + \nabla \mathrm{P}(\mathbf{r}, \nu, t) =$$
$$= \frac{1}{c}\ [\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)]\mathbf{n} d\omega. \tag{2.74}$$

Вспоминая, что плотность импульса поля излучения равна $\mathbf{G}_R = \vec{\mathscr{F}}/c^2$ (см § 1.3), убеждаемся, что уравнение (2.74) аналогично гидродинамическим уравнениям движения. Его можно рассматривать как *уравнение движения*, выражающее баланс импульса поля излучения на частоте ν. Выполнив интегрирование по всем частотам, получаем *уравнение для полного импульса излучения*, которое находит применение в уравнениях радиационной гидродинамики (см. гл. 15):

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\mathscr{F}}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathrm{P}(\mathbf{r}, t) =$$

$$= \frac{1}{c}\int_0^\infty d\nu \oint d\omega\, [\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)]\, \mathbf{n}. \quad (2.75)$$

Согласно уравнению (2.75) скорость изменения плотности полного импульса поля излучения со временем равна взятой с обратным знаком силе, действующей на объем вследствие радиационных напряжений (см. § 1.4), плюс член, который описывает приобретение (или потерю) импульса объемом в результате взаимодействия с веществом [дальнейшее обсуждение см. после формулы (2.76)]. Уравнение (2.75), как и (2.68), учитывает возможность того, что вещество движется. Если среда неподвижна, то интеграл от η обращается в нуль (это просто означает, что суммарная потеря импульса веществом за счет изотропного излучения равна нулю, что физически очевидно), а второй член приводится к интегралу от потока

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathsf{P}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\int_0^\infty \chi(\mathbf{r}, \nu, t)\mathcal{F}(\mathbf{r}, \nu, t) d\nu. \quad (2.76)$$

Физический смысл интеграла в правой части уравнения (2.76) легко истолковать следующим образом. Рассмотрим пучок излучения интенсивности I, падающий на элемент поглощающего вещества с поперечным сечением dS. Излучение падает под углом θ к нормали к dS. Энергия, поглощаемая веществом с коэффициентом поглощения χ в пределах телесного угла $d\omega$ в интервале частот $d\nu$ за время dt, равна

$$dE = \chi I dS \cos\theta\, ds d\omega d\nu dt,$$

где $ds = dz/\cos\theta$ — длина пути наклонного луча через элемент, имеющий по нормали толщину dz. Компонент импульса, передаваемый веществу в направлении нормали, равен $dE\cos\theta/c$. Поэтому импульс, приобретаемый единицей объема за единицу времени, составляет

$$(1/c)(\cos\theta dE)/dz dS dt = (1/c)\chi I \cos\theta\, d\omega d\nu.$$

Интегрируя по всем углам и частотам, получаем в точности тот интеграл, который стоит в формуле (2.76). Тем самым мы показали, что этот интеграл представляет собой *силу, с которой излучение действует на вещество, находящееся в единичном объеме.*

Для *стационарного* поля излучения в *одномерной неподвижной* *плоскопараллельной среде* соотношение (2.74) переходит в следующее:

$$\frac{\partial p_R(z, \nu)}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c}\chi(z, \nu)H(z, \nu), \tag{2.77а}$$

или, если его проинтегрировать по всем частотам,

$$\frac{\partial p_R(z)}{\partial z} = -\frac{4\pi}{c}\int_0^\infty \chi(z, \nu)H(z, \nu)d\nu. \tag{2.77б}$$

Иначе это соотношение можно записать так:

$$\frac{\partial K(z, \nu)}{\partial z} = \chi(z, \nu)H(z, \nu), \tag{2.78}$$

или

$$\partial K_\nu/\partial \tau_\nu = H_\nu. \tag{2.79}$$

При сохранении тех же предположений в случае *сферической геометрии* уравнение (2.74) можно привести к виду

$$\frac{\partial K_\nu}{\partial r} + \frac{1}{r}(3K_\nu - J_\nu) = \chi_\nu H_\nu, \tag{2.80}$$

если воспользоваться выражением для $(\nabla \cdot \mathrm{P})_r$, указанным в упражнении 1.10.

Упражнение 2.12. Вывести уравнение (2.80) непосредственно из (2.33).

До сих пор моментные уравнения рассматривались нами в первую очередь с точки зрения их динамического смысла. Однако в стационарном случае их можно использовать и как средство для решения уравнения переноса. Вводя моменты, мы избавляемся от угловой переменной, и поэтому размерность подлежащей решению системы уменьшается. Как было показано в §2.2, среднюю интенсивность можно определить путем решения некоторого интегрального уравнения (см. упражнение 2.10). Это дает функцию источников, по которой с помощью квадратур можно определить моменты более высоких порядков (например, поток). Возникает вопрос, нельзя ли моментные уравнения свести к дифференциальным уравнениям. Рассмотрение уравнений (2.71) и (2.79) сразу же выявляет существенную трудность: уравнение для момента порядка n всегда содержит момент порядка $n+1$, и поэтому число неизвестных функций всегда на единицу больше числа имеющихся для их определения уравнений. Эта трудность известна под названием *проблемы замыкания*: чтобы «замкнуть» систему, нужно каким-то образом получить одно *дополнительное* соотношение между моментами. Для решения уравнений переноса существуют разнообразные методы, использующие моменты произвольно высокого порядка, в которых условия замыкания вводятся применительно к случаю (см., например, [361], стр. 90 — 101; [365]). Однако в этой книге мы ограничимся только моментами J_ν, H_ν и K_ν (исключение встречается в §14.3), и система замыкается введением выражения K_ν через J_ν и переменный эддингтоновский множитель f_ν, именно $K_\nu = f_\nu J_\nu$. Множитель f_ν находится путем *итераций* и позволяет получить *приближенное* условие замыкания точной системы (если итерации *сходятся*, то замыкание также оказывается точным). С другой стороны, в §6.3 будет показано, что уравнение переноса можно переписать в форме, содержащей *зависящие от угла* переменные, напоминающие среднюю интенсивность и поток, и что можно получить *точное замыкание* для некоторого уравнения, содержащего угловую переменную, напоминающего уравнения для моментов. Это уравнение легко поддается дискретизации и решается численно. Резюмируя, можно сказать, что решение уравнения переноса с помощью моментов или эквивалентных им переменных удается осуществить с помощью обладающей большой общностью и силой методики, использующей дифференциальные уравнения

2.4. Условие лучистого равновесия

Глубоко в недрах звезды в ходе ядерных реакций высвобождается энергия, которая диффундирует наружу и в конце концов проходит через атмосферу звезды и выходит наружу, давая наблюдаемое излучение. У нормальных звезд в самой атмосфере энергия не генерируется. Через атмосферу вся энергия, которая в нее поступает, просто *переносится* наружу. Когда процесс переноса не зависит от времени, распределение излучения по частотам и то, какая доля переносимой энергии приходится на лучистый и какая — на иные механизмы переноса, может с глубиной изменяться, но *полный поток энергии строго сохраняется*.

В тех слоях атмосферы, где происходит формирование спектра, возможны два основных механизма переноса энергии — лучистый и конвективный (или какой-нибудь иной гидродинамический меха-