содержит момент порядка $n+1$, и поэтому число неизвестных функций всегда на единицу больше числа имеющихся для их определения уравнений. Эта трудность известна под названием *проблемы замыкания*: чтобы «замкнуть» систему, нужно каким-то образом получить одно *дополнительное* соотношение между моментами. Для решения уравнений переноса существуют разнообразные методы, использующие моменты произвольно высокого порядка, в которых условия замыкания вводятся применительно к случаю (см., например, [361], стр. 90 — 101; [365]). Однако в этой книге мы ограничимся только моментами J_ν, H_ν и K_ν (исключение встречается в §14.3), и система замыкается введением выражения K_ν через J_ν и переменный эддингтоновский множитель f_ν, именно $K_\nu = f_\nu J_\nu$. Множитель f_ν находится путем *итераций* и позволяет получить *приближенное* условие замыкания точной системы (если итерации *сходятся*, то замыкание также оказывается точным). С другой стороны, в §6.3 будет показано, что уравнение переноса можно переписать в форме, содержащей *зависящие от угла* переменные, напоминающие среднюю интенсивность и поток, и что можно получить *точное замыкание* для некоторого уравнения, содержащего угловую переменную, напоминающего уравнения для моментов. Это уравнение легко поддается дискретизации и решается численно. Резюмируя, можно сказать, что решение уравнения переноса с помощью моментов или эквивалентных им переменных удается осуществить с помощью обладающей большой общностью и силой методики, использующей дифференциальные уравнения

2.4. Условие лучистого равновесия

Глубоко в недрах звезды в ходе ядерных реакций высвобождается энергия, которая диффундирует наружу и в конце концов проходит через атмосферу звезды и выходит наружу, давая наблюдаемое излучение. У нормальных звезд в самой атмосфере энергия не генерируется. Через атмосферу вся энергия, которая в нее поступает, просто *переносится* наружу. Когда процесс переноса не зависит от времени, распределение излучения по частотам и то, какая доля переносимой энергии приходится на лучистый и какая — на иные механизмы переноса, может с глубиной изменяться, но *полный поток энергии строго сохраняется.*

В тех слоях атмосферы, где происходит формирование спектра, возможны два основных механизма переноса энергии — лучистый и конвективный (или какой-нибудь иной гидродинамический механизм). Теплопроводность в этих слоях мала, и ею можно пренебречь (она становится существенной в *коронах*, при температурах порядка 10^6 К). Когда вся энергия переносится излучением, то говорят, что имеет место *лучистое равновесие*, а в случае чисто конвективного переноса — *конвективное равновесие*. Будет ли лучистый перенос преобладать над конвекцией или нет, определяется *устойчивостью* атмосферы относительно возникновения конвективных движений.

Критерий устойчивости лучистого переноса был впервые сформулирован К. Шварцшильдом [416], стр. 25, в одной из основополагающих статей по теории переноса излучения. Шварцшильд сумел убедительно показать, что главным механизмом переноса энергии в фотосфере Солнца служит лучистый перенос. Со времени появления его работы было выполнено несколько исследований устойчивости лучистого переноса для звезд различных типов. Сводку результатов см. в [638], стр. 215; [11], стр. 449; [654], стр. 432. Для звезд, подобных Солнцу, основное заключение сводится к тому, что до оптической глубины в континууме порядка единицы имеет место лучистое равновесие, а на больших глубинах атмосфера становится конвективно неустойчивой. Конвективные зоны, лежащие под наружной лучистой зоной, существуют у всех звезд спектрального типа позже примерно F 5. У звезд более ранних спектральных типов лучистое равновесие имеется во всей наружной оболочке звезды. В этой книге основное внимание уделяется звездам ранних типов, и соответственно основной упор делается на изучение режима при лучистом равновесии. Теория конвективного переноса энергии в настоящее время еще недостаточно разработана, и мы изложим (§ 7.3) лишь *теорию длины пути перемешивания* — феноменологический подход, получивший широкое применение в астрофизике.

Рассмотрим теперь некоторые следствия наличия лучистого равновесия. Предположим, что среда неподвижна и поле излучения не зависит от времени. Из приведенного в §2.1 обсуждения ясно, что полная энергия, выводимая из поля излучения, равна

$$\int_0^\infty d\nu \oint d\omega \chi(\mathbf{r}, \nu) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu) = 4\pi \int_0^\infty \chi(\mathbf{r}, \nu) J(\mathbf{r}, \nu) d\nu, \tag{2.81}$$

где через χ обозначен полный коэффициент ослабления. Полная энергия, поставляемая веществом в поле излучения, равна [см. формулу (2.35)]

$$\int_0^\infty d\nu \oint d\omega \eta(\mathbf{r}, \nu) = 4\pi \int_0^\infty \chi(\mathbf{r}, \nu) S(\mathbf{r}, \nu) d\nu. \tag{2.82}$$

Условие лучистого равновесия требует, чтобы полная энергия, поглощаемая в некотором заданном объеме с веществом, была равна полной излучаемой им энергии. Поэтому в каждой точке атмосферы

$$4\pi \int_0^\infty [\eta(\mathbf{r}, \nu) - \chi(\mathbf{r}, \nu) J(\mathbf{r}, \nu)] d\nu = 0, \tag{2.83а}$$

или

$$4\pi \int_0^\infty \chi(\mathbf{r}, \nu) [S(\mathbf{r}, \nu) - J(\mathbf{r}, \nu)] d\nu = 0. \tag{2.83б}$$

Упражнение 2.13. Предположим, что S_ν дается выражением (2.39). Показать, что в уравнении лучистого равновесия члены, описывающие рассеяние, сокращаются, и оно принимает вид

$$\int_0^\infty k_\nu B_\nu(T) d\nu = \int_0^\infty k_\nu J_\nu d\nu.$$

При учете уравнения (2.83) соотношение (2.69) можно переписать в другой форме:

$$\nabla \cdot \mathscr{F} = 0. \tag{2.84}$$

Итак, *в случае плоской геометрии условие лучистого равновесия эквивалентно требованию, чтобы производная потока по глубине равнялась нулю, т.е. требованию, чтобы поток был постоянным.* Физический смысл соотношений (2.83) и (2.84) один и тот же, но математически условие $\mathscr{F} = \text{const}$ заметно отличается от уравнений (2.83). При построении моделей атмосфер можно пользоваться любым из этих двух соотношений.

Поскольку полный поток в плоской атмосфере постоянен, его можно использовать в качестве параметра, описывающего атмосферу. Часто используют эквивалентную потоку величину — *эффек-*

тивную температуру. Из упражнения 1.6 нам известно, что интегральный поток с поверхности черного тела с температурой $T(K)$ равен $\mathscr{F}_{BB} = \sigma_R T^4$. Хотя излучение, испускаемое звездой, никоим образом не является планковским, тем не менее принято вводить эффективную температуру, равную температуре абсолютно черного тела, испускающего такой же поток, как и звезда, т.е.

$$\sigma_R T^4_{\text{эфф}} \equiv \int_0^\infty \mathscr{F}_\nu d\nu = 4\pi \int_0^\infty H_\nu d\nu = L/4\pi R^2. \tag{2.85}$$

Здесь L — полная светимость и R — радиус звезды. Считается, что толщина атмосферы пренебрежимо мала по сравнению с R. Хотя $T_{\text{эфф}}$ не имеет прямого физического смысла, этот параметр удобен, чтобы характеризовать атмосферу, так как обычно действительная кинетическая температура T равна $T_{\text{эфф}}$ примерно на той глубине, откуда приходит излучение в континууме (т.е. на единичной оптической глубине на тех частотах, где непрозрачность минимальна).

В случае *сферической геометрии* соотношение (2.84) дает

$$r^2\mathscr{F} = \text{const} = L/4\pi. \tag{2.86}$$

В протяженной атмосфере однозначно выбрать радиус R и однозначно ввести значение $T_{\text{эфф}}$ оказывается уже невозможным. Поэтому в качестве определяющей величины следует рассматривать L или $r^2\mathscr{F}$. Однако иногда полагают $R = r(\tau_R = 2/3)$ и, пользуясь этим радиусом, вводят соответствующее значение «$T_{\text{эфф}}$». Здесь τ_R — *росселандова оптическая глубина* (см. §3.2).

Наконец, стоит вернуться к одному вопросу, который был поднят при обсуждении формального решения. Предположим, что непрозрачность k_ν не зависит от T. Тогда для физически разумных зависимостей k_ν от ν интеграл $\int k_\nu B_\nu(\tau) d\nu$ (дающий полную излучаемую тепловую энергию) будет монотонно возрастающей функцией T. Поэтому если фиксируется полное тепловое излучение на каком-то уровне, то тем самым фиксируется локальное значение T. Тогда из соотношения (2.83б) (и из результата, сформулированного в упражнении 2.13) ясно, что *локальное значение T* определяется средней интенсивностью, которая, как это следует из решения уравнения переноса, зависит от глобальных свойств атмосферы. Таким образом, температура в *данной* точке атмосферы в известной мере определяется температурой *во всех других* точках и в то же время сама дает вклад в установление поля температуры всюду в других местах. Эта *нелокальность* задачи является результатом лучистого переноса, в результате которого фотоны, перемещающиеся из одной точки среды в другую, приводят к появлению имеющей фундаментальное значение связи (или взаимозависимости) между свойствами среды в этих точках.

2.5. Диффузионное приближение

На больших глубинах в полубесконечной атмосфере свойства поля излучения и вид уравнения переноса становятся совсем простыми. Можно непосредственно получить асимптотическое решение, которое применимо во внутренних слоях звезды (разумеется, за исключением конвективных зон). Это решение одновременно дает внутреннее граничное условие в задаче о переносе излучения в звездной атмосфере. Рассмотрим сначала свойства поля излучения. На глубинах, значительно превышающих среднюю длину свободного пробега фотона, излучение практически заперто, оно становится почти изотропным и в конце концов приближается к термодинамически равновесному, так что $S_\nu \to B_\nu$. Выберем некоторую точку $\tau_\nu \gg 1$ в качестве начальной и разложим S_ν в степенной ряд:

$$S_\nu(t_\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (d^n B_\nu / d\tau_\nu^n)(t_\nu - \tau_\nu)^n / n!. \tag{2.87}$$

Вычислив по формуле (2.50) с помощью этой функции источников удельную интенсивность излучения для $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, получим

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \frac{d^n B_\nu}{d\tau_\nu^n} = B_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} + \mu^2 \frac{d^2 B_\nu}{d\tau_\nu^2} + \dots. \tag{2.88}$$

Аналогичный результат для $-1 \leqslant \mu \leqslant 0$ следует из формулы (2.51). Он отличается от выражения (2.88) лишь на члены порядка $e^{-\tau/\mu}$. В предельном случае больших оптических глубин они стремятся к нулю, и выражение (2.88) становится применимым на всем промежутке $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$. Подставляя (2.88) в интегралы, опреде-