местах. Эта *нелокальность* задачи является результатом лучистого переноса, в результате которого фотоны, перемещающиеся из одной точки среды в другую, приводят к появлению имеющей фундаментальное значение связи (или взаимозависимости) между свойствами среды в этих точках.

2.5. Диффузионное приближение

На больших глубинах в полубесконечной атмосфере свойства поля излучения и вид уравнения переноса становятся совсем простыми. Можно непосредственно получить асимптотическое решение, которое применимо во внутренних слоях звезды (разумеется, за исключением конвективных зон). Это решение одновременно дает внутреннее граничное условие в задаче о переносе излучения в звездной атмосфере. Рассмотрим сначала свойства поля излучения. На глубинах, значительно превышающих среднюю длину свободного пробега фотона, излучение практически заперто, оно становится почти изотропным и в конце концов приближается к термодинамически равновесному, так что $S_\nu \to B_\nu$. Выберем некоторую точку $\tau_\nu \gg 1$ в качестве начальной и разложим S_ν в степенной ряд:

$$S_\nu(t_\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (d^n B_\nu/d\tau_\nu^n)(t_\nu - \tau_\nu)^n/n!. \tag{2.87}$$

Вычислив по формуле (2.50) с помощью этой функции источников удельную интенсивность излучения для $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, получим

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \frac{d^n B_\nu}{d\tau_\nu^n} = B_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} + \mu^2 \frac{d^2 B_\nu}{d\tau_\nu^2} + \ldots . \tag{2.88}$$

Аналогичный результат для $-1 \leqslant \mu \leqslant 0$ следует из формулы (2.51). Он отличается от выражения (2.88) лишь на члены порядка $e^{-\tau/\mu}$. В предельном случае больших оптических глубин они стремятся к нулю, и выражение (2.88) становится применимым на всем промежутке $-1 \leqslant \mu \leqslant 1$. Подставляя (2.88) в интегралы, определяющие соответствующие моменты, находим

$$J_\nu(\tau_\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)^{-1}(d^{2n}B_\nu/d\tau_\nu^{2n}) =$$

$$= B_\nu(\tau_\nu) + \frac{1}{3}\frac{d^2B_\nu}{d\tau_\nu^2} + \ldots, \tag{2.89а}$$

$$H_\nu(\tau_\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3)^{-1}(d^{2n+1}B_\nu/d\tau_\nu^{2n+1}) =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} + \ldots, \tag{2.89б}$$

$$K_\nu(\tau_\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+3)^{-1}(d^{2n}B_\nu/d\tau_\nu^{2n}) =$$

$$= \frac{1}{3}B_\nu(\tau_\nu) + \frac{1}{5}\frac{d^2B_\nu}{d\tau_\nu^2} + \ldots. \tag{2.89в}$$

Отметим, что у моментов четных порядков J_ν и K_ν сохраняются лишь производные четных порядков, а у H_ν — лишь нечетных порядков.

Выясним теперь, насколько быстро эти ряды сходятся. Производные можно (по крайней мере с точностью до порядка величины) аппроксимировать отношениями соответствующих конечных разностей, т.е. $|d^nB_\nu/d\tau_\nu^n| \approx B_\nu/\tau_\nu^n$. Тогда ясно, что отношение последовательных членов этих рядов порядка $O(1/\tau_\nu^2)$, или $O(1/\langle\chi_\nu\rangle^2 \cdot \Delta z^2)$, где $\langle\chi\rangle$ — средняя непрозрачность на пути Δz вдоль луча. Если перейти к средней длине свободного пробега фотона $l_\nu \approx 1/\chi_\nu$, то множитель, определяющий скорость сходимости, становится $O(l_\nu^2/\Delta z^2)$. Ясно, что сходимость очень быстрая. В действительности оказывается, что полученная только что оценка является консервативной. Кроме того, очевидно, что сходимость наиболее быстрая на тех частотах, где вещество сильно непрозрачно. Следует ожидать, что для звезды как целого Δz будет составлять заметную долю ее радиуса, скажем $\Delta z \sim 10^{10}$см, а $\langle\chi\rangle \sim 1$ (что означает, что средняя длина свободного пробега фотона равна 1 см), так что множитель, определяющий скорость сходимости рядов, будет порядка 10^{-20}. Ясно, что в случае глубоких недр звезды достаточно удерживать только главные члены.

Следовательно, в предельном случае больших оптических глубин можно написать

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) \approx B_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}, \tag{2.90а}$$

$$J_\nu(\tau_\nu) \approx B_\nu(\tau_\nu), \tag{2.90б}$$

$$H_\nu(\tau_\nu) \approx (dB_\nu/d\tau_\nu)/3, \tag{2.90в}$$

$$K_\nu(\tau_\nu) \approx B_\nu(\tau_\nu)/3. \tag{2.90г}$$

В формуле (2.90а) мы удержали два члена, чтобы учесть наличие ненулевого потока [ср. формулу (2.90в)]. Отметим, что формулы (2.90б) и (2.90г) показывают, что

$$\lim_{\tau_\nu \to \infty} [K_\nu(\tau_\nu)/J_\nu(\tau_\nu)] = 1/3.$$

Это согласуется с результатом, которого следует ожидать для изотропного излучения. Ниже будет показано, что отношение анизотропного члена в $I(\tau, \mu)$ к изотропному при $\tau \to \infty$ стремится к нулю, так что указанный предел действительно должен иметь место. Интенсивность излучения, даваемая выражением (2.90а), получена из формального решения уравнения переноса с функцией источников вида

$$S_\nu(t_\nu) = B_\nu(\tau_\nu) + (t_\nu - \tau_\nu)\, dB_\nu/d\tau_\nu.$$

Поэтому формулы (2.90а) — (2.90г) должны избавить нас от необходимости дальнейшего использования уравнения переноса. Легко убедиться, что это действительно так, если заметить, что подстановка выражений (2.90а) — (2.90г) в уравнение переноса (2.36) и в уравнение (2.71) для момента нулевого порядка сводит их к одному и тому же соотношению

$$d^2B_\nu/d\tau_\nu^2 = 0,$$

которое предполагается справедливым, а уравнение (2.79) для момента первого порядка совпадает с (2.90в). Таким образом на больших глубинах задача о переносе излучения фактически сводится к одному простому уравнению

$$H_\nu = \frac{1}{3}\frac{\partial B_\nu}{\partial \tau_\nu} = -\frac{1}{3}\frac{1}{\chi_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\frac{dT}{dz}. \tag{2.91}$$

Ясно, что соотношения (2.90) и (2.91) можно использовать, чтобы получить «внутреннее» граничное условие для уравнения переноса в случае полубесконечной атмосферы, как уже упоминалось в § 2.2.

Уравнение (2.91) [как и соотношения (2.90а) — (2.90в)] называют *диффузионным приближением*, в первую очередь из-за его формального сходства с другими уравнениями диффузии, имеющими вид

Поток = (Коэффициент диффузии) × (Градиент соответствующей физической величины),

Например $\Phi = -k\nabla T$ в случае теплопроводности. Коэффициент $(1/3)\ (1/\chi_\nu)\ (\partial B_\nu/\partial T)$ иногда даже называют *коэффициентом лучистой теплопроводности.* Этот термин вполне подходит, если принять во внимание, что $1/\chi_\nu = l_\nu$ представляет собой среднюю длину свободного пробега фотона. Отметим, что уравнение (2.91) выражает физическую суть приведенного выше результата: поток, вычисленный путем применения оператора Φ к линейной функции источников, зависит только от градиента S (см. обсуждение после формулы (2.65)). Согласно формуле (2.91) уже *только из того факта, что звезда излучает энергию, следует, что температура в ней должна возрастать с глубиной.* Если H заменить на $L/4\pi R^2$, а dB/dz — на $\sigma_R T_c^4/\pi R$ и принять $\langle\chi\rangle \approx 1$, то легко показать, что температура в центре Солнца T_c должна быть порядка $6 \cdot 10^6$ К. Этот результат согласуется со сделанным нами выше утверждением, что первичным источником энергии звезд является выделение термоядерной энергии в их центральных частях.

Обычное представление о диффузии — это медленная утечка из резервуара большой емкости за счет постепенного просачивания. Такое представление применимо и к предельному случаю лучистого переноса — диффузии излучения. Диффузионное приближение становится справедливым на больших оптических глубинах (т.е на расстоянии многих средних длин свободного пробега от поверхности). Поэтому, прежде чем фотон доберется до поверхности и уйдет в межзвездное пространство, он проделает сложный путь, испытав ряд последовательных актов поглощения и излучения, перемежающихся со свободными пролетами.

Если соотношения (2.90а) — (2.90в) проинтегрировать по всем частотам, то мы получим $I(\tau, \mu) \approx B(\tau) + 3\mu H$. Отношение членов, описывающих изотропную и анизотропную составляющие интенсивности, служит мерой скорости «дрейфа» в общем потоке излучения. Это отношение равно

$$\frac{\text{Анизотропная составляющая}}{\text{Изотропная составляющая}} \approx \frac{3H}{B} =$$

$$= \frac{3}{4}\,\frac{\sigma_R T^4_{эфф}}{\pi} \Big/ \frac{\sigma_R T^4}{\pi} \approx \left(\frac{T_{эфф}}{T}\right)^4. \quad (2.92)$$

Ясно, что на больших глубинах, где $T \gg T_{эфф}$, скорость «течения» становится все меньше и меньше. Тот же результат следует из физических соображений, основанных на несколько иной исходной точке зрения. Если πF — поток энергии, который уносится из элементарного объема вещества фотонами, движущимися со скоростью c, то *скорость течения* энергии в расчете на единицу объема равна $\pi F/c$. Запас энергии на единицу объема равен $4\pi J/c \approx 4\pi B/c$, так что

$$(\text{Скорость течения энергии})/(\text{Запас энергии}) = F/4B = (T_{эфф}/T)/4.$$

И снова мы видим, что диффузия (в интуитивном смысле, описанном выше) имеет место на больших глубинах, где $T \gg T_{эфф}$, тогда как на поверхности, где $T \approx T_{эфф}$, происходит *свободный отток* лучистой энергии.