Глава 3

Серая атмосфера

Превосходным введением в изучение переноса излучения в звездных атмосферах может служить задача о серой атмосфере. Характер положенных в ее основу предположений таков, что эта задача не содержит зависимости от физического состояния вещества и сводится к решению некоторого сравнительно простого уравнения переноса. В то же время задача о серой атмосфере показывает, как можно добиться выполнения условия лучистого равновесия. Ее решение можно связать с более общими и более реалистичными моделями. Кроме того, можно получить точное решение этой задачи, что обеспечивает стандарт, позволяющий оценивать различные численные методы, которые могут использоваться и в более сложных случаях.

3.1. Постановка задачи

Вводится упрощающее предположение, что коэффициент поглощения вещества не зависит от частоты, т.е. $\chi_\nu = \chi$. Это предположение во многих случаях, разумеется, нереалистично. Однако, как будет показано в последующих главах, у некоторых звезд (например, у Солнца) коэффициент поглощения не очень сильно отличается от серого ($\chi_\nu = \chi$) и, кроме того, за счет подходящего выбора *среднего коэффициента поглощения* задачу о несерой атмосфере можно частично свести к случаю серой атмосферы. Ввиду этого полученное решение дает также полезное начальное приближение при анализе несерых атмосфер.

Если принять $\chi_\nu = \chi$, то стандартное уравнение переноса для плоского случая (2.36) принимает вид

$$\mu(\partial I_\nu/\partial\tau) = I_\nu - S_\nu. \tag{3.1}$$

Тогда, интегрируя по частотам и вводя обозначение

$$I \equiv \int_0^\infty I_\nu d\nu \tag{3.2}$$

и аналогично для J, S, B и т.д., будем иметь

$$\mu(\partial I/\partial\tau) = I - S. \tag{3.3}$$

Если наложить условие лучистого равновесия [уравнение (2.83б)], то должно быть

$$\int_0^\infty \chi J_\nu d\nu = \int_0^\infty \chi S_\nu d\nu, \tag{3.4}$$

что в случае серой атмосферы переходит в $J = S$. Поэтому уравнение (3.3) превращается в следующее:

$$\mu(\partial I/\partial\tau) = I - J, \tag{3.5}$$

формальное решение которого [см. (2.57)]

$$J(\tau) = \Lambda_\tau\,[S(t)] = \Lambda_\tau\,[J(t)] = \frac{1}{2}\int_0^\infty J(t)E_1\,(|t - \tau|)dt. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) — это линейное интегральное уравнение для J. Оно называется *уравнением Милна*, а саму задачу о серой атмосфере иногда называют *задачей Милна.* Важно понять, что когда найдено решение уравнения (3.6), то оно одновременно удовлетворяет и уравнению переноса, и условию лучистого равновесия. Определению таких решений в случае несерой атмосферы посвящена бóльшая часть гл. 7.

Если теперь дополнительно ввести предположение об ЛТР, то $S_\nu = B_\nu(T)$, что в комбинации с условием лучистого равновесия дает нам

$$J(\tau) = S(\tau) = B[T(\tau)] = (\sigma_D T^4)/\pi. \tag{3.7}$$

Таким образом, если задана функция $J(\tau)$, являющаяся решением интегрального уравнения (3.6), то дополнительное предположение об ЛТР позволяет посредством соотношения (3.7) связать локальную температуру с полем излучения, удовлетворяющим условию лучистого равновесия.

Ряд важных результатов можно получить с помощью моментов уравнения (3.5). Взяв момент нулевого порядка и воспользовавшись условием лучистого равновесия, будем иметь

$$dH/d\tau = J - S = J - J = 0, \tag{3.8}$$

иными словами *поток постоянен.* Момент первого порядка дает

$$dK/d\tau = H. \tag{3.9}$$

Поскольку H постоянно, соотношение (3.9) приводит к *точному интегралу*

$$K(\tau) = H\tau + c = \frac{1}{4}F\tau + c. \tag{3.10}$$

Чтобы продвинуться дальше, надо найти, как связаны $J(\tau)$ и $K(\tau)$. Это легко сделать, воспользовавшись обсуждением, приведенным в § 2.5, где было показано, что на больших глубинах интенсивность излучения с высокой точностью можно представить в виде

$$I(\mu) = I_0 + I_1\mu,$$

откуда следует существование ненулевого потока, а также вытекает, что $K(\tau) = J(\tau)/3$ при $\tau \gg 1$. Таким образом, из того, что $K(\tau) \sim F\tau/4$ при $\tau \gg 1$, можно заключить, что на больших глубинах

$$J(\tau) \propto 3F\tau/4, \quad \tau \gg 1. \tag{3.11}$$

Это означает, что средняя интенсивность изменяется с оптической глубиной асимптотически линейно. Из общих соображений можно ожидать, что поведение $J(t)$ будет больше всего отклоняться от линейного у поверхности [вспомним формулу (2.63)]. Это подсказывает, что разумным общим выражением для $J(\tau)$ окажется

$$J(\tau) = (3/4)F[\tau + q(\tau)] = (3/4)(\sigma_R T^4_{\text{эфф}}/\pi)[\tau + q(\tau)]. \tag{3.12}$$

Функция $q(\tau)$, известная как *функция Хопфа*, подлежит определению. Из уравнения (3.6) ясно, что $q(\tau)$ является решением уравнения

$$\tau + q(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty [t + q(t)]E_1(|t - \tau|)dt. \tag{3.13}$$

Наконец, отметим, что, поскольку

$$\lim_{\tau\to\infty} [J(\tau)/3 - K(\tau)] = (F/4)\lim_{\tau\to\infty} [\tau + q(\tau) - \tau - 4c] = 0, \tag{3.14}$$

имеем $4c = q(\infty)$, и поэтому соотношение (3.10) можно переписать в форме

$$K(\tau) = (F/4)[\tau + q(\infty)]. \tag{3.15}$$

Решение задачи о серой атмосфере состоит в нахождении $q(\tau)$. Если $q(\tau)$ известно, то распределение температуры определяется соотношением

$$T^4 = (3/4)T^4_{\text{эфф}}[\tau + q(\tau)], \tag{3.16}$$

которое получается комбинированием формул (3.7) и (3.12). Приближенные выражения для $q(\tau)$ будут выведены в § 3.3, а точное решение описывается в § 3.4. Сначала, однако, целесообразно обсудить в общих чертах, как соотносятся между собой случаи серой и несерой атмосфер и насколько далеко простирается соответствие между ними.

3.2. Связь со случаем несерой атмосферы: средние непрозрачности

В реальных звездных атмосферах непрозрачность (коэффициент поглощения) испытывает сильные вариации с частотой, по крайней мере если присутствуют спектральные линии. Хотя теперь и существуют численные методы, позволяющие получать весьма точные решения уравнений переноса в случае несерой атмосферы и определять с высокой точностью температурную структуру таких атмосфер, вычисления даже в лучшем случае остаются трудоемкими, и важно понять, существует ли связь между случаями серой и несерой атмосфер. В этом разделе будет показано, что такая связь, хотя и в ограниченных пределах, все же существует и что, помимо прочего, она позволяет по решению для серой атмосферы определить с высокой точностью распределение температуры в глубоких слоях атмосферы.

Сравним сначала между собой уравнения переноса для серой и несерой атмосфер, выписав их рядом. Начав с уравнения переноса и взяв его моменты нулевого и первого порядков, будем иметь соответственно для несерой (а) и серой (б) атмосфер

$$\mu(\partial I_\nu/\partial z) = \chi_\nu(S_\nu - I_\nu), \tag{3.17а}$$

$$\mu(\partial I/\partial z) = \chi(J - I), \tag{3.17б}$$

$$(\partial H_\nu/\partial z) = \chi_\nu(S_\nu - J_\nu), \tag{3.18а}$$

$$dH/dz = 0, \tag{3.18б}$$

$$\partial K_\nu/\partial z = -\chi_\nu H_\nu, \tag{3.19а}$$

$$dK/dz = -\chi H. \tag{3.19б}$$