Решение задачи о серой атмосфере состоит в нахождении $q(\tau)$. Если $q(\tau)$ известно, то распределение температуры определяется соотношением

$$T^4 = (3/4)T^4_{\text{эфф}}[\tau + q(\tau)], \tag{3.16}$$

которое получается комбинированием формул (3.7) и (3.12). Приближенные выражения для $q(\tau)$ будут выведены в § 3.3, а точное решение описывается в § 3.4. Сначала, однако, целесообразно обсудить в общих чертах, как соотносятся между собой случаи серой и несерой атмосфер и насколько далеко простирается соответствие между ними.

3.2. Связь со случаем несерой атмосферы: средние непрозрачности

В реальных звездных атмосферах непрозрачность (коэффициент поглощения) испытывает сильные вариации с частотой, по крайней мере если присутствуют спектральные линии. Хотя теперь и существуют численные методы, позволяющие получать весьма точные решения уравнений переноса в случае несерой атмосферы и определять с высокой точностью температурную структуру таких атмосфер, вычисления даже в лучшем случае остаются трудоемкими, и важно понять, существует ли связь между случаями серой и несерой атмосфер. В этом разделе будет показано, что такая связь, хотя и в ограниченных пределах, все же существует и что, помимо прочего, она позволяет по решению для серой атмосферы определить с высокой точностью распределение температуры в глубоких слоях атмосферы.

Сравним сначала между собой уравнения переноса для серой и несерой атмосфер, выписав их рядом. Начав с уравнения переноса и взяв его моменты нулевого и первого порядков, будем иметь соответственно для несерой (а) и серой (б) атмосфер

$$\mu(\partial I_\nu/\partial z) = \chi_\nu(S_\nu - I_\nu), \tag{3.17а}$$

$$\mu(\partial I/\partial z) = \chi(J - I), \tag{3.17б}$$

$$(\partial H_\nu/\partial z) = \chi_\nu(S_\nu - J_\nu), \tag{3.18а}$$

$$dH/dz = 0, \tag{3.18б}$$

$$\partial K_\nu/\partial z = -\chi_\nu H_\nu, \tag{3.19а}$$

$$dK/dz = -\chi H. \tag{3.19б}$$

Здесь переменные без индекса ν обозначают интегральные величины, как в формуле (3.2). Поставим теперь вопрос, нельзя ли определить средний коэффициент поглощения $\bar{\chi}$ как некоторое взвешенное среднее от монохроматического коэффициента поглощения таким образом, чтобы проинтегрированное по частоте уравнение переноса для монохроматической интенсивности или для одного из ее моментов имело бы в точности ту же форму, что и в случае серой атмосферы. Было предложено несколько возможных определений $\bar{\chi}$.

ПОТОКОВОЕ СРЕДНЕЕ

Предположим, что мы хотим определить средний коэффициент поглощения таким образом, чтобы добиться выполнения точного соответствия между проинтегрированным по частоте соотношением (3.19а) и уравнением для серой атмосферы (3.19б). Если такое среднее удастся построить, то соотношение $K(\bar{\tau}) = H\bar{\tau} + c$ опять будет точным интегралом, как и в случае серой атмосферы. Интегрируя уравнение (3.19а) по всем частотам, получаем

$$-dK/dz = \int_0^\infty \chi_\nu H_\nu d\nu = \bar{\chi}_F H, \tag{3.20}$$

причем второе равенство дает искомое сведéние к уравнению (3.19б), если положить

$$\bar{\chi}_F \equiv H^{-1} \int_0^\infty \chi_\nu H_\nu d\nu. \tag{3.21}$$

Непрозрачность $\bar{\chi}_F$ называется *средней непрозрачностью, взвешенной по потоку*, или *потоковым средним*. Заметим, что такой выбор среднего *не сводит* целиком задачу о несерой атмосфере к серой атмосфере, так как при указанном выборе $\bar{\chi}$ монохроматическое уравнение (3.18а) не переходит в уравнение (3.18б). Кроме того, существует еще та практическая трудность, что H_ν заранее не известно, и поэтому $\bar{\chi}_F$ можно вычислить лишь после того, как решено уравнение переноса. Эту последнюю трудность можно преодолеть, воспользовавшись при построении моделей и расчете $\bar{\chi}_F$ методом последовательных приближений. Хотя искомая цель полностью и не достигнута, тот факт, что введение потокового среднего сохраняет K-интеграл, является важным, так как из него следует точное значение давления излучения [см. формулу (1.41)]. Отсюда следует также, что получается точное значение и для механической силы, порождаемой излучением, которая является градиентом давления излучения. Таким образом, из соотношения (2.77) имеем

$$dp_R/d\bar{\tau} = -\bar{\chi}_F^{-1}(dp_R/dz) = (4\pi/c\bar{\chi}_F) \times$$

$$\times \int_0^\infty \chi_\nu H_\nu d\nu = 4\pi H/c = \sigma T^4_{\text{эфф}}/c, \tag{3.22}$$

так что использование взвешенной по потоку непрозрачности приводит к простому выражению для градиента давления излучения. Этот результат имеет практическое значение при расчете моделей атмосфер звезд ранних типов, поскольку у этих объектов механическая сила, вызванная излучением, сильно влияет на распределение давления (и плотности) в атмосфере, видоизменяя уравнение гидростатического равновесия, а в случае стационарных течений — гидродинамическое уравнение движения.

РОССЕЛАНДОВО СРЕДНЕЕ

Предположим теперь, что мы хотим получить правильное значение интегрального потока излучения. Из соотношений (3.19) следует, что этого можно достичь, если $\bar{\chi}$ выбрать таким, чтобы

$$-\int_0^\infty \chi_\nu^{-1}(\partial K_\nu/\partial z)d\nu = \int_0^\infty H_\nu d\nu = H \equiv -\bar{\chi}^{-1}(dK/dz), \tag{3.23}$$

или, что то же самое,

$$\bar{\chi}^{-1} \equiv \int_0^\infty \chi_\nu^{-1}(\partial K_\nu/\partial z)d\nu \Big/ \int_0^\infty (\partial K_\nu/\partial z)d\nu. \tag{3.24}$$

Здесь мы снова сталкиваемся с той практической трудностью, что K_ν заранее не известно, и поэтому до тех пор, пока уравнение переноса не решено, вычислить входящие в (3.24) интегралы нельзя. Однако среднее, определяемое формулой (3.24), можно приближенно найти следующим образом. На больших глубинах в атмосфере $K_\nu \to J_\nu/3$, а $J_\nu \to B_\nu$. Поэтому можно написать

$$\partial K_\nu/\partial z \approx \frac{1}{3}(\partial B_\nu/\partial T)(dT/dz).$$

Определим поэтому средний коэффициент поглощения $\bar{\chi}_R$ так:

$$\frac{1}{\bar{\chi}_R} \equiv \frac{\frac{1}{3}\frac{dT}{dz}\int\limits_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\,d\nu}{\frac{1}{3}\frac{dT}{dz}\int\limits_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T}\,d\nu} = \frac{\int\limits_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\,d\nu}{\int\limits_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T}\,d\nu}, \tag{3.25}$$

или

$$\bar{\chi}_R^{-1} \equiv (\pi/4\sigma_R T^3)\int\limits_0^\infty \chi_\nu^{-1}(\partial B_\nu/\partial T)d\nu. \tag{3.26}$$

Средний коэффициент поглощения $\bar{\chi}_R$ называется *росселандовым средним* в честь С. Росселанда, который его ввел. Отметим, что поскольку это есть гармоническое среднее, то с наибольшим весом в него входят те области, в которых коэффициент поглощения наименьший и в которых вследствие этого переносится наибольшее количество энергии, — очень полезная особенность. Использование $\bar{\chi}_R$ или среднего, определяемого формулой (3.24), не позволяет свести уравнение (3.18а) к (3.18б) и поэтому не дает возможности перейти от несерой атмосферы к серой. С другой стороны, очевидно, что приближения, которые были сделаны при получении формулы (3.26), — это в точности те приближения, которые вводятся при выводе диффузионного приближения (2.91), т.е.

$$H_\nu = -\frac{1}{3}\frac{1}{\chi_\nu}\frac{\partial B_\nu}{\partial T}\frac{dT}{dz},$$

поэтому использование $\bar{\chi}_R$ не противоречит диффузионному приближению. Следовательно, применение шкалы оптических глубин $\bar{\tau}_R$, основанной на росселандовом среднем, правильно описывает асимптотическое поведение решения уравнения переноса и дает правильное значение переносимого потока на больших глубинах. Это означает, что на больших глубинах ($\bar{\tau}_R \gg 1$) распределение температуры с высокой точностью дается соотношением $T^4 = (3/4)T^4_{\text{эфф}}\,[\bar{\tau}_R + q(\bar{\tau}_R)]$ [см. формулу (3.16)]. Теперь становится понятным, почему при изучении звездных недр используют росселандовы средние непрозрачности. Отметим также, что, когда применимо диффузионное приближение, можно написать простое выражение для градиента давления излучения, а именно

$$dp_R/d\bar{\tau}_R = (16\sigma_R T^3/3c\bar{\chi}_R)(-dT/dz). \tag{3.27}$$

Упражнение 3.1. Вывести формулу (3.27).

Хотя на больших глубинах диффузионное приближение является почти точным и дает те очень полезные результаты, которые только что обсуждались, оно наверняка *должно отказывать* на поверхности, и использование росселандова среднего *не гарантирует* точного сохранения потока в верхних слоях, а также не дает правильного распределения температуры и градиента давления излучения в самых внешних частях атмосферы. Это обстоятельство надо ясно осознавать, поскольку как раз в этих слоях и формируется спектр. Именно они и представляют первостепенный интерес при анализе звездных спектров.

ПЛАНКОВСКОЕ И ПРЯМОЕ СРЕДНИЕ

Можно выбрать несколько других выражений для среднего коэффициента поглощения. Например, если мы хотим, чтобы вводимое среднее давало правильное значение полной излучаемой тепловой энергии, то нужно потребовать, чтобы

$$\bar{k}_P \equiv \left[\int_0^\infty k_\nu B_\nu(T) d\nu\right]/B(T) = \pi\left[\int_0^\infty k_\nu B_\nu(T) d\nu\right]/\sigma_R T^4. \tag{3.28}$$

Отметим, что здесь учитывается только истинное поглощение, а рассеяние опущено. Непрозрачность $\bar{k}_P$ называют *планковским средним*. Достоинством его является то, что для вычисления $\bar{k}_P$ нет нужды решать уравнение переноса. С другой стороны, $\bar{k}_P$ не позволяет свести уравнение (3.18а) к (3.18б), а (3.19а) к (3.19б), и поэтому оно не обладает теми достоинствами, которые есть у $\bar{\chi}_F$ и $\bar{\chi}_R$. Тем не менее некоторое дополнительное преимущество у этого среднего все же есть.

В частности, близ поверхности звезды физический смысл условия лучистого равновесия наиболее прямо выражается формулой (3.4). При учете этого соотношения уравнение (3.18а) можно вблизи поверхности свести к (3.18б), если $\bar{k}$ удовлетворяет соотношению

$$\int_0^\infty (k_\nu - \bar{k})(J_\nu - B_\nu) d\nu = 0. \tag{3.29}$$

Когда вещество становится оптически тонким (т.е. $\tau_\nu < 1$ на всех частотах), J_ν делается почти постоянным, и значение интеграла в (3.29) будет в первую очередь определяться теми частотами, на которых $k_\nu \gg \bar{k}$. Если B_ν представить линейным по $\bar{\tau}$ разложением, т.е.

$$B_\nu(t) = B_\nu(\bar{\tau}) + (dB_\nu/d\bar{\tau})(t - \bar{\tau}) \approx B_\nu(\bar{\tau}) + (dB_\nu/d\bar{\tau})(\bar{k}/k_\nu)(t_\nu - \tau_\nu),$$

то применив Λ-оператор, мы найдем [см. формулы (2.57), (2.58) и (2.63)]

$$J_\nu(\bar{\tau}) - B_\nu(\bar{\tau}) \approx -B_\nu(\bar{\tau})E_2(\tau_\nu)/2 + \\ + (\bar{k}/k_\nu)(dB_\nu/d\bar{\tau})[E_3(\tau_\nu)/2 + \tau_\nu E_2(\tau_\nu)/2]. \quad (3.30)$$

В пределе при $\tau \to 0$ имеем $E_2(\tau) \to 1$ и $E_3(\tau) \to 1/2$, так что первый член дает $-B_\nu(\bar{\tau})/2$, а второй член мал, когда $k_\nu \gg \bar{k}$ [это как раз та область, которая входит в интеграл (3.29) с наибольшим весом]. Поэтому, чтобы уравнение (3.29) было справедливо, $\bar{k}$ должно удовлетворять требованию, чтобы

$$\int_0^\infty k_\nu B_\nu d\nu = \bar{k} \int_0^\infty B_\nu d\nu. \quad (3.31)$$

Это показывает, что планковское среднее — это то среднее, которое лучше всего позволяет удовлетворить условию лучистого равновесия вблизи границы.

Вместо этого можно было бы потребовать, чтобы средний коэффициент поглощения был таков, чтобы получалось верное значение полного количества поглощаемой энергии. Это приводит к *прямому среднему*

$$\bar{k}_J \equiv \int_0^\infty k_\nu J_\nu d\nu / J. \quad (3.32)$$

Здесь также учитывается только истинное поглощение, а рассеяние не принимается во внимание. Как и в случае $\bar{\chi}_F$, пока не получено решение уравнения переноса, рассчитать $\bar{k}_J$ нельзя. Кроме того, $\bar{k}_J$ не позволяет строго свести к случаю серой атмосферы ни само уравнение переноса для несерого случая, ни какое-либо из уравнений для моментов (как это имело место и для планковского среднего).

РЕЗЮМЕ

Мы убедились, что ни один из описанных выше средних коэффициентов поглощения сам по себе не позволяет полностью свести задачу для несерой атмосферы к задаче для серой атмосферы. И все же средние непрозрачности позволяют получить полезную первую оценку распределения температуры в звездной атмосфере, если в качестве начального приближения принять $T(\bar{\tau}_R) = T_{серое}(\bar{\tau}_R)$ и затем улучшать эту оценку с помощью *процедуры коррекции*, построенной так, чтобы добиться соблюдения условия лучистого равновесия в несером поле излучения. Средние коэффициенты поглощения $\bar{\chi}_F$, $\bar{k}_P$ и $\bar{k}_J$ также используются в явном виде в некоторых процедурах температурной коррекции.

Оглядываясь назад, следует отдавать себе отчет в том, что задача о несерой атмосфере требовала слишком большого объема вычислений, чтобы до появления быстродействующих ЭВМ к ней можно было бы применить прямой подход. Использование $\bar{\chi}_R$ и $\bar{k}_P$ давало практический метод для подхода к задаче, никак иначе не поддающейся решению. На самом деле результаты, полученные таким путем, несмотря на кажущуюся грубость используемого приближения, часто не так уж плохи, как показывает сравнение с более современными результатами. Выше были упомянуты только некоторые из самых основных свойств средних коэффициентов поглощения; дальнейшие сведения можно найти в [419] и [361], § 34 — 35.

3.3. Приближенные решения

ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭДДИНГТОНА

В § 2.5 было показано, что на больших глубинах в звездных атмосферах имеет место соотношение $J = 3K$. Кроме того, в § 1.4 было показано (ср. упражнение 1.13), что это соотношение справедливо также для ряда других ситуаций, в том числе для двухпотокового приближения, дающего некоторое грубое представление поля излучения вблизи границы. Исходя из этих результатов, Эддингтон сделал упрощающее предположение, что $J = 3K$ *повсюду* в атмосфере. Тогда точный интеграл $K = F\tau/4 + c$ позволяет заключить, что в приближении Эддингтона $J_E(\tau) = (3/4)F\tau + c'$. Чтобы получить постоянную c', подсчитаем поток выходящего излучения и приравняем его заданному значению. Поскольку, согласно формуле (2.59), мы имеем

$$F(0) = 2\int_0^\infty \left(\frac{3}{4}F\tau + c'\right)E_2(\tau)d\tau = 2c'E_3(0) + \frac{3}{4}F\left[\frac{4}{3} - 2E_4(0)\right], \tag{3.33}$$