дачу для несерой атмосферы к задаче для серой атмосферы. И все же средние непрозрачности позволяют получить полезную первую оценку распределения температуры в звездной атмосфере, если в качестве начального приближения принять $T(\bar{\tau}_R) = T_{\text{серое}}(\bar{\tau}_R)$ и затем улучшать эту оценку с помощью *процедуры коррекции*, построенной так, чтобы добиться соблюдения условия лучистого равновесия в несером поле излучения. Средние коэффициенты поглощения $\bar{\chi}_F$, $\bar{k}_P$ и $\bar{k}_J$ также используются в явном виде в некоторых процедурах температурной коррекции.

Оглядываясь назад, следует отдавать себе отчет в том, что задача о несерой атмосфере требовала слишком большого объема вычислений, чтобы до появления быстродействующих ЭВМ к ней можно было бы применить прямой подход. Использование $\bar{\chi}_R$ и $\bar{k}_P$ давало практический метод для подхода к задаче, никак иначе не поддающейся решению. На самом деле результаты, полученные таким путем, несмотря на кажущуюся грубость используемого приближения, часто не так уж плохи, как показывает сравнение с более современными результатами. Выше были упомянуты только некоторые из самых основных свойств средних коэффициентов поглощения; дальнейшие сведения можно найти в [419] и [361], § 34 — 35.

3.3. Приближенные решения

ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭДДИНГТОНА

В § 2.5 было показано, что на больших глубинах в звездных атмосферах имеет место соотношение $J = 3K$. Кроме того, в § 1.4 было показано (ср. упражнение 1.13), что это соотношение справедливо также для ряда других ситуаций, в том числе для двухпотокового приближения, дающего некоторое грубое представление поля излучения вблизи границы. Исходя из этих результатов, Эддингтон сделал упрощающее предположение, что $J = 3K$ *повсюду* в атмосфере. Тогда точный интеграл $K = F\tau/4 + c$ позволяет заключить, что в приближении Эддингтона $J_E(\tau) = (3/4)F\tau + c'$. Чтобы получить постоянную c', подсчитаем поток выходящего излучения и приравняем его заданному значению. Поскольку, согласно формуле (2.59), мы имеем

$$F(0) = 2\int_0^\infty \left(\frac{3}{4}F\tau + c'\right)E_2(\tau)d\tau = 2c'E_3(0) + \frac{3}{4}F\left[\frac{4}{3} - 2E_4(0)\right], \tag{3.33}$$

то, пользуясь соотношением $E_n(0) = 1/(n - 1)$ и потребовав, чтобы $F(0) = F$, находим $c' = F/2$. Таким образом,

$$J_E(\tau) = (3/4)F(\tau + 2/3). \tag{3.34}$$

В приближении Эддингтона $q(\tau) = 2/3$. Если наложить условие лучистого равновесия и сделать предположение об ЛТР, из формулы (3.16) получим

$$T^4 \approx \frac{3}{4} T^4_{\text{эфф}}\left(\tau + \frac{2}{3}\right). \tag{3.35}$$

Согласно формуле (3.35), отношение температуры на границе к эффективной температуре равно $T_0/T_{\text{эфф}} = (1/2)^{1/4} = 0{,}841$, что довольно хорошо согласуется с точным значением $T_0/T_{\text{эфф}} = (\sqrt{3}/4)^{1/4} = 0{,}8114$. Приняв $S(\tau) = J_E(\tau)$ и подставив (3.34) в формулу (2.52), можно рассчитать угловую зависимость интенсивности выходящего излучения в приближении Эддингтона, что дает

$$I_E(0, \mu) = \frac{3}{4} F \int_\infty^0 \left(\tau + \frac{2}{3}\right) \mu^{-1} \exp(-\tau/\mu) d\tau = \frac{3}{4} F\left(\mu + \frac{2}{3}\right). \tag{3.36}$$

Это приводит к весьма специфической форме соотношения Эддингтона — Барбье [см. формулу (2.53)]. *Центр* диска звезды, видимый внешним наблюдателем соответствует $\theta = 0°$, или $\mu = 1$. *Край* диска соответствует $\theta = 90°$, или $\mu = 0$. Отношение $I(0, \mu)/I(0, 1)$, дающее интенсивность на угловом расстоянии $\theta = \arccos\mu$ в долях интенсивности в центре диска, называют *законом потемнения к краю*. В приближении Эддингтона потемнение к краю имеет вид

$$I_E(0, \mu)/I_E(0, 1) = (3/5)(\mu + 2/3). \tag{3.37}$$

Согласно этому результату, интенсивность на краю должна составлять 40% от интенсивности центра диска. Наблюдения Солнца в видимой области спектра действительно хорошо согласуются с этим значением. Фактически именно это согласие и привело К. Шварцшильда [416], стр. 25, к представлению о существовании лучистого равновесия в наружных слоях атмосферы Солнца.

Согласно формуле (3.35), $T = T_{\text{эфф}}$ при $\tau = 2/3$. Этот результат привел к широко используемому представлению, что эффективная оптическая глубина формирования континуума есть $\tau = 2/3$, и действительно, часто это довольно хорошая оценка. В пользу такого представления можно заметить, что для фотона, излученного наружу на $\tau = 2/3$, вероятность выйти через границу имеет величину порядка $e^{-0,67} \approx 0,5$; это достаточно хорошо согласуется с положением области, которую следовало бы интуитивно отождествить с областью формирования континуума.

Упражнение 3.2. Соотношение Эддингтона — Барбье показывает, что интенсивность $I(0, \mu)$ характеризует $S(\tau)$ при $\tau(\mu) \approx \mu$. Исходя из этого, показать, что средняя оптическая глубина, характеризующая поток, равна $\langle \tau \rangle = 2/3$.

Воспользовавшись приведенным в табл. 3.2 точным решением, которое будет получено ниже, можно оценить точность величины $J_E(\tau)$. Оказывается, что наибольшая ошибка имеет место на поверхности, где $\Delta J/J = (J_E - J_{\text{точн}})/J_{\text{точн}} = 0{,}155$. Как величина этой ошибки, так и то, что она имеет место при $\tau = 0$, не вызывает удивления, если вспомнить, что основное предположение, на котором основан весь вывод, а именно $J = 3K$, у границы, как известно, не выполняется. Как мы знаем, функция $J(\tau)$ должна удовлетворять интегральному уравнению (3.6). Кроме того, нам известно, что применение оператора Λ сильнее всего сказывается при $\tau = 0$ (см. формулу (2.63) и последующее обсуждение). Отсюда следует, что лучшее приближение к $J(\tau)$ можно получить по формуле

$$J_E^{(2)}(\tau) = \Lambda_\tau[J_E(t)] = \Lambda_\tau\left[\frac{3}{4} F\left(t + \frac{2}{3}\right)\right] =$$

$$= \frac{3}{4} F\left[\tau + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} E_2(\tau) + \frac{1}{2} E_3(\tau)\right]. \tag{3.38}$$

Если вспомнить свойства $E_n(\tau)$, становится понятным, что разность между $J_E^{(2)}(\tau)$ и $J_E(\tau)$ будет наибольшей на поверхности, где мы находим $J_E^{(2)}(0)/J_E(0) = 7/8$. Новая оценка $T_0/T_{\text{эфф}}$ составляет, таким образом, $(7/16)^{1/4} = 0{,}813$ (при точном значении 0,8114), а $q(0)$ уменьшается с 2/3 до $7/12 = 0{,}583$ (точное значение $1/\sqrt{3} = 0{,}577$).

Таким образом, применение оператора Λ привело к очень существенному улучшению решения вблизи границы. Отметим, однако, что при $\tau \to \infty$ никакого *улучшения* решения *нет* — здесь сохраняется первоначальное значение $q = 2/3$. В принципе, последовательное применение оператора Λ должно улучшать решение и в конце концов привести к точному решению. Действительно, можно показать, что $\lim\limits_{n \to \infty} \Lambda^n(1) = 0$ [684], стр. 31, так что многократным применением оператора Λ начальную ошибку ε на любой оптической глубине можно в конечном счете свести к нулю. Однако сходимость слишком медленная, чтобы указанный метод имел практическое значение. Причина медленной сходимости в том, что эффективная область влияния оператора Λ порядка $\Delta\tau \approx 1$, и поэтому на больших оптических глубинах ошибки исправляются «бесконечно медленно». (С этой трудностью, связанной с Λ-итерацией, мы не раз встретимся в весьма разнообразных ситуациях; см. например, § 6.1 и 7.2.) Кроме того, уже второе применение оператора Λ к $J_E^{(2)}(\tau)$ приводит к появлению функций $\Lambda_\tau[E_n(t)]$, получение которых требует громоздких вычислений [361] (формулы (14.50), (14.53), (37.36) — (37.44)). Поэтому для отыскания решения должны быть разработаны другие методы.

Упражнение 3.3. Пользуясь данными табл. 3.2, рассчитать относительные погрешности $J_E(\tau)$ и $J_E^{(2)}(\tau)$ и нанести их на график. Требующиеся при этом значения $E_n(\tau)$ можно найти в [4], стр. 245.

Упражнение 3.4. Показать, что, хотя $J_E(\tau)$ было получено с использованием предположения $F = \text{const}$, поток, вычисленный по $J_E(\tau)$ с помощью формулы (2.59), не является постоянным. Построить график относительной погрешности $\Delta F(\tau)/F$.

Упражнение 3.5. Применением оператора X [формулы (2.62) и (2.65)] показать, что

$$K_E^{(2)}(\tau) = \frac{3}{16}F\left[\frac{4}{3}\,\tau + \frac{8}{9} - \frac{4}{3}\,E_4(\tau) + 2E_5(\tau)\right].$$

Использовать этот результат для нахождения аналитического выражения для переменного эддингтоновского множителя $f(\tau) \equiv K(\tau)/J(\tau)$. Показать, что $f(\infty) = 1/3$ и $f(0) = 17/42 = 0{,}405$. По данным табл. 3.2 рассчитать относительную погрешность $f(\tau)$ [воспользоваться формулой (3.15)] и построить ее график.

Упражнение 3.6. Показать, что улучшенное приближенное выражение для интенсивности выходящего излучения, получаемое при использовании $J_E^{(2)}(\tau)$, имеет вид

$$I_E^{(2)}(0, \mu) = \frac{3}{4}\,F\left\{\frac{7}{12} + \frac{1}{2}\,\mu + \left(\frac{1}{3}\,\mu + \frac{1}{2}\,\mu^2\right) \times \ln\left[(1 + \mu)/\mu\right]\right\}$$

Сравнить этот результат и $I_E(0, \mu)$, даваемое формулой (3.36), с точным результатом, приведенным в табл. 3.1, и изобразить графически их относительные погрешности.

ИТЕРАТИВНАЯ ПРОЦЕДУРА УНЗОЛЬДА

Главный недостаток процедуры Λ-итераций — ее неспособность повысить точность решения на больших оптических глубинах. Унзольд [638], стр. 141, предложил остроумный альтернативный метод, который свободен от этого недостатка и допускает обобщение на случай несерой атмосферы. Основная идея состоит в том, чтобы, исходя из некоторой начальной оценки функции источников $B(\tau)$, получить методом малых возмущений уравнение для поправки $\Delta B(\tau)$, которая позволяет улучшить выполнение условия лучистого равновесия.

Если по начальному приближению $B(\tau)$ рассчитать поток, то обнаружится, что он является некоторой функцией оптической глубины $H(\tau)$, а не точно постоянной величиной, если только $B(\tau)$ случайно не окажется точным решением задачи. Из уравнения для момента первого порядка (3.9) имеем тогда

$$K(\tau) = \int_0^\tau H(\tau')d\tau' + C. \tag{3.39}$$

Если принять приближение Эддингтона $J(\tau) = 3K(\tau)$ и определить C так, чтобы $J(0) = 2\,H(0)$ [см. формулу (3.34)], получим

$$J(\tau) \approx 3 \int_0^\tau H(\tau')d\tau' + 2H(0). \tag{3.40}$$

Но из уравнения для момента нулевого порядка (3.8) мы имеем

$$B(\tau) = J(\tau) - dH(\tau)/d\tau, \tag{3.41}$$

так что

$$B(\tau) \approx 3 \int_0^\tau H(\tau')d\tau' + 2H(0) - dH(\tau)/d\tau. \tag{3.42}$$

Соотношение (3.42) не может быть точным из-за тех приближений, которые были сделаны при его выводе, но оно обладает достаточной точностью, чтобы с его помощью рассчитывать возмущения. В частности, предположим, что $\Delta B(\tau)$ выбрано в точности так, что поток, рассчитанный по $B(\tau) + \Delta B(\tau)$, является постоянным. Тогда

$$B(\tau) + \Delta B(\tau) \approx 3 \int_0^\tau H d\tau' + 2H. \tag{3.43}$$

Вычитая почленно (3.42) из (3.43), получаем выражение для $\Delta B(\tau)$, а именно

$$\Delta B(\tau) = 3 \int_0^\tau \Delta H(\tau')d\tau' + 2\Delta H(0) - d\Delta H(\tau)/d\tau. \tag{3.44}$$

Таким образом, если ошибки в значениях потока

$\Delta H(\tau) \equiv H - H(\tau)$ известны, то можно рассчитать поправку $\Delta B(\tau)$. Эта поправка прибавляется затем к $B(\tau)$ и вычисляются новые значения потока, которые имеют новые (меньшие!) погрешности ΔH. Процесс итераций продолжается до тех пор, пока H не станет постоянным и $\Delta B \to 0$ при всех τ. Уравнение (3.44) можно обобщить на несерые атмосферы (см. уравнение (7.18)]. Процедура Унзольда гораздо эффективнее Λ-итераций, так как она обеспечивает значительное улучшение решения и в глубоких слоях, и у поверхности. Последнее утверждение доказывается в следующем упражнении.

Упражнение 3.7. Примем начальное приближение $B(\tau) = 3H(\tau + c)$, т.е. $q(\tau) = c$. а) Показать, что

$$\Delta H(\tau) \equiv H - H(\tau) = \frac{3}{2} H[E_4(\tau) - cE_3(\tau)].$$

Получить выражения для $\Delta H(0)$ и $d(\Delta H)/d\tau$. б) Применить процедуру Унзольда и показать, что

$$\Delta B(\tau) = 3H\left[\frac{17}{24} - c - \frac{1}{2} cE_2(\tau) + \frac{1}{2} E_3(\tau) + \frac{3}{2} cE_4(\tau) - \frac{3}{2} E_5(\tau)\right].$$

в) Показать, что независимо от начального выбора c для улучшенного решения $q(0) = 7/12 = 0{,}583$ (точное значение 0,577), а $q(\infty) = 17/24 = 0{,}708$ (точное значение 0,710). г) Показать, что в противоположность этому оператор Λ, примененный к $q \equiv c$, дает $q(0) = c/2 + 1/4$ и $q(\infty) = c$. Первое согласуется со значением, получаемым методом Унзольда, лишь при $c = 2/3$, а второе показывает, что на больших оптических глубинах никакого улучшения решения не достигается.

МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ

Метод, который будет сейчас описан, дает возможность получить как приближенные решения, так и точное решение задачи о серой атмосфере. Кроме того (что еще важнее), в нем вводится та фундаментальная математическая схема, которая служит основой практически всех современных методов решения уравнений переноса. Если определение J, даваемое формулой (1.4), ввести в уравнение (3.5), то подлежащее решению уравнение переноса можно записать в форме *интегродифференциального уравнения*

$$\mu \frac{\partial I(\tau, \mu)}{\partial \tau} = I(\tau, \mu) - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I(\tau, \mu) d\mu. \tag{3.45}$$

Существенная трудность при получении его решения связана с наличием интеграла по углам. Однако определенные интегралы и, в частности, интеграл в уравнении (3.45) можно найти численно с помощью *квадратурных сумм*, представляющих собой суммы произведений значений подынтегральной функции, вычисленных в конечном множестве точек из промежутка интегрирования, на соответствующие веса. Таким образом, введя $\{\mu_i\}$ на $[-1, +1]$, для произвольной функции $f(\mu)$ можем написать

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(\mu) d\mu \approx \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^{n} a_j f(\mu_j). \tag{3.46}$$

Числа μ_j называют *узлами* квадратурной формулы, a_j — *весами* квадратуры, $f(\mu_j)$ — *дискретными ординатами*. Выбрав какую-то определенную квадратурную формулу, заменяем интегродифференциальное уравнение переноса (3.45) системой уравнений

$$\mu_i (\partial I_i / \partial \tau) = I_i - \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^{n} a_j I_j, \; i = \pm 1, \ldots, \pm n, \tag{3.47}$$

где через I_i обозначено $I(\tau, \mu_i)$. Интенсивность излучения не представляется более *непрерывной* функцией μ, а описывается совокупностью пучков излучения, каждый из которых дает значение $I(\mu)$ на некотором определенном интервале. Из физических соображений разумно ожидать, что при $n \to \infty$ решение становится точным.

Точность квадратуры зависит как от числа точек, так и от их расположения на промежутке интегрирования. Если точки распределены по промежутку равномерно, мы получаем некоторую *формулу Ньютона — Котеса*. Хорошо известным примером такой формулы является *формула Симпсона* с узлами $\{\mu_i\} = (-1, 0, 1)$. Лучше пользоваться *формулой Гаусса,* в которой в качестве $2n$ узлов на $[-1, 1]$ выбраны корни полинома Лежандра порядка $2n$. Обсуждение построения и точности квадратурных формул увело бы нас слишком далеко в сторону (см. [161], гл. 2). Ограничимся лишь формулировкой следующего важного для нас результата: *m*-

точечная формула Ньютона — Котеса дает точные результаты для многочленов степени до $m - 1$ (для четных m) или до m (для нечетных m), а m-точечная формула Гаусса является точной для многочленов степени вплоть до $2m - 1$. Для решения уравнения переноса *двойная формула Гаусса* обладает преимуществами перед обычной, или «простой», формулой Гаусса [619]. В двойной формуле берутся две *отдельные* n-точечные квадратуры по промежуткам $-1 \leqslant \mu \leqslant 0$ и $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. На каждом из этих промежутков n узлов даются корнями полинома Лежандра порядка n, область изменения аргумента которого с $[-1, 1]$ приведена к соответствующему промежутку. Этот подход обладает тем достоинством, что $I(\tau, +\mu)$ и $I(\tau, -\mu)$ аппроксимируются независимо, и поэтому квадратурная формула без труда может учесть тот физический факт, что $I(-\mu) = 0$ при $\tau = 0$, тогда как $I(+\mu)$ остается конечным. В обычной формуле Гаусса отсутствие непрерывности $I(\mu)$ при $\mu = 0$, когда $\tau = 0$, приводит к появлению значительных ошибок. Во всех этих формулах точки выбираются симметрично относительно нуля, так что $\mu_{-j} = -\mu_j$, а $a_{-j} = a_j$.

Перейдем теперь к решению системы уравнений (3.47). Заметив, что это система линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, будем искать решение в виде $I_i = g_i \exp(-k\tau)$, где g_i и k подлежат определению. Подставляя в уравнение (3.47), находим

$$g_i(1 + k\mu_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^{n} a_j g_j = c, \tag{3.48}$$

так что $g_i = c/(1 + k\mu_i)$. Если воспользоваться этим выражением для g_i и еще раз подставить в уравнение (3.47) то выражение, в форме которого ищется решение, т.е. $I_i = g_i \exp(-k\tau)$, мы найдем

$$\frac{1}{2} \sum_{j=-n}^{n} a_j(1 + k\mu_j)^{-1} = 1. \tag{3.49}$$

Это *характеристическое уравнение,* которое удовлетворяется только при некоторых определенных значениях k, называемых *характеристическими корнями* (или собственными значениями). Если учесть, что $a_{-j} = a_j$ и $\mu_{-j} = -\mu_j$, уравнением (3.49) можно воспользоваться для введения *характеристической* функции

$$T(k^2) \equiv 1 - \sum_{j=1}^{n} a_j(1 - k^2\mu_j^2)^{-1}. \tag{3.50}$$

Корни T, т.е. значения k, для которых $T(k^2) = 0$, являются искомыми корнями характеристического уравнения. Если в формуле (3.46) положить $f(\mu) = 1$, то легко убедиться, что

$$\frac{1}{2} \sum_{j=-n}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j = 1,$$

откуда следует, что $k^2 = 0$ — решение характеристического уравнения, т.е. $T(0) = 0$. Имеется еще $n - 1$ ненулевой корень, в чем можно убедиться следующим образом. Заметим, что при $k^2 = \mu_j^{-2}$ функция T имеет *полюс,* так что при этих значениях k^2 она обращается в бесконечность. При $k^2 = \mu_j^{-2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, имеем $T(k^2) < 0$, и поэтому, устремляя ε к нулю, получаем $T(k^2) \to -\infty$. Аналогично при $k^2 = \mu_j^{-2} + \varepsilon$ имеем $T(k^2) > 0$, и $T \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$. Отсюда ясно, что функция T должна проходить через нуль в пределах промежутка между двумя последовательными полюсами. Поэтому $n - 1$ ненулевых корней должны удовлетворять неравенствам

$$\mu_1^{-2} < k_1^2 < \mu_2^{-2} < \ldots < k_{n-1}^2 < \mu_n^{-2},$$

где $\{\mu_i\}$ занумерованы так, что $\mu_i > \mu_{i+1}$. Отметим, что наибольшее из μ_i должно быть меньше единицы, а поэтому наименьшее ненулевое k^2 больше единицы. Всего существует $2n - 2$ ненулевых значения k, образующих пары вида $\pm k_i$, $i = 1, \ldots, n - 1$.

Следовательно, система (3.47) имеет решение вида

$$I_i(\tau) = b\left[\sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha (1 + k_\alpha \mu_i)^{-1} e^{-k_\alpha \tau} + \right.$$
$$\left. + \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_{-\alpha} (1 - k_\alpha \mu_i)^{-1} e^{+k_\alpha \tau}\right]. \quad (3.51)$$

Найдем теперь частное решение, соответствующее корню $k^2 = 0$. С учетом формулы (3.11), показывающей, что $J(\tau)$ на больших оптических глубинах должно быть линейной функцией τ, попробуем искать частное решение в виде $I_i = b(\tau + q_i)$. Подставляя это выражение в систему (3.47), получаем

$$q_i = \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{j=-n}^{n} a_j q_j. \quad (3.52)$$

Далее, заметим, что если в формуле (3.46) положить $f(\mu) = \mu$, то квадратурная сумма $\sum a_j \mu_j$ должна быть равна нулю. Поэтому уравнение (3.52) будет удовлетворено при $q_i = Q + \mu_i$. Следовательно, частное решение есть $I_i(\tau) = b(\tau + Q + \mu_i)$, а общее решение имеет вид

$$I_i(\tau) = b\left(\tau + Q + \mu_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{L_\alpha e^{-k_\alpha \tau}}{1 + k_\alpha \mu_i} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{L_{-\alpha} e^{+k_\alpha \tau}}{1 - k_\alpha \mu_i}\right). \quad (3.53)$$

Далее следует определить $2n$ неизвестных постоянных b, Q и $L_{\pm\alpha}$. Это достигается использованием граничных условий.

В случае слоя *конечной* оптической толщины T *заданными* функциями μ являются как $I^-_{-i} \equiv I(0, -\mu_i)$, так и $I^+_i \equiv I(T, +\mu_i)$. Поэтому для нахождения $2n$ неизвестных можно написать $2n$ уравнений

$$I(0, -\mu_i) = b\left(Q - \mu_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{L_\alpha}{1 - k_\alpha \mu_i} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{M_\alpha e^{-k_\alpha T}}{1 + k_\alpha \mu_i}\right) = I^-_{-i} \quad (3.54\text{ а})$$

и

$$I(T, +\mu_i) = b\left(Q + T + \mu_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{L_\alpha e^{-k_\alpha T}}{1 + k_\alpha \mu_i} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{M_\alpha}{1 - k_\alpha \mu_i}\right) = I^+_i, \quad (3.54\text{ б})$$

где для улучшения обусловленности системы положено $M_\alpha = L_{-\alpha} e^{k_\alpha T}$. Систему (3.54) можно решить стандартными методами решения систем линейных алгебраических уравнений.

В случае полубесконечной атмосферы, находящейся в лучистом равновесии, в качестве граничных условий мы имеем $I^-_{-i} \equiv I(0, -\mu_i) = 0$ и требование, чтобы $I(\tau)$ не расходилось экспоненциально при $\tau \to +\infty$. Чтобы последнее условие удовлетворялось, следует положить

$$L_{-\alpha} = 0, \quad (3.55)$$

а граничное условие на наружной границе позволяет написать n

уравнений

$$Q - \mu_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha (1 - k_\alpha \mu_i)^{-1} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.56}$$

Решение уравнений (3.56) дает n неизвестных Q и L_α. Наложим, кроме того, требование, чтобы поток равнялся заданной величине F. Таким образом, мы требуем, чтобы

$$2\int_{-1}^{1} I(\mu)\mu d\mu = 2\sum_{j=-n}^{n} a_j \mu_j I_j = F. \tag{3.57}$$

Подставляя выражения (3.53) (с $L_{-\alpha} = 0$), имеем

$$2b\left[(\tau + Q)\sum_{j=-n}^{n} a_j\mu_j + \sum_{j=-n}^{n} a_j\mu_j^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha e^{-k_\alpha\tau} \sum_{j=-n}^{n} \frac{a_j\mu_j}{1 + k_\alpha\mu_j}\right] = F. \tag{3.58}$$

Из формулы (3.46) следует, что первая сумма равна нулю, вторая равна 2/3, внутренняя же сумма в двойной сумме равна нулю, как это следует из характеристического уравнения.

Упражнение 3.8. Проверить сделанные выше утверждения, касающиеся значений сумм в формуле (3.58).

Таким образом, находим, что $b = (3/4)F$, как и следовало ожидать согласно формуле (3.11). Отметим также, что использование такого приближения при вычислении квадратуры автоматически приводит к постоянному потоку. Окончательно полное решение для полубесконечной атмосферы можно записать в виде

$$I_i(\tau) = \frac{3}{4}F\left[\tau + Q + \mu_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha e^{-k_\alpha\tau}(1 + k_\alpha\mu_i)^{-1}\right], \quad i = 1, \dots, n. \tag{3.59}$$

Подставив выражения (3.59) в представление интеграла, дающего $J(\tau)$, в виде квадратурной суммы, можно вычислить $J(\tau)$. Воспользовавшись характеристическим уравнением, получим

$$J(\tau) = \frac{3}{4}F\left(\tau + Q + \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha e^{-k_\alpha \tau}\right), \tag{3.60}$$

и поэтому представление для $q(\tau)$ в приближении дискретных ординат имеет вид

$$q(\tau) = Q + \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha e^{-k_\alpha \tau}. \tag{3.61}$$

Упражнение 3.9. Вывести формулу (3.60).

Численные значения $q(\tau)$ для $n = 1, \ldots, 4$ были получены Чандрасекаром [153] с использованием обычной формулы Гаусса и Сайксом [619] — с использованием превосходящей ее по точности двойной формулы Гаусса. В обоих случаях для $q(0)$ получается *точное* значение $1/\sqrt{3}$. Абсолютная величина максимальной относительной погрешности определения $J(\tau)$ при использовании обычной формулы Гаусса составляет 9,0; 4,1; 2,7; 2,0% при $n = 1, \ldots, 4$ соответственно, а для двойной формулы Гаусса — 9,0; 1,8; 0,9% соответственно при $n = 1$; 2 и 3. Приближенные значения $q(\infty)$, т.е. Q, даваемые двойной гауссовой квадратурой, равны 0,71132 и 0,71057 при $n = 2$ и 3. Эти значения хорошо согласуются с точным значением 0, 710446. Решение, получаемое при двойной гауссовой квадратуре с $n = 3$, дает значение выходящей интенсивности $I(0, \mu)/F$ со среднеквадратичной ошибкой всего 0,1%; при $\mu \geqslant 0{,}3$ оно очень точное (0,02%). Следует подчеркнуть, что главное достоинство метода дискретных ординат состоит в том, что в пределе при $n \to \infty$ он дает точное решение, а также в том, что он служит исключительно мощным приближенным методом решения более сложных задач.

Путем аналитических преобразований характеристического уравнения с использованием граничных условий можно получить несколько очень важных результатов, которые окажутся полезными в нашей дальнейшей работе. Для упрощения обозначений введем $x = 1/k$ и $X = 1/k^2$. Тогда характеристическую функцию, определяемую формулой (3.50), можно переписать в следующих эквивалентных формах:

$$T(X) = 1 - X\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{X - \mu_j^2} = \sum_{j=1}^{n} a_j -$$

$$- X\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{X - \mu_j^2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j\mu_j^2}{\mu_j^2 - X}. \tag{3.62}$$

Чтобы избавиться в выражении $T(X)$ от дробей, умножим обе части на $\prod\limits_{j=1}^{n} (\mu_j^2 - X)$. Это дает

$$P(X) \equiv \prod_{j=1}^{n} (\mu_j^2 - X)T(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\mu_j^2 - X). \tag{3.63}$$

Полученное выражение, очевидно, есть многочлен порядка $n - 1$ по X. Но нам известно, что $T(X)$ имеет $n - 1$ корень $X_1 = 1/k_1^2, \ldots, X_{n-1} = 1/k_{n-1}^2$, так что $P(X)$ должно иметь вид $C(X - X_1) \ldots (X - X_{n-1})$. Чтобы найти постоянную C, заметим, что коэффициент при X^{n-1}в выражении (3.63) равен $(-1)^{n-1} \times \times \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\mu_i^2 = (-1)^{n-1}/3$. Это как раз и есть C. Таким образом, имеем

$$P(X) = \frac{1}{3}(X_1 - X) \ldots (X_{n-1} - X),$$

и поэтому

$$T(X) = \frac{1}{3}\left[\prod_{j=1}^{n-1} (X_j - X)\right] \Big/ \prod_{j=1}^{n} (\mu_j^2 - X). \tag{3.64}$$

Из формулы (3.62) видно, что $T(0) = 1$. Отсюда, полагая $X = 0$ в формуле (3.64), получаем полезный для дальнейшего результат:

$$\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n k_1 k_2 \ldots k_{n-1} = 1/\sqrt{3}. \tag{3.65}$$

Рассмотрим теперь интенсивность выходящего излучения $I(0, \mu)$. Определим функцию $S(\mu)$ такую, что

$$S(\mu_i) = Q - \mu_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha(1 - k_\alpha\mu_i)^{-1}. \tag{3.66}$$

Тогда граничное условие на поверхности [формула (3.56)] можно записать в виде

$$I(0, -\mu_i) = \frac{3}{4} FS(\mu_i) = 0. \tag{3.67}$$

Распространим теперь определение $S(\mu)$ на все значения μ и напишем

$$I(0, \mu) = \frac{3}{4} FS(-\mu), \quad \mu \geqslant 0. \tag{3.68}$$

Заметим, что при таком обобщении $I(0, -\mu)$ не равно тождественно нулю, но, вообще говоря, будет иметь ненулевые значения при $-\mu \neq \mu_{-i}$. Пользуясь $S(\mu)$, можно получить выражение для $I(0, -\mu)$, которое не содержит в явном виде постоянных L_α и Q. Избавляясь в равенстве (3.66) от дробей, получаем

$$S(\mu) \prod_{\alpha=1}^{n-1} (1 - k_\alpha \mu) = (Q - \mu) \prod_{\alpha=1}^{n-1} (1 - k_\alpha \mu) + \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq \alpha}}^{n-1} (1 - k_i \mu). \tag{3.69}$$

Выражение, стоящее в правой части, есть, очевидно, многочлен по μ порядка n. Но $S(\mu)$ имеет n корней $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Поэтому этот многочлен должен иметь вид $C(\mu - \mu_1) \ldots (\mu - \mu_n)$. Чтобы найти C, заметим, что коэффициент при μ^n в правой части формулы (3.69) равен $(-1)^n k_1 \ldots k_{n-1}$, что и есть C. Следовательно,

$$S(\mu) = \prod_{i=1}^{n} k_j \frac{\prod_{i=1}^{n} (\mu_i - \mu)}{\prod_{i=1}^{n} (1 - k_i \mu)} = \frac{\prod_{i=1}^{n} (\mu_i - \mu)}{\prod_{i=1}^{n} (x_i - \mu)} \tag{3.70}$$

Подстановка (3.70) в формулу (3.68) дает искомое выражение для $I(0, \mu)$. Принято вводить *функцию потемнения к краю* $H(\mu)$:

$$H(\mu) \equiv I(0, \mu)/I(0, 0). \tag{3.71}$$

[Отметим, что, в отличие от формулы (3.37), точкой, от которой ведется отсчет, здесь является край, а не центр диска.] В приближении дискретных ординат из формул (3.68) и (3.70) находим

$$H(\mu) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \mu_i^{-1}\mu) \Big/ \prod_{i=1}^{n-1} (1 + k_i \mu). \tag{3.72}$$

Дальнейший анализ с использованием $S(\mu)$ показывает, что можно написать явные выражения для L_α и Q, выразив их через $\{\mu_i\}$ и корни $\{k_\alpha\}$ (см. [161], стр. 78 — 79; [684], стр. 25).

Прежде чем закончить изложение метода дискретных ординат, покажем, что $q(0) = 1/\sqrt{3}$ есть *точное* значение. Начнем с замечания, что в n-м приближении

$$J_n(0) = \frac{3}{4} F\left(Q + \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha\right) = \frac{3}{4} Fq(0), \tag{3.73}$$

тогда как из формулы (3.59) находим

$$I_n(0, 0) = \frac{3}{4} F\left(Q + \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha\right) = J_n(0) \tag{3.74}$$

независимо от порядка приближения n. Поэтому заключаем, что в точном решении $J(0) = I(0, 0)$. Но из формул (3.68) и (3.70) имеем

$$I_n(0, 0) = \frac{3}{4} FS(0) = \frac{3}{4} F\mu_1 \ldots \mu_n k_1 \ldots k_{n-1}. \tag{3.75}$$

Далее, комбинируя формулы (3.65), (3.75) и (3.73), приходим к выводу, что *независимо от порядка приближения n* величина $q_n(0) = 1/\sqrt{3}$. Следовательно, этот результат является точным.

3.4. Точное решение

Точные выражения для $q(\tau)$ и $H(\mu)$ можно получить переходом к пределу $n \to \infty$ в методе дискретных ординат [161], гл. 5; [361], § 27, с помощью *принципа инвариантности* [161], гл. 4; [361], § 28, или прямым методом *преобразования Лапласа* [361], § 29; [684], гл. 3. Мы приведем здесь лишь некоторые важнейшие результаты, а за деталями читателю следует обратиться к указанной только что литературе.

Существует несколько выражений для $H(\mu)$ ([361], стр. 186 — 187). Для вычислений удобно следующее представление:

$$H(\mu) = (\mu + 1)^{-1/2} \exp\left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\theta \operatorname{arctg}(\mu \operatorname{tg}\theta)}{1 - \theta \operatorname{ctg}\theta} d\theta\right]. \tag{3.76}$$