нии дискретных ординат из формул (3.68) и (3.70) находим

$$H(\mu) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \mu_i^{-1}\mu) \Big/ \prod_{i=1}^{n-1} (1 + k_i \mu). \tag{3.72}$$

Дальнейший анализ с использованием $S(\mu)$ показывает, что можно написать явные выражения для L_α и Q, выразив их через $\{\mu_i\}$ и корни $\{k_\alpha\}$ (см. [161], стр. 78 — 79; [684], стр. 25).

Прежде чем закончить изложение метода дискретных ординат, покажем, что $q(0) = 1/\sqrt{3}$ есть *точное* значение. Начнем с замечания, что в n-м приближении

$$J_n(0) = \frac{3}{4}F\left(Q + \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha\right) = \frac{3}{4}Fq(0), \tag{3.73}$$

тогда как из формулы (3.59) находим

$$I_n(0, 0) = \frac{3}{4}F\left(Q + \sum_{\alpha=1}^{n-1} L_\alpha\right) = J_n(0) \tag{3.74}$$

независимо от порядка приближения n. Поэтому заключаем, что в точном решении $J(0) = I(0, 0)$. Но из формул (3.68) и (3.70) имеем

$$I_n(0, 0) = \frac{3}{4}FS(0) = \frac{3}{4}F\mu_1 \ldots \mu_n k_1 \ldots k_{n-1}. \tag{3.75}$$

Далее, комбинируя формулы (3.65), (3.75) и (3.73), приходим к выводу, что *независимо от порядка приближения n* величина $q_n(0) = 1/\sqrt{3}$. Следовательно, этот результат является точным.

3.4. Точное решение

Точные выражения для $q(\tau)$ и $H(\mu)$ можно получить переходом к пределу $n \to \infty$ в методе дискретных ординат [161], гл. 5; [361], § 27, с помощью *принципа инвариантности* [161], гл. 4; [361], § 28, или прямым методом *преобразования Лапласа* [361], § 29; [684], гл. 3. Мы приведем здесь лишь некоторые важнейшие результаты, а за деталями читателю следует обратиться к указанной только что литературе.

Существует несколько выражений для $H(\mu)$ ([361], стр. 186 — 187). Для вычислений удобно следующее представление:

$$H(\mu) = (\mu + 1)^{-1/2}\exp\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\theta \operatorname{arctg}(\mu \operatorname{tg}\theta)}{1 - \theta \operatorname{ctg}\theta} d\theta\right]. \tag{3.76}$$

Расчет по этой формуле дает результаты, представленные в табл. 3.1 [152], [518].

Таблица 3.1

Точный закон потемнения к краю для серой атмосферы

μ	$I(0, \mu)/F$	μ	$I(0, \mu)/F$
0,0	0,43301	0,6	0,95009
0,1	0,54012	0,7	1,02796
0,2	0,62802	0,8	1,10535
0,3	0,71123	0,9	1,18238
0,4	0,79210	1,0	1,25912
0,5	0,87156		

Значение $q(\infty)$ можно получить, если заметить, что, согласно формуле (3.15), $K(0) = Hq(\infty)$, и потому, пользуясь (3.71), находим

$$q(\infty) = \int_0^1 H(\mu)\mu^2 d\mu \Big/ \int_0^1 H(\mu)\mu d\mu. \tag{3.77}$$

Из явных выражений для $H(\mu)$ можно получить, что

$$q(\infty) = \frac{6}{\pi^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{\theta^2} - \frac{1}{1 - \theta \operatorname{ctg} \theta} \right) d\theta; \tag{3.78}$$

отсюда $q(\infty) = 0{,}71044609$ [519]. Наконец, можно написать в замкнутой форме выражение и для $q(\tau)$ [407]:

$$q(\tau) = q(\infty) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{e^{-\tau/\mu} d\mu}{H(\mu) Z(\mu)}, \tag{3.79}$$

где функция $H(\mu)$ определена так же, как и выше, и

$$Z(\mu) \equiv \left[1 - \frac{1}{2} \mu \ln \frac{(1 + \mu)}{(1 - \mu)} \right]^2 + \pi^2 \mu^2 / 4. \tag{3.80}$$

Результаты, полученные путем численного расчета по формуле (3.79), даны в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Точные значения для функции $q(\tau)$

τ	$q(\tau)$	τ	$q(\tau)$
0,00	0,577351	0,8	0,693534
0,01	0,588236	1,0	0,698540
0,03	0,601242	1,5	0,705130
0,05	0,610758	2,0	0,707916
0,10	0,627919	2,5	0,709191
0,20	0,649550	3,0	0,709806
0,30	0,663365	3,5	0,710120
0,40	0,673090	4,0	0,710270
0,50	0,680240	5,0	0,710398
0,60	0,685801	∞	0,710446

3.5. Поток, выходящий из серой атмосферы

Главное физическое предположение, сделанное в задаче о серой атмосфере, состоит в том, что коэффициент поглощения считается не зависящим от частоты. В таком случае условие лучистого равновесия принимает вид $S(\tau) = J(\tau)$, задача упрощается и сводится к получению решения уравнения (3.6). Если, кроме того, принять, что имеет место ЛТР, то $B(\tau) = \sigma_R T^4/\pi$ можно приравнять $J(\tau)$; тем самым мы приходим к формуле (3.16) для $T(\tau)$. Интенсивность излучения зависит от частоты, поскольку от частоты зависит функция источников, которую мы принимаем равной $B_\nu(T(\tau))$. Если функция источников задана, то зависимость потока от частоты на любой глубине можно рассчитать по формуле (2.59), которая в данном случае принимает вид

$$F_\nu(\tau) = 2\int_\tau^\infty B_\nu[T(t)]E_2(t-\tau)dt - 2\int_0^\tau B_\nu[T(t)] \times \times E_2(\tau - t)dt. \qquad (3.81)$$

Температура входит в функцию Планка только в комбинации $h\nu/(kT)$. Далее, отношение $T(\tau)/T_{эфф}$, согласно формуле (3.16), есть некоторая однозначная функция τ, скажем $1/p(\tau)$. Поэтому формулу (3.81) можно упростить, если ввести параметр $\alpha = h\nu/(kT_{эфф})$; тогда можно написать, что $h\nu/(kT) = \alpha p(\tau)$. Выразив поток в тех же