Обширные таблицы функций $\mathscr{F}$ и $\mathscr{I}$ можно найти в [74] и [483]. Обобщение этого приближения дается в [389]. Ввиду его простоты этот метод широко применялся в астрофизических исследованиях. Подробные таблицы сил осцилляторов f в кулоновском приближении даются в [264], стр. 363 — 441.

в) *Экспериментальные методы.* Во многих случаях точность кулоновского приближения недостаточна, тогда как более аккуратный квантовомеханический расчет слишком сложен для выполнения. В таких случаях приходится определять силы осцилляторов f экспериментально, что вдобавок дает стандарт для прямого сопоставления с теоретическими расчетами с целью оценить точность различных методов. Разработано множество различных способов экспериментального определения сил осцилляторов. Краткое описание некоторых наиболее часто используемых методов дается в [11], стр. 300 — 310; [261], стр. 146 — 149; [264], гл. 15.

Имеется огромное количество работ, содержащих как экспериментальные, так и теоретические определения значений сил осцилляторов или вероятностей переходов. Полная библиография этих работ дается в [454], [230] и [231]. Критические сводки значений вероятностей переходов (так сказать, их «лучшие значения») для многих элементов, представляющих интерес для астрофизики, даются в [453], [584], [670], [672] и [673].

Упражнение 4.4. Рассчитать значения f для линий He I λ5876 ($2p\,^3P - 3d\,^3D$), λ6678 ($2p\,^1P - 3d\,^1D$) и λ4471 ($2p\,^3P - 4d\,^3D$), воспользовавшись выражениями (4.66) и (4.85), значениями σ^2 в кулоновском приближении, силами мультиплетов и силами линий из таблиц. Сравнить результаты со стандартными значениями из [672].

4.3. Соотношения Эйнштейна — Милна для континуумов

Обобщение соотношений Эйнштейна на свободно-связанные процессы было дано Милном в статье [461], представляющей значительный интерес. Рассмотрим процесс фотоионизации, в начале которого имеется атом (или ион) в каком-то определенном связанном состоянии (не обязательно основном). В результате такой фотоионизации появляется ион в некотором определенном (возможно, возбужденном) состоянии следующей, т.е. более высокой стадии ионизации плюс свободный электрон, движущийся со скоростью v. Обратным процессом служит рекомбинация свободного электрона при его столкновении с ионом (находящимся в том конкретном состоянии, которое упоминалось выше). В результате этого образуется атом (в соответствующем состоянии). Процесс рекомбинации может быть либо *спонтанным*, либо *вынужденным*, происходящим под действием падающего излучения. Пусть n_0 — концентрация атомов, n_1 — концентрация ионов и n_e — концентрация свободных электронов. Электроны имеют максвелловское распределение скоростей. Число электронов со скоростями в интервале $(v, v + dv)$ обозначим $n_e(v)dv$. Пусть $p_\nu d\nu$ — *вероятность фотоионизации* атома фотоном в интервале частот $(\nu, \nu + d\nu)$. Тогда *число фотоионизаций* за время dt в этом интервале частот равно $n_0 p_\nu I_\nu d\nu dt$. Обычный объемный *коэффициент поглощения* энергии α_ν связан с p_ν соотношением $\alpha_\nu \equiv p_\nu h\nu$. Далее, пусть $F(v)dv$ — *вероятность спонтанного захвата* и $G(v)dv$ — *вероятность вынужденного захвата* ионами электронов со скоростями из промежутка $(v, v + dv)$. Тогда *число рекомбинаций* электронов со скоростями $(v, v + dv)$ за время dt в 1 см^3 равно

$$n_1 n_e[F(v) + G(v)I_\nu]\, v dv dt.$$

Энергия фотона, необходимая для ионизации атома (а тем самым — и энергия фотона, излучаемого в процессе рекомбинации), равна

$$h\nu = \chi_I + \frac{1}{2} mv^2, \tag{4.88}$$

где χ_I — потенциал ионизации атома с заданного уровня с появлением иона в рассматриваемом состоянии (т.е. разность энергий этих двух состояний).

Заметим теперь, что *при термодинамическом равновесии число фотоионизаций должно в точности равняться числу рекомбинаций*. Но при ТР $I_\nu \equiv B_\nu$, и поэтому

$$n_0^* p_\nu B_\nu = n_1^* n_e(v)[F(v) + G(v)B_\nu] \frac{h}{m}, \tag{4.89}$$

где звездочки указывают, что населенности термодинамически равновесные; кроме того, было использовано соотношение (4.88), позволяющее написать, что $h d\nu = m v dv$. Разрешая (4.89) относительно B_ν, находим

$$B_\nu = [F(v)/G(v)]\{[n_0^* p_\nu m / n_1^* n_e(v) h G(v)] - 1\}^{-1}. \tag{4.90}$$

Это выражение надо сравнить с обычным выражением для функции Планка, а именно $B_\nu(T) = (2h\nu^3/c^2)[\exp(h\nu/kT) - 1]^{-1}$. При максвелловском распределении скоростей [см. выражение (5.2)]

$$n_e(v)dv = n_e(m/2\pi kT)^{3/2} \exp(-mv^2/2kT)4\pi v^2 dv. \qquad (4.91)$$

Предвосхищая результаты гл. 5 [см. формулу (5.14)], воспользуемся тем, что

$$(n_0/n_1)^* = n_e(g_0/2g_1)(h^2/2\pi mkT)^{3/2} \exp(\chi_I/kT). \qquad (4.92)$$

Пользуясь формулами (4.88), (4.91) и (4.92), находим, что

$$n_0^* p_\nu m/n_1^* n_e(v) hG(v) = (h^2 g_0/8\pi m^2 g_1 v^2) \times \\ \times [p_\nu/G(v)] e^{n\nu/kT}. \qquad (4.93)$$

Поэтому, чтобы выражение (4.90) переходило в формулу Планка, должно быть

$$F(v) = (2h\nu^3/c^2)G(v)$$

и

$$p_\nu = (8\pi m^2 v^2 g_1/h^2 g_0)G(v) = (4\pi c^2 m^2 v^2 g_1/h^3 g_0 \nu^3)F(v). \qquad (4.95)$$

Это аналоги формул (4.8) и (4.9) для континуума. Здесь также следует обратить внимание, что, хотя эти соотношения были выведены из соображений, основанных на рассмотрении термодинамического равновесия, величины p_ν, $F(v)$ и $G(v)$ в действительности должны зависеть только от свойств атома, а поэтому формулы (4.94) и (4.95) должны быть верны и в общем случае.

Важное значение только что полученных результатов становится ясным, когда мы начинаем выписывать уравнение переноса. Сделаем при этом предположение, что на рассматриваемой частоте происходят только такие процессы фотоионизаций, о которых говорилось выше. Обобщение на случай многоуровенного атома и среды, содержащей атомы различных видов, с налагающимися непрозрачностями и коэффициентами излучения тривиально, так как вклады от всех членов *суммируются*, и те выводы, к которым мы сейчас придем, применимы тогда к соответствующим суммам. Уравнение переноса имеет вид

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = -n_0 p_\nu h\nu I_\nu + n_1 n_e(v)[F(v) + \\ + G(v)I_\nu](h^2\nu/m). \qquad (4.96)$$

В этом уравнении значения n_0 и n_1 не обязательно должны соответствовать ЛТР. Если мы хотим записать уравнение переноса в стандартной форме, то ясно, что *коэффициент поглощения, исправленный за вынужденное излучение*, должен быть

$$k_\nu = \{n_0 - n_1 n_e(v)[hG(v)/mp_\nu]\}p_\nu h\nu. \tag{4.97}$$

Пользуясь формулами (4.88), (4.91), (4.92) и (4.95) и вспоминая, что $\alpha_\nu = p_\nu h\nu$, находим

$$k_\nu = (n_0 - n_0^* e^{-h\nu/kT})\alpha_\nu. \tag{4.98}$$

В формуле (4.98) n_0^* есть значение n_0, соответствующее ЛТР. Оно дается формулой (4.92) *при имеющихся на самом деле* значениях n_1 и n_e (т.е. это равновесная населенность, отвечающая имеющейся ионной концентрации). В частном случае ЛТР, когда $n_0 \equiv n_0^*$,

$$k_\nu^* = n_0^*\alpha_\nu(1 - e^{-h\nu/kT}). \tag{4.99}$$

Как и в случае связанно-связанных переходов, член $(1 - e^{-h\nu/kT})$ называют обычно поправкой на вынужденное излучение. Ясно, однако, что это выражение справедливо *только* при ЛТР. В то же время из формулы (4.98) видно, что вынужденное излучение *всегда* происходит с той же скоростью, что и при ЛТР (если под n_0^* понимать ту же величину, что и выше). Это так и *должно* быть, поскольку процесс рекомбинации есть процесс, при котором происходит *столкновение* частиц, имеющих *равновесное* (т.е. максвелловское) распределение скоростей. Обратите внимание на отличие ситуации в этом случае от результата, даваемого формулой (4.13) для связанно-связанных переходов, где член, учитывающий вынужденное излучение, вообще говоря, *не имеет* равновесного значения. Когда отклонения от ЛТР влияют на непрозрачность, обусловленную свободно-связанными переходами, они изменяют член, учитывающий *прямое* поглощение. В него входит населенность n_0, которая, вообще говоря, не будет равна n_0^*. Эти результаты будут использованы, когда будут записываться члены, учитывающие вынужденное излучение в уравнениях статистического равновесия [см. формулу (5.63)], а также при записи общего выражения для коэффициента поглощения [см. формулу (7.1)].

Возвращаясь к уравнению (4.96) и рассматривая член, содержащий $F(v)$, обнаруживаем, что *коэффициент излучения* равен

$$\eta_\nu = [hn_1 n_e(v)F(v)/mp_\nu]\alpha_\nu, \tag{4.100}$$

что с помощью (4.88), (4.91), (4.92) и (4.95) можно переписать в виде

$$\eta_\nu = (2h\nu^3/c^2)n_0^*\alpha_\nu e^{-h\nu/kT} = n_0^*\alpha_\nu(1 - e^{-h\nu/kT})B_\nu = k_\nu^* B_\nu(T). \quad (4.101)$$

Таким образом, излучательная способность в континууме всегда имеет значение, соответствующее ЛТР (если n_0^* определено так, как указано выше), чего и следовало ожидать, поскольку рекомбинация — это ударный процесс. Отметим, что этот вывод снова приводит нас к закону Кирхгофа — Планка [формула (2.6)] и тем самым несколько расширяет область его применимости. Обращаем, кроме того, внимание на отличие от случая связанно-связанного спонтанного излучения, для которого отклонения от ЛТР проявляются непосредственно, если n_j не совпадает с n_j^*. Эти заключения найдут применение при записи членов уравнений статистического равновесия, учитывающих спонтанное излучение [см. формулу (5.61)], а также при записи общего выражения для коэффициента излучения [см. формулу (7.2)].

Упражнение 4.5. Убедиться в справедливости формул (4.93), (4.98) и (4.101).

4.4. Сечения поглощения в континууме

Сечения связанно-свободного поглощения можно рассчитать квантовомеханически, пользуясь по существу теми же методами, которые использовались в § 4.2 для связанно-связанных переходов. Рассмотрим процесс поглощения при переходе из некоторого связанного состояния n со статистическим весом g_n в континуум в интервале частот $\Delta\nu$. Свободные состояния имеют волновые функции, характеризующиеся значением энергии свободного электрона E, и нормированы таким образом, что

$$\langle E' | E \rangle = \delta(E' - E), \quad (4.102)$$

так что вырождения нет. Поэтому по аналогии с формулой (4.65) можно написать, учитывая также (4.36),

$$g_n \alpha_\nu \Delta\nu = (8\pi^2/3\hbar^2 c)\Delta E \, \langle E | \mathbf{d} | n \rangle^2 (h\nu/4\pi), \quad (4.103)$$

или

$$\alpha_\nu = (8\pi^3 \nu/3cg_n)\langle E | \mathbf{d} | n \rangle^2. \quad (4.104)$$

Расчет волновых функций непрерывного спектра в этой книге рас-