

ТАБЛИЦА 5.2

Отношение скоростей ударного и радиативного возбуждения

$\lambda, \text{ \AA}$	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
Солнце	0,003	0,007	0,017	0,035	0,061	0,099	0,15
О-звезда	0,19	0,44	0,85	1,4	2,2	3,1	4,2

Источник: по данным К. Х. Бёма, из сборника *Stellar atmospheres*, ed. J. L. Grestein, Chicago, University of Chicago Press, 1960. [Имеется перевод: *Звездные атмосферы*. Под редакцией Дж. Л. Гринстейна. М.: ИЛ, 1963.]

получим

$$\frac{C_{ii}}{R_{ij}} = \frac{3e^2 m^{1/2} \lambda^3}{2h(2\pi^3 kT)^{1/2}} \frac{n_e}{W} E_2(x)(e^x - 1), \quad (5.47)$$

где $x = h\nu_{ij}/kT$. Бём вычислил это отношение для условий, типичных для солнечной атмосферы и атмосферы О-звезды (при $W = 1$) и получил результаты, которые приведены в таблице 5.2. Видно, что радиативные переходы преобладают, за исключением линий, лежащих в красной и инфракрасной областях спектра у горячих звезд. Те же самые замечания о непланковском характере поля излучения, которые были сделаны выше, применимы и к линиям (даже в еще большей мере!). Поэтому мы снова приходим к выводу, что должны совместно решаться уравнения статистического равновесия и переноса излучения. Можно было бы подумать, что ЛТР должно иметь место для линий в длинноволновой части спектра — на том основании, что ударные переходы здесь преобладают. Но, как будет показано в § 12.4, это не так, и на самом деле именно в этих линиях эффекты отклонений от ЛТР часто оказываются самыми большими!

5.4. Уравнения статистического равновесия без предположения об ЛТР

Рассмотрим теперь *уравнения статистического равновесия*, или *уравнения стационарности*, с помощью которых рассчитываются

истинные населенности связанных и свободных состояний атомов в звездных атмосферах. Сделаем упрощающее предположение о полном перераспределении в линиях (иначе говоря, *профили излучения и поглощения считаются совпадающими*). Уравнения, получаемые на основе этого предположения, будут использоваться нами при обсуждении образования линий в гл. 12, а рассмотрение эффектов частичного перераспределения будет отложено до гл. 13.

ОБЩАЯ ФОРМА

Рассмотрим элемент объема в движущейся среде. Изменение со временем концентрации частиц химической составляющей k , находящихся в некотором заданном (связанном или свободном) состоянии i , будет определяться *потоком* частиц через ограничивающую этот объем поверхность и *темпом* поступления из других состояний j за счет радиативных и ударных процессов, так что

$$\frac{\partial n_{ik}}{\partial t} = -\nabla \cdot (n_{ik}\mathbf{v}) + \sum_{j \neq i} (n_{jk}P_{ji} - n_{ik}P_{ij}). \quad (5.48)$$

Здесь P_{ij} — полная вероятность перехода с уровня i на j . С помощью формулы Гаусса можно показать, что первый член в правой части представляет собой разность между числами частиц, вытекающих в единичный объем и вытекающих из него. Если выполнить суммирование по всем состояниям частиц вида k и обозначить $N_k = \sum_i n_{ik}$, то получим *уравнение неразрывности* для этой составляющей газа:

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} + \nabla \cdot (N_k\mathbf{v}) = 0. \quad (5.49)$$

Если уравнение (5.49) умножить на массу m_k частиц вида k и просуммировать по всем химическим составляющим газа, получим стандартное гидродинамическое уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (5.50)$$

где $\rho = \sum_k m_k N_k$. В *стационарном* случае уравнение (5.48) упрощается и принимает вид

$$n_{ik} \sum_{j \neq i} P_{ij} - \sum_{j \neq i} n_{jk} P_{ji} = -\nabla \cdot (n_{ik}\mathbf{v}), \quad (5.51)$$

а для *неподвижной* атмосферы имеем (опуская индекс k)

$$n_i \sum_{j \neq i} P_{ij} - \sum_{j \neq i} n_j P_{ji} = 0. \quad (5.52)$$

Поскольку в этой книге по гл. 13 включительно рассматриваются только неподвижные среды, мы будем иметь дело почти исключительно с уравнением (5.52). Каким образом следует обращаться с движущимися средами, рассматривается в гл. 14, а в гл. 15 будут отмечены некоторые следствия того, что правая часть (5.51) не равна нулю. Полная вероятность перехода P_{ij} содержит, вообще говоря, как радиативные, так и ударные члены. Выпишем теперь их подробно.

РАДИАТИВНЫЕ ЧЛЕНЫ

а) *Связанно-связанные переходы.* Введем две системы обозначений (выражающих одну и ту же физическую суть), записав число связанно-связанных переходов в единице объема за единицу времени через эйнштейновские вероятности переходов и через сечения поглощения. Первый способ записи удобен при аналитических исследованиях упрощенных моделей атома, а второй позволяет записать число связанно-связанных и связанно-свободных переходов в одной и той же форме, хорошо приспособленной для расчетов моделей атмосфер.

Рассмотрим переходы из связанного состояния i в более высокое связанное состояние j , происходящие в линии с профилем поглощения (и излучения) ϕ_ν . Число переходов, вызываемых излучением интенсивности I_ν , падающим в интервале частот $d\nu$ и в телесном угле $d\omega$, равно $n_i B_{ij} \phi_\nu I_\nu d\nu d\omega / 4\pi$, или $n_i \alpha_{ij}(\nu) (h\nu)^{-1} I_\nu d\nu d\omega$. В *неподвижной среде* ϕ_ν изотропно, так что, проинтегрировав это выражение по углам и по частотам, получим *число актов поглощения* в линии:

$$\begin{aligned} n_i R_{ij} &= n_i B_{ij} \int \phi_\nu J_\nu d\nu = n_i B_{ij} \bar{J}_{ij} = n_i 4\pi \alpha_{ij} \bar{J}_{ij} / h\nu_{ij} = \\ &= n_i 4\pi \int \alpha_{ij}(\nu) (h\nu)^{-1} J_\nu d\nu. \end{aligned} \quad (5.53)$$

В *движущихся средах* (гл. 14) можно рассматривать либо *сопутствующую систему* отсчета, и в этом случае формула (5.53) остается в силе, если под J_ν понимать среднюю интенсивность для наблюдателя, неподвижного по отношению к движущемуся веществу, или *систему отсчета наблюдателя*. В этом случае ϕ_ν зависит от углов,

и двойной интеграл по углам и по частотам следует выписать в явном виде. Аналогичное замечание применимо и к другим выражениям для числа радиативных переходов в единице объема за единицу времени, приводимым ниже.

Число актов вынужденного излучения равно

$$n_j B_{ji} \int \phi_\nu J_\nu d\nu = n_j B_{ji} \bar{J}_{ij} = n_j (g_i B_{ij} / g_j) \bar{J}_{ij} = \\ = n_j (4\pi / h\nu_{ij}) (g_i \alpha_{ij} / g_j) \bar{J}_{ij}. \quad (5.54)$$

Число актов спонтанного излучения есть

$$n_j A_{ji} \int \phi_\nu d\nu = n_j (2h\nu_{ij}^3 / c^2) B_{ji} = n_j (2h\nu_{ij}^3 / c^2) (4\pi / h\nu_{ij}) (g_i \alpha_{ij} / g_j). \quad (5.55)$$

Полное число переходов вниз равно сумме чисел спонтанных и вынужденных переходов:

$$n_j R'_{ji} = n_j (A_{ji} + B_{ji} \bar{J}_{ij}) = n_j (4\pi / h\nu_{ij}) (g_i \alpha_{ij} / g_j) [2h\nu_{ij}^3 / c^2 + \bar{J}_{ij}]. \quad (5.56)$$

Штрих у R'_{ji} подставлен для того, чтобы сохранить возможность использовать обозначение R_{ji} без штриха для другой величины. Выражение (5.56) можно переписать в другом виде, выделив в правой части множитель $(n_i/n_j)^* = g_i \exp(h\nu_{ij}/kT) / g_j$, и тогда полное число переходов вниз выразится так:

$$n_j R'_{ji} = n_j \left(\frac{n_i}{n_j} \right)^* R_{ji} = n_j \left(\frac{n_i}{n_j} \right)^* \left[4\pi \int \frac{\alpha_{ij}(\nu)}{h\nu} \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} + J_\nu \right) e^{-h\nu/kT} d\nu \right]. \quad (5.57)$$

На первый взгляд выражение (5.57) кажется излишне громоздким — ведь из-за быстрого убывания ϕ_ν с удалением от ν_{ij} множители $(h\nu)^{-1}$, ν^3 и $\exp(-h\nu/kT)$ можно вынести из-под интеграла. Выражение для числа переходов вниз написано именно в таком виде потому, что тогда оно имеет в точности ту же форму, что и выражение для числа переходов вниз в континууме. Более того, число ударных переходов вниз также будет в явном виде содержать множитель $(n_i/n_j)^*$. В итоге если мы будем пользоваться формулой (5.57), а не более простым выражением с эйнштейновскими вероятностями, то в полных уравнениях статистического равновесия получим более экономные обозначения.

Наконец, иногда удобно работать с числом некомпенсирован-

ных переходов с уровня j на уровень i :

$$n_j(A_{ji} + B_{ji}\bar{J}_{ij}) - n_i B_{ij}\bar{J}_{ij} \equiv n_j A_{ji} Z_{ji}, \quad (5.58)$$

где множитель Z_{ij} будем называть *фактором радиационного разбаланса* (net radiative bracket, NRB). Множители разбаланса — удобное средство для упрощения обозначений, которое будет использоваться в гл. 11 и 12. Далее, Z_{ji} можно переписать в виде

$$Z_{ji} = 1 - \bar{J}_{ij}(n_i B_{ij} - n_j B_{ji})/n_j A_{ji} = 1 - \bar{J}_{ij}/S_{ij}, \quad (5.59)$$

где S_{ij} — функция источников в линии (не зависящая от частоты). Так как в фактор радиационного разбаланса входит только отношение \bar{J} к S , часто оказывается, что в итерационных процедурах он известен с гораздо более высокой точностью, чем сами величины S или \bar{J} . При благоприятных условиях использование факторов радиационного разбаланса может значительно усилить сходимость некоторых методов решений многоуровневных задач об образовании линий. Если для какой-то линии $i \rightarrow j$ имеет место *детальный радиационный баланс*, то $Z_{ij} = 0$, и *взаимное сокращение* соответствующих членов в уравнениях статистического равновесия можно произвести *аналитически* (т.е. опустить R_{ij} и R_{ji}). Такое положение имеет место, когда поле излучения в рассматриваемой линии *термализуется*. Это взаимное сокращение членов имеет важное значение для упрощения уравнений статистического равновесия (см. § 7.5).

б) *Связанно-свободные переходы*. Рассчитаем теперь число радиативных переходов из связанного состояния i в континуум k . Пусть $\alpha_{ik}(\nu)$ — сечение фотоионизации на частоте ν . Тогда число фотоионизаций получается делением энергии, поглощенной в интервале $d\nu$, на соответствующую энергию фотона $h\nu$ и последующим интегрированием по всем частотам. Поэтому число фотоионизаций равно

$$n_i R_{ik} = n_i 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_{ik}(\nu) (h\nu)^{-1} J_{\nu} d\nu. \quad (5.60)$$

Число спонтанных рекомбинаций можно рассчитать, воспользовавшись рассмотрением детального баланса. При *термодинамическом равновесии* число спонтанных рекомбинаций должно равняться числу фотоионизаций, рассчитанному по формуле (5.60), когда

а) J_ν имеет равновесное значение (т.е. B_ν) и б) введена поправка за вынужденное излучение в условиях ТР путем включения множителя $(1 - e^{-h\nu/kT})$ (см. § 4.3). Поэтому если концентрацию ионов обозначить через n_k , то

$$(n_k R'_{ki})^*_{\text{спонт}} = n_i^* 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_{ik}(\nu) (h\nu)^{-1} B_\nu (1 - e^{-h\nu/kT}) d\nu. \quad (5.61)$$

Рекомбинация — это процесс, в котором участвуют электроны и ионы, и поэтому число актов рекомбинации пропорционально $n_k n_e$. При заданной электронной концентрации и заданной температуре T_e , которая по определению описывает распределение скоростей электронов, только что вычисленная скорость рекомбинации *в расчете на один ион* должна годиться и при отсутствии ТР. Значит, чтобы получить число актов спонтанной рекомбинации, не предполагая состояния ЛТР, достаточно в формуле (5.61) заменить n_i^* на реально имеющуюся концентрацию ионов n_k . Тогда

$$\begin{aligned} (n_k R'_{ki})^*_{\text{спонт}} &= n_k \left(\frac{n_i}{n_k} \right)^* 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_{ik}(\nu) (h\nu)^{-1} B_\nu (1 - e^{-h\nu/kT}) d\nu = \\ &= n_k \left(\frac{n_i}{n_k} \right)^* 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_{ik}(\nu) (h\nu)^{-1} (2h\nu^3/c^2) e^{-h\nu/kT} d\nu. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Напомним, что согласно формуле (5.14), $(n_i/n_k)^* = n_e \Phi_{ik}(T)$. Поэтому оказывается, что число спонтанных рекомбинаций есть произведение концентраций электронов и ионов на некоторую функцию температуры (которая через посредство сечения зависит от свойств атома).

Число вынужденных рекомбинаций можно рассчитать аналогичным образом. При ТР

$$(n_k R'_{ki})^*_{\text{вынужд}} = n_i^* 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_{ik}(\nu) (h\nu)^{-1} B_\nu e^{-h\nu/kT} d\nu. \quad (5.63)$$

Чтобы распространить этот результат на случай, когда ЛТР не предполагается, а) заменим равновесную интенсивность излучения B_ν имеющимся реально значением J_ν и б) используем реально имеющуюся концентрацию ионов n_k :

$$(n_k R'_{ki})^*_{\text{вынужд}} = n_k \left(\frac{n_i}{n_k} \right)^* 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_{ik}(\nu) (h\nu)^{-1} J_\nu e^{-h\nu/kT} d\nu. \quad (5.64)$$

Следовательно, полное число рекомбинаций равно

$$n_k(R'_{kиспонт} + R'_{kивынужд}) \equiv n_k(n_i/n_k)^* R_{ki} =$$

$$= n_k \left(\frac{n_i}{n_k}\right)^* 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\alpha_{ik}(\nu)}{h\nu} \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} + J_\nu\right) e^{-h\nu/kT} d\nu. \quad (5.65)$$

Число рекомбинаций иногда выражают через коэффициент рекомбинации $\alpha_{RR}(T)$, определяемый таким образом, что число рекомбинаций, даваемое выражением (5.65), оказывается равным $n_k n_e \alpha_{RR}(T)$.

Сравнивая выражения (5.53) и (5.60), обнаруживаем, что при записи полных уравнений статистического равновесия можно унифицировать обозначения и записывать число любых радиативных переходов вверх $i \rightarrow j$, как в связанные состояния j , так и в свободные, в виде $n_i R_{ij}$, где

$$R_{ij} = 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_{ij}(\nu) (h\nu)^{-1} J_\nu d\nu, \quad (5.66)$$

а число любых радиативных переходов вниз $j \rightarrow i$, как следует из сопоставления выражений (5.57) и (5.65), — в виде $n_j (n_i/n_j)^* R_{ji}$, где

$$R_{ji} = 4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_{ij}(\nu) (h\nu)^{-1} (2h\nu^3/c^2 + J_\nu) e^{-h\nu/kT} d\nu. \quad (5.67)$$

Отметим, что при термодинамическом равновесии $R_{ij}^* = R_{ji}^*$.

УДАРНЫЕ ЧЛЕНЫ

Газ в звездных атмосферах представляет собой плазму, состоящую из атомов, ионов и электронов, между которыми могут происходить разнообразные столкновения, приводящие к возбуждению и ионизации. В атмосферах холодных звезд, где вещество в основном нейтрально, происходят многочисленные и играющие важную роль столкновения с нейтральными атомами водорода. Однако по мере того, как вещество становится заметно ионизованным, из-за дальнедействующего характера кулоновского взаимодействия начинают преобладать столкновения с заряженными частицами. Более того, поскольку частота столкновений пропорциональна потоку падающих частиц, а значит, их скорости, обычно достаточно рассматривать лишь столкновения с электронами, так как при тепло-

вом равновесии их скорости в $(m_H A / m_e)^{1/2} \approx 43A^{1/2}$ раз больше скоростей ионов с атомным весом A .

Если через $\sigma_{ij}(v)$ обозначить сечение процесса, приводящего к переходу $i \rightarrow j$ (где j может относиться и к связанному, и к свободному состоянию) за счет столкновений с электронами со скоростью v , то полное число столкновений будет равно

$$n_i C_{ij} = n_i n_e \int_{v_0}^{\infty} \sigma_{ij}(v) f(v) v dv \equiv n_i n_e q_{ij}(T), \quad (5.68)$$

где v_0 — скорость, соответствующая пороговой энергии процесса, т.е. $m_e v_0^2 / 2 = E_0$. Число переходов вниз $j \rightarrow i$ можно немедленно получить из рассмотрения детального баланса, так как распределение скоростей электронов равновесное (т.е. максвелловское). Поэтому мы должны иметь

$$n_i^* C_{ij} = n_j^* C_{ji}, \quad (5.69)$$

откуда следует, что число переходов вниз равно

$$n_j C_{ji} = n_j (n_i / n_j)^* C_{ij} = n_j (n_i / n_j)^* n_e q_{ij}(T). \quad (5.70)$$

Как и в случае радиативных переходов, иногда оказывается удобным ввести *фактор ударного разбаланса* (net collisional bracket) Y_{ij} и записывать нескомпенсированное число ударных переходов $i \rightarrow j (E_i < E_j)$ в виде

$$n_i C_{ij} Y_{ij} \equiv n_i C_{ij} - n_j C_{ji} = n_i C_{ij} \left[1 - \frac{n_j}{n_i} \frac{n_i^*}{n_j^*} \right]. \quad (5.71)$$

Сечения σ_{ij} , необходимые для расчета чисел переходов, находятся либо экспериментально, либо путем довольно сложных квантово-механических расчетов. Описание соответствующих методов завело бы нас слишком далеко в сторону, и поэтому мы просто отошлем интересующегося этим читателя к [410]. Существует обширная литература, содержащая результаты (теоретические и экспериментальные) для различных переходов, представляющих интерес для астрофизики. Библиография этих работ время от времени издается информационным центром Объединенного института лабораторной астрофизики Колорадского университета и Национального бюро стандартов США. (В этом центре непрерывно пополняемый список ссылок на текущую литературу введен в память ЭВМ, с которой возможна прямая связь.)

Как видно из формулы (5.68), нас больше интересуют *полные числа переходов* при заданных сечениях, чем сами сечения. Изучим

поэтому немного подробнее q_{ij} . Обычно сечения измеряют в единицах πa_0^2 , где a_0 — боровский радиус, т.е. полагают $\sigma_{ij} = \pi a_0^2 Q_{ij}$. Кроме того, Q_{ij} обычно табулируют в функции энергии возбуждающей частицы. Поэтому, полагая $mv^2/2 = E$ и подставляя в (5.68) выражение (5.2), находим

$$q_{ij}(T) = C_0 T^n \int_{u_0}^{\infty} Q_{ij}(ukT) u e^{-u} du, \quad (5.72)$$

где $u = E/kT$ и $C_0 = \pi a_0^2 (8k/m\pi)^{1/2} = 5,5 \cdot 10^{-11}$. Если обозначить $x = u - u_0$, где $u_0 = E_0/kT$, то получим

$$q_{ij}(T) = C_0 T^{1/2} \exp(-E_0/kT) \Gamma_{ij}(T), \quad (5.73)$$

где

$$\Gamma_{ij}(T) = \int_0^{\infty} Q_{ij}(E_0 + xkT)(x + u_0) e^{-x} dx. \quad (5.74)$$

Упражнение 5.5. Убедиться в справедливости формул (5.72) — (5.74).

Достоинство записи числа столкновений в форме (5.73) состоит в том, что главная зависимость от температуры выделяется в виде множителя $T^{1/2} \exp(-E_0/kT)$, а $\Gamma_{ij}(T)$ — медленно меняющаяся функция T .

Конечно, при практических применениях главный вопрос состоит в получении надежных значений Q_{ij} . Характерная для астрофизики трудность состоит в том, что для многих представляющих интерес переходов $kT \ll E_0$, так что число их чрезвычайно чувствительно к значениям Q_{ij} вблизи порога. К сожалению, при $E \approx E_0$ получить достаточно точные сечения путем расчета нелегко, поскольку приближения, приводящие к упрощениям, здесь неприменимы, а *резонансы* в сечении столкновения приводят к тому, что поведение Q_{ij} оказывается сложным. Когда значения Q_{ij} удается получить, то обычно их представляют той или иной простой аналитической аппроксимацией, при применении которой интегрирование в формуле (5.74) можно выполнить аналитически.

Для важных для астрофизики спектров H, HeI и HeII имеются измеренные с большой точностью сечения возбуждения и ионизации из основного состояния. В отношении переходов, начинающихся с возбужденных уровней, приходится полагаться на теоретические расчеты. Для многих представляющих интерес атомов и ионов может оказаться, что никаких сколько-нибудь надежных оценок нет

вовсе, так что может возникнуть необходимость прибегнуть к грубым методам получения оценок числа переходов. Известно очень полезное (хотя и весьма приближенное) выражение для числа переходов через силу осциллятора, применимое в том случае, когда переход является оптически разрешенным [639], а именно

$$C_{ij} = C_0 n_e T^{1/2} [14,5 f_{ij} (I_H / E_0)^2] u_0 \exp(-u_0) \Gamma_e(u_0), \quad (5.75)$$

где $u_0 = E_0/kT$, I_H — энергия ионизации водорода, и для ионов

$$\Gamma_e(u_0) = \max[\bar{g}; 0,276 \exp(u_0) E_1(u_0)]. \quad (5.76)$$

Параметр \bar{g} равен примерно 0,7 для переходов вида $nl \rightarrow nl'$ и около 0,2 для переходов вида $nl \rightarrow n'l'$, $n' \neq n$ [95]. Для нейтральных атомов $\Gamma_e(u_0)$ имеет другой вид (см. [47]). Следует подчеркнуть, что формулы (5.75) и (5.76) дают в лучшем случае грубые значения, и применять их следует с осторожностью. В частности, на столкновения не распространяется правило отбора для дипольного излучения $\Delta l = \pm 1$, и для других значений Δl сечения могут быть не меньше, чем при $\Delta l = \pm 1$, несмотря на то что величины f_{ij} в дипольном приближении равны нулю. Для ударных ионизаций получена полуэмпирическая формула [402]

$$\sigma_{ik}(E) = \pi a_0^2 [2,5 \zeta (I_H / E_0)^2] \ln(E/E_0) \{1 - b \exp[-c(E - E_0)/E_0]\} / (E/E_0), \quad (5.77)$$

которая для числа переходов дает

$$C_{ik} = C_0 n_e T^{1/2} [2,5 \zeta (I_H / E_0)^2] u_0 [E_1(u_0) - b e^c u_0 E_1(u_1) / u_1], \quad (5.78)$$

где ζ , b и c — эмпирические параметры, специально подбираемые для каждого типа атомов, и $u_1 = u_0 + c$. Другую приближенную формулу можно получить, выразив сечение ударной ионизации через сечение фотоионизации [73], стр. 374, что дает для числа переходов [334], стр. 121,

$$C_{ik} = 1,55 \cdot 10^{13} n_e T^{-1/2} \bar{g}_i \alpha(\nu_0) \exp(-u_0/u_0), \quad (5.79)$$

где $\alpha(\nu_0)$ — сечение фотоионизации у порога и \bar{g}_i порядка 0,1; 0,2 и 0,3 при $Z = 1$; 2 и >2 , соответственно (здесь Z — заряд иона). Оговорки, которые были сделаны в отношении формулы (5.75), применимы и к формулам (5.78) и (5.79).

АВТОИОНИЗАЦИЯ И ДИЭЛЕКТРОННАЯ РЕКОМБИНАЦИЯ

В сложных атомах с несколькими электронами потенциал ионизации определяется той *самой низкой* энергией, к которой сходится последовательность связанных состояний с *одним* возбужденным электроном (ей соответствует *основное состояние* иона). Если в атоме возбуждены два электрона, это будет приводить к состояниям, которые, вообще говоря, имеют энергии, лежащие и ниже, и выше упомянутого выше предела ионизации. Ионы, находящиеся в состояниях, лежащих выше предела ионизации, могут — с учетом определенных правил отбора [172], стр. 371; [297], стр. 173, — испытывать *автоионизацию*, порождая ион в основном состоянии плюс свободный электрон. Возможен и обратный процесс, так что если ион, находящийся в основном состоянии, испытывает столкновение с электроном достаточно большой энергии, может возникнуть атом с двумя возбужденными электронами. Вообще говоря, этот процесс большого интереса не представляет, так как дважды возбужденный атом будет немедленно снова испытывать автоионизацию (типичные коэффициенты вероятностей автоионизационных переходов A_a равны $10^{13} - 10^{14}!$), и их равновесная концентрация будет мала. Однако в некоторых случаях происходит стабилизирующий переход, при котором один из двух возбужденных электронов (обычно тот, который находится на более низком квантовом уровне) переходит с излучением на самый низкий из доступных ему квантовых уровней, создавая тем самым связанный атом с одним возбужденным электроном. Этот процесс может служить эффективным механизмом рекомбинации. Он известен как *диэлектронная рекомбинация*.

В частности, для иона химического элемента X, имеющего заряд Z, мы рассматриваем процессы типа

$$X^{+(Z)}(n, l) + e(E, l'' + 1) \rightleftharpoons X^{+(Z-1)}(n', l + 1; n'', l''), \quad (5.80a)$$

за которыми следует стабилизирующий переход

$$X^{+(Z-1)}(n', l + 1; n'', l'') \rightarrow X^{+(Z-1)}(n, l; n'', l'') + h\nu, \quad (5.80b)$$

в результате которого остается ион с зарядом $Z - 1$ в связанном возбужденном состоянии. Например, для He^+ мы могли бы иметь

$$He^+(1s) + e(E, l'' + 1) \rightarrow He^0(2p; n'', l''),$$

$$He^0(2p; n'', l'') \rightarrow He^0(1s; n'', l'') + h\nu.$$

Если дважды возбужденное состояние обозначить через d , конечное связанное состояние иона $Z - 1$ через b , а основное состоя-

ние иона Z через k , то число диэлектронных рекомбинаций в состоянии b из d можно записать в виде $n_k R_{db} = n_d A_s$, где A_s — вероятность спонтанного стабилизирующего перехода вниз. В хорошем приближении (в частности, для больших n'') $A_s = A(n', l + 1; n, l)$ для иона с зарядом Z . В предельном случае слабых полей излучения процессом, обратным (5.80б), можно пренебречь, и если A_0 — вероятность перехода с *автоионизацией*, то n_d можно выразить ([73], стр. 258) через равновесную населенность n_d^* :

$$n_d = n_d^* A_0 / (A_0 + A_s), \quad (5.81)$$

где

$$n_d^* = n_k n_e (g_d / g_k) C_I T^{-3/2} \exp(-\chi_{dk} / kT) \equiv n_k n_e \Phi_{kd}(T). \quad (5.82)$$

Здесь χ_{dk} — энергия состояния d , отсчитанная от предела ионизации.

Упражнение 5.6. Вывести выражение (5.82), применив формулу Саха (5.14) к континууму k и связанному состоянию b и формулу Больцмана (5.5) к состояниям b и d .

Таким образом, число диэлектронных рекомбинаций из *каждого* состояния d в *любое* состояние b равно

$$n_k R_{db} = n_k n_e \Phi_{kd}(T) A_s A_d / (A_s + A_d). \quad (5.83)$$

Как и в случае радиативных рекомбинаций, часто оказывается удобным ввести коэффициент диэлектронной рекомбинации α_{DR} , такой, что $n_k R_{db} = n_k n_e \alpha_{DR}$. Отметим, что отношение чисел диэлектронных и радиативных рекомбинаций выражается только через $\alpha_{DR} / \alpha_{RR}$, а потому не зависит от плотности и является функцией лишь температуры.

Диэлектронная рекомбинация в звездных атмосферах важна в двух отношениях. Во-первых, просуммировав по *всем* состояниям (n, l) и (n', l') , можно рассчитать полную скорость диэлектронной рекомбинации. Как было показано в классической работе Бёрджесса [118], при высоких температурах этот процесс становится чрезвычайно существенным. Например, при температурах $T \geq 10^6$ К скорость диэлектронной рекомбинации для He^+ превосходит скорость радиативной рекомбинации в 10^2 раз, однако при $T \leq 10^5$ К она становится меньше скорости радиативной рекомбинации. Бёрджесс убедительно показал, что диэлектронная рекомбинация является основным процессом рекомбинации в солнечной короне (где $T \approx 2 \cdot 10^6$ К и $n_e \sim 10^8$) и что именно *этот механизм ответст-*

вен за установление ионизационного равновесия в короне. При расчете полной скорости диэлектронной рекомбинации приходится производить суммирование по огромному числу состояний, причем наиболее существенный вклад дают состояния с $n'' \gg n'$ и $l'' \gg l + 1$. Эти высокие состояния имеют большие значения χ_{dk} . Именно поэтому и нужны высокие температуры. Только тогда экспоненциальный множитель в формуле (5.82) становится не слишком малым, а диэлектронная рекомбинация — значительной (иначе говоря, чтобы электроны имели энергию, достаточную для протекания реакции (5.80а), значение kT должно быть велико). При суммировании приходится столкнуться с проблемой расходимости при больших n'' , аналогичной той, которая имеет место для сумм по состояниям, если только не рассматривать обе входящие в формулу (5.83) вероятности A_s и A_a одновременно, приняв во внимание, что при достаточно больших n'' значение A_s будет больше A_a . Расчет полной скорости диэлектронной рекомбинации требует определения большого числа вероятностей стабилизирующих переходов и сечений столкновений (чтобы рассчитать A_a из рассмотрения детального баланса), а это сделать по меньшей мере трудно. Была получена приближенная общая формула, которая для большинства представляющих интерес ионов дает результаты с терпимой точностью [119].

Дальнейшее исследование [121] показало, что в короне влияние переходов, обратных (5.80б), которые вызываются падающим на корону фотосферным излучением, мало. Было также найдено, что при достаточно высоких плотностях дважды возбужденные состояния могут разрушаться за счет ударной ионизации. Отсюда можно заключить, что в более глубоких слоях атмосферы (например, в солнечной хромосфере и фотосфере) диэлектронная рекомбинация не играет важной роли.

Другой случай, когда диэлектронная рекомбинация существенна, характерен для ряда ионов (например, CIII и NIII), которые имеют *низко расположенные* дважды возбужденные состояния ($\chi_{dk} < kT$), что ведет к накачке свободных электронов на избранные связанные состояния. Замечательным примером служит состояние $2s2p(^1P_1)3d$ иона NIII, расположенное всего на 1,16 эВ выше предела ионизации с образованием $NIV2s^2\ ^1S$. Из этого состояния электроны непосредственно переходят на уровни $NIII2s^23d$, и тем самым создаются знаменитые эмиссионные линии NIII $\lambda 4634-40$ ($3d \rightarrow 3p$) у звезд класса Of [115], [429], [440]. В таких случаях оказывается, что $A_a \gg A_s$, так что n_a имеет равновесное (по отношению к имеющей-

ся концентрации ионов) значение (5.82). С другой стороны, эти процессы происходят достаточно глубоко в атмосфере, чтобы для стабилизирующих переходов было нужно учитывать обратные переходы, вызываемые излучением. Если состояние d характеризуется квантовыми числами (n', l', L') , а состояние b — числами (n, l, L) , то полная скорость рекомбинации равна

$$n_k R_{db} = n_k n_e \sum_{n', l', L', L} \Phi_{n' l' L'}(T) A(n', l', L'; n, l, L) \left[1 + \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} \right)^{-1} \bar{J}_{n' l' L'} \right] \quad (5.84)$$

где \bar{J} — средняя интенсивность на частоте стабилизирующего перехода. Дважды возбужденное состояние часто бывает настолько размытым (из-за очень короткого времени жизни за счет автоионизации), что интенсивность излучения, используемую для расчета \bar{J} , можно брать равной интенсивности континуума. Если $\chi_{n' l' L'}$ зависит от L' слабо, то можно ввести величину $A^*(n', l'; n, l) = g_l^{-1} \sum_{L', L} g(L') A(n', l', L'; n, l, L)$ и заменить $\Phi_{n' l' L'}$ на $\Phi_{n' l'}$, что дает

$$n_k R_{db} = n_k n_e \sum_{n', l'} \Phi_{n' l'}(T) A^*(n', l'; n, l) \left[1 + \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} \right)^{-1} \bar{J}_{n' l'} \right], \quad (5.85)$$

а число обратных переходов (вверх) $b \rightarrow d$ становится равным

$$n_b R_{bd} = n_b \sum B^*(n, l; n', l') \bar{J}_{n' l'}, \quad (5.86)$$

где $B^*(n, l; n', l') = A^*(n', l'; n, l) (g_l c^2 / 2h\nu^3 g_l)$.

ПОЛНЫЕ УРАВНЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Обсудив все представляющие интерес процессы, мы можем теперь собрать вместе все индивидуальные числа переходов, написав одно полное уравнение вида (5.52) для каждого связанного состояния i каждой стадии ионизации любой из химических составляющих вещества. При этом а) не будем явно упоминать диэлектронную рекомбинацию, так как выражение для ее скорости имеет тот же вид, что и для радиативной рекомбинации, и будет считаться, что учитываются оба процесса, и б) будет приниматься, что все ионизации из возбужденных состояний иона j приводят к появлению иона $j + 1$ лишь в основном состоянии (обобщение не составляет труда, но усложняет и обозначения, и все обсуждение).

Тогда можно написать

$$\begin{aligned}
 - \sum_{i' < i} n_{i'}(R_{i'i} + C_{i'i}) + n_i \left[\sum_{i' < i} (n_{i'}/n_i)^*(R_{ii'} + C_{i'i}) + \right. \\
 \left. + \sum_{i' > i}^k (R_{ii'} + C_{ii'}) \right] - \sum_{i' > i} n_{i'}(n_i/n_{i'})^*(R_{i'i} + C_{ii'}) = 0, \quad (5.87)
 \end{aligned}$$

где числа радиативных переходов определяются выражениями (5.66) и (5.67), ударных — формулой (5.68), а отношения населенностей при ЛТР — формулой (5.5) для связанных состояний и (5.14) — для связанных и свободных состояний. По одному такому уравнению можно написать для каждого связанного уровня. Число переменных (из-за отсутствия среди них концентрации ионов n_k) на единицу больше числа уравнений. Если выписать уравнение ионизационного равновесия

$$\sum_{i < k} n_i(R_{ik} + C_{ik}) - n_k \sum_{i < k} (n_i/n_k)^*(R_{ki} + C_{ik}) = 0, \quad (5.88)$$

оказывается, что оно является следствием системы (5.87).

Упражнение 5.7. Показать, что уравнение (5.88) получается суммированием (5.87) по всем связанным состояниям.

Поэтому, чтобы замкнуть систему, привлечем дополнительное физическое условие. Когда рассматриваемое вещество представляет собой малую примесь (т.е. $\alpha_k/\alpha_H \ll 1$), система будет замкнута, если потребовать, чтобы полное число атомов и ионов (всех видов) этого элемента было равно заданной доле полного числа атомов водорода (нейтральных и ионизованных), т.е.

$$\sum_{i,j} n_{ij,k} - (\alpha_k/\alpha_H) \left(\sum_i n_{i,H} + n_p \right) = 0. \quad (5.89)$$

Другая возможность замкнуть систему — привлечь условие сохранения заряда (зарезервировав условие сохранения полного числа частиц для иной цели). Оно позволяет написать

$$\sum_k \sum_j j N_{jk} + n_p = n_e, \quad (5.90)$$

где $N_{jk} = \sum n_{ijk}$. Окончательная система, описывающая все уров-

ни всех ионов всех элементов, имеет следующий вид:

$$\mathcal{A} \mathbf{n} = \bar{\mathcal{B}}, \quad (5.91)$$

где через \mathbf{n} обозначен вектор, компонентами которого являются все населенности уровней (число которых есть, скажем, \mathcal{N}), \mathcal{A} — матрица порядка \mathcal{N} и $\bar{\mathcal{B}}$ — вектор, у которого отлична от нуля только одна компонента [порождаемая (5.89) или (5.90)].

Чтобы конкретизировать эти соображения, рассмотрим случай, еще достаточно простой, чтобы быть обозримым, и в то же время достаточно сложный, чтобы представлять общий интерес для приложений. Предположим, что имеется атмосфера, целиком состоящая из водорода и гелия (с распространенностью Y по числу атомов относительно водорода). Будем считать, что гелий представлен тремя степенями ионизационной «лесенки» He^0 , He^+ и He^{++} , и допустим, что эти ионы имеют L_0 , L_+ и 1 уровень соответственно. Обозначим далее $M_{\text{He}} = L_0 + L_+ + 1$, т.е. M_{He} — полное число состояний всех типов у гелия. Аналогично будем рассматривать L_{H} связанных состояний водорода, что дает всего $M_{\text{H}} = L_{\text{H}} + 1$ состояний (с учетом протонов). Тогда если обозначить через X ненулевые элементы, то матрица переходов \mathcal{A} имеет вид

1	$x \ x \ \dots \ x$	x	0	0
2	$x \ x$			
⋮	⋮	⊙	⊙	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
L_0	$x \ x \ \dots \ x$	x	0	0
$L_0 + 1$	⊙	$x \ x \ \dots \ x$	x	0
⋮	⊙	$x \ x$	⋮	⊙
⋮	⊙	⋮	⊙	⋮
$L_0 + L_+$	⊙	$x \ x \ \dots \ x$	x	0
M_{He}	$1 \ 1 \ \dots \ 1$	$1 \ 1 \ \dots \ 1$	1	$-\gamma \ -\gamma \ \dots \ -\gamma \ -\gamma$
$M_{\text{He}} + 1$	⊙	⊙	0	$x \ x \ \dots \ x \ x$
⋮	⊙	⊙	⋮	$x \ x \ \dots \ x \ x$
⋮	⊙	⊙	⋮	$x \ x \ \dots \ x \ x$
$M_{\text{He}} + L_{\text{H}}$	⊙	⊙	0	$x \ x \ \dots \ x \ x$
$M_{\text{He}} + M_{\text{H}}$	$0 \ \dots \ 0$	$1 \ 1 \ \dots \ 1$	2	$0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1$
	1	L_0	M_{He}	$M_{\text{He}} + M_{\text{H}}$

Первые L_0 строк соответствуют уравнению (5.87) для He^0 , следующие L_+ строк дают уравнение (5.87) для He^+ , M_{He} -я строка -- это равенство (5.89), описывающее химический состав, последующие L_{H} строк дают уравнение (5.87) для H , и последняя строка выражает условие сохранения заряда. Вектор \mathbf{n} имеет компоненты

$$\mathbf{n} = [n_1(\text{He}^0), \dots, n_{L_0}(\text{He}^0), n_1(\text{He}^+), \dots, n_{L_+}(\text{He}^+), n(\text{He}^{++}), n_1(\text{H}), \dots, n_{L_{\text{H}}}(\text{H}), n_p]^T, \quad (5.92)$$

а

$$\vec{\mathcal{B}} = (0, \dots, 0, n_e)^T. \quad (5.93)$$

При заданных значениях n_e , T и заданном поле излучения уравнение (5.91) есть *линейная система* для \mathbf{n} , которую можно решить стандартными численными методами [526], гл. 9.

5.5. Уравнение состояния при отсутствии ЛТР

Из результатов, приведенных в предыдущих параграфах, видно, что при ЛТР населенность любого состояния в данной конкретной точке атмосферы является функцией лишь двух термодинамических переменных, т.е. $n_i = n_i(N, T)$, где T — *абсолютная* температура в этой точке. В противоположность этому в случае, когда ЛТР, вообще говоря, отсутствует, полная система уравнений стационарности показывает, что $n_i = n_i(N, T, J_\nu)$, где через J_ν обозначена средняя интенсивность излучения с частотой ν (ее нужно знать для всех частот в спектре), а T есть теперь *кинетическая* температура, описывающая только функцию распределения частиц по скоростям. Теперь у нас появилось столько новых (фундаментальных!) термодинамических переменных, сколько требуется, чтобы описать распределение излучения по частотам. [Заметим, что *если бы* описание этого распределения можно было упростить, например *если бы* можно было написать $J_\nu = WB_\nu(T)$, то положение упростилось бы колоссально. Однако в общем случае может потребоваться рассматривать сотни новых переменных.] Подобно тому как это имело место для уравнения состояния при ЛТР, уравнения статистического равновесия, написанные без предположения об ЛТР, также зависят от электронной концентрации n_e нелинейно. Поэтому, чтобы найти из них населенности уровней, потребуется процедура линеаризации. Однако теперь линеаризацию придется обобщить таким образом, чтобы при этом учитывались также и изменения в поле излучения. В § 7.5 мы убедимся, что такой подход дает нам