

Первые L_0 строк соответствуют уравнению (5.87) для He^0 , следующие L_+ строк дают уравнение (5.87) для He^+ , M_{He} -я строка -- это равенство (5.89), описывающее химический состав, последующие L_{H} строк дают уравнение (5.87) для H , и последняя строка выражает условие сохранения заряда. Вектор \mathbf{n} имеет компоненты

$$\mathbf{n} = [n_1(\text{He}^0), \dots, n_{L_0}(\text{He}^0), n_1(\text{He}^+), \dots, n_{L_+}(\text{He}^+), n(\text{He}^{++}), n_1(\text{H}), \dots, n_{L_{\text{H}}}(\text{H}), n_p]^T, \quad (5.92)$$

а

$$\vec{\mathcal{B}} = (0, \dots, 0, n_e)^T. \quad (5.93)$$

При заданных значениях n_e , T и заданном поле излучения уравнение (5.91) есть *линейная система* для \mathbf{n} , которую можно решить стандартными численными методами [526], гл. 9.

5.5. Уравнение состояния при отсутствии ЛТР

Из результатов, приведенных в предыдущих параграфах, видно, что при ЛТР населенность любого состояния в данной конкретной точке атмосферы является функцией лишь двух термодинамических переменных, т.е. $n_i = n_i(N, T)$, где T — *абсолютная* температура в этой точке. В противоположность этому в случае, когда ЛТР, вообще говоря, отсутствует, полная система уравнений стационарности показывает, что $n_i = n_i(N, T, J_\nu)$, где через J_ν обозначена средняя интенсивность излучения с частотой ν (ее нужно знать для всех частот в спектре), а T есть теперь *кинетическая* температура, описывающая только функцию распределения частиц по скоростям. Теперь у нас появилось столько новых (фундаментальных!) термодинамических переменных, сколько требуется, чтобы описать распределение излучения по частотам. [Заметим, что *если бы* описание этого распределения можно было упростить, например *если бы* можно было написать $J_\nu = WB_\nu(T)$, то положение упростилось бы колоссально. Однако в общем случае может потребоваться рассматривать сотни новых переменных.] Подобно тому как это имело место для уравнения состояния при ЛТР, уравнения статистического равновесия, написанные без предположения об ЛТР, также зависят от электронной концентрации n_e нелинейно. Поэтому, чтобы найти из них населенности уровней, потребуется процедура линеаризации. Однако теперь линеаризацию придется обобщить таким образом, чтобы при этом учитывались также и изменения в поле излучения. В § 7.5 мы убедимся, что такой подход дает нам

метод, который позволяет рассматривать уравнения переноса излучения и статистического равновесия совместно и дает возможность определить одновременно, каковы глобальная реакция газа на изменения поля излучения и аналогичная реакция поля излучения на изменение свойств вещества.

Прежде чем излагать процедуру линеаризации для общего случая, целесообразно рассмотреть несколько примеров, которые ясно иллюстрируют ту физическую суть, которая описывается уравнениями статистического равновесия.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

Рассмотрим сначала атом, у которого всего один связанный уровень. Этот атом может ионизоваться, причем электрон переходит в континуум. Тогда имеется одно уравнение статистического равновесия, которое (в пренебрежении вынужденным излучением) гласит, что

$$n_1/n_1^* = \left[4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} (\alpha_\nu B_\nu/h\nu) d\nu + n_e q_{1k} \right] / \left[4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} (\alpha_\nu J_\nu/h\nu) d\nu + n_e q_{1k} \right]. \quad (5.94)$$

Отметим прежде всего, что когда электронная концентрация становится очень большой, так что скорость ударных переходов превосходит скорость радиативных переходов, то

$$\lim_{n_e \rightarrow \infty} (n_1/n_1^*) = \lim_{n_e \rightarrow \infty} (n_e q_{1k}/n_e q_{1k}) = 1,$$

т.е. имеется ЛТР. Далее, на очень больших оптических глубинах $J_\nu \rightarrow B_\nu$, и ясно, что $n_1/n_1^* \rightarrow 1$, т.е. если поле излучения строго планковское, то, как и следовало ожидать, имеется ЛТР. Однако здесь необходимо сделать два замечания. а) Чтобы получить ЛТР для *многоуровневого* атома, J_ν должно равняться B_ν на частотах всех переходов. Если среда прозрачна для какого-нибудь из переходов, то ЛТР *не будет* иметь места (если только плотности не настолько высоки, что преобладают столкновения), причем не только для тех уровней, между которыми происходит упомянутый переход, но и *для всех других* уровней. Дело в том, что поле излучения на частоте каждого перехода влияет на населенности всех уровней (см. ниже). б) У нас остался пока без ответа вопрос о том, насколько

ко на самом деле должна быть велика «очень большая» оптическая глубина [гарантирующая существование ЛТР. — *Ред.*]. Как указывалось выше, выполнения условия $\tau_\nu \geq 1$ еще не достаточно, чтобы гарантировать, что $J_\nu - B_\nu$. На самом деле оптическая глубина τ_ν должна превосходить длину термализации, точные оценки которой будут даны в гл. 7 и 11.

В предельном случае низких плотностей (например, для туманностей) уравнение (5.94) переходит в следующее:

$$n_1/n_1^* = \int_{\nu_0}^{\infty} (\alpha_\nu B_\nu/h\nu) d\nu / \int_{\nu_0}^{\infty} (\alpha_\nu J_\nu/h\nu) d\nu. \quad (5.95)$$

Согласно этой формуле, если скорость рекомбинации превосходит скорость фотоионизации, то уровень перенаселен, если же имеет место обратное соотношение, то он недонаселен. Формула (5.95), разумеется, эквивалентна формуле (5.46), часто используемой в исследованиях туманностей. В корональном случае мы имеем $T_e (\sim 10^6 \text{ K}) \gg T_R (\sim 6000 \text{ K})$, откуда следует, что ударные ионизации преобладают над радиативными (см. формулу (5.44) и относящееся к ней обсуждение), а радиативная и диэлектронная рекомбинации (скорость и той и другой определяется значением T_e) превосходят ударную рекомбинацию. Поэтому

$$n_1 n_e q_{1k} = n_k n_e (\alpha_{RR} + \alpha_{DR}),$$

так что

$$n_k/n_1 = q_{1k}/(\alpha_{RR} + \alpha_{DR}) = f(T). \quad (5.96)$$

Таким образом, степень ионизации в короне зависит только от температуры и не зависит от электронной концентрации, что очень сильно упрощает исследование короны. Корональный и небулярный случаи представляют крайние отклонения от ЛТР.

Рассмотрим теперь несколько многоуровневых задач. Допустим, что есть объем, заполненный газом из чистого водорода, который освещается очень сильно дилутированным излучением (т.е. туманность). Следует ожидать, что практически весь водород будет находиться в основном состоянии. Предположим, что во всех резонансных линиях газ полностью непрозрачен (и потому имеется детальный баланс). Далее примем, что вслед за фотоионизацией атома из основного состояния происходят рекомбинации на все уровни, но населенности возбужденных уровней настолько малы, а поле падающего на газ излучения обладает столь большой дилуцией, что а) фотоионизацией из этих состояний можно пренебречь, и б)

электроны, находящиеся на любом из возбужденных уровней, совершают каскадные переходы вниз, темп которых определяется эйнштейновскими коэффициентами A_{ji} , причем реабсорбции, приводящей к возбуждению, нет (т.е. среда прозрачна в субординатных линиях). Допустим далее, что плотности столь малы, что столкновениями можно пренебречь. Тогда уравнение ионизационного равновесия есть

$$n_1 R_{1k} = n_e^2 \sum_{i=1}^I \alpha_{RR}(i, T), \quad (5.97a)$$

а уравнение сохранения числа частиц имеет вид

$$\sum_{i=1}^I n_i + n_e = n_H, \quad (5.97b)$$

где n_H — (заданная) концентрация водорода, I — полное число имеющихся связанных состояний и $n_e = n_p$ (чистый водород). Считается, что R_{1k} выражено через $J_\nu = WB_\nu(T_R)$, как в формуле (5.40). Для каждого из связанных состояний его населенность можно выразить через коэффициенты ветвления $a_{ji} = A_{ji} / \sum_{l < j} A_{jl}$ и каскадные веро-

ятности p_{ji} , определяемые рекуррентно: $p_{i+1, i} = a_{i+1, i}$, и

$p_{ji} = a_{ji} + \sum_{k=i+1}^{j-1} p_{jk} a_{ki}$ при $j = i+2, \dots, I$. Тогда для уровня i на

ходим, что

$$\begin{aligned} n_i \sum_{l < i} A_{il} &= n_e^2 \alpha_{RR}(i, T) + \sum_{j=i+1}^I A_{ji} n_j = \\ &= n_e^2 [\alpha_{RR}(i, T) + \sum_{j=i+1}^I p_{ji} \alpha_{RR}(j, T)]. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Упражнение 5.8. а) Убедиться в справедливости приведенных выше выражений для p_{ji} и вывести уравнение (5.98). (Указание: начать с уровня I и последовательно спускаться вниз.) б) Показать, что уравнения (5.97) и (5.98) приводят к квадратному уравнению для n_e , которое позволяет определить $n_e(n_H, T)$, а значит, и все n_i . в) Показать, что $p_{j1} = 1$ ($j > 1$). Дать физическую интерпретацию этого результата.

С помощью формулы (5.98) можно рассчитать отношения населенностей уровней, а значит, и относительные интенсивности линий в пределах серии. Например, можно вычислить относительные

интенсивности бальмеровских линий (*бальмеровский декремент*)

$$I(H_k)/I(H_j) = (n_k A_{k2} h\nu_{k2}) / (n_j A_{j2} h\nu_{j2})$$

и сравнить затем теоретические результаты с наблюдениями. Метод, который описывается уравнениями (5.97) и (5.98) (в значительно детализированном и рафинированном виде!), служит основой при исследованиях туманностей (см. [15]), гл. 23 — 25; [10], гл. 4; [415], стр. 40 — 110 и [350], гл. 1 — 3).

Наконец, рассмотрим атом, имеющий три уровня — 1, 2, 3 (в порядке возрастания энергии), находящийся в разреженной среде (поэтому пренебрегаем столкновениями) и в ослабленном поле излучения. Замечательный результат, касающийся такой системы, составляет *теорема Росселанда о циклических переходах*, которая утверждает, что число радиативных переходов в направлении $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ превышает число переходов в обратном направлении $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Следствием этого является систематическое *дробление* фотонов большой энергии (скажем, фотонов далекого ультрафиолета) на фотоны более низких энергий (видимой и инфракрасной области). Так, в туманности фотоны лаймановского континуума подвергаются дроблению, превращаясь, например, в фотоны бальмеровского континуума плюс L_α -фотоны (состояние 1 — $1s$, состояние 2 — $2p$, состояние 3 — континуум). Нетрудно рассчитать отношение $R_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1} / R_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1}$. Число возбуждений $1 \rightarrow 3$ равно $n_1 B_{13} WB(\nu_{13})$. Из всех возбужденных атомов, находящихся в состоянии 3, совершает переход вниз на уровень 2 доля $A_{32} / (A_{32} + A_{31})$, а из атомов, попавших на уровень 2, совершает переход вниз на уровень 1 доля $A_{21} / [A_{21} + B_{23} WB(\nu_{23})]$ (при этом вынужденным излучением мы пренебрегаем). Поэтому

$$n_1 R_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1} = \frac{n_1 B_{13} WB(\nu_{13}) A_{32} A_{21}}{(A_{32} + A_{31}) [A_{21} + B_{23} WB(\nu_{23})]} \quad (5.99)$$

Из аналогичных соображений имеем

$$n_1 R_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1} = \frac{n_1 B_{12} WB(\nu_{12}) B_{23} WB(\nu_{23}) A_{31}}{(A_{21} + B_{23} WB(\nu_{23})) (A_{32} + A_{31})} \quad (5.100)$$

Так что

$$R_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1} / R_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1} = W [B_{12} B(\nu_{12}) / A_{21}] \times \\ \times [B_{23} B(\nu_{23}) / A_{32}] [A_{31} / (B_{13} B(\nu_{13}))]. \quad (5.101)$$

Если воспользоваться соотношениями между эйнштейновскими коэффициентами и взять B_ν в приближении Вина ($h\nu/kT \gg 1$), то $B_{ij}B(\nu_{ij})/A_{ji} = (n_j/n_i)^*$, и тогда формула (5.101) дает $R_{1 \rightarrow 2} R_{2 \rightarrow 3} R_{3 \rightarrow 1} / R_{1 \leftarrow 3} R_{3 \leftarrow 2} R_{2 \leftarrow 1} = W < 1$, что и доказывает теорему. Понятно, что этот результат есть следствие того, что для цикла $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ коэффициент дилуции входит только *один* раз, а для обратного процесса — *дважды*. Теорема Росселанда имеет отношение и к звездным атмосферам, так как на некоторых глубинах возможна такая ситуация, когда в резонансных линиях, возбуждающих атомы на верхние уровни, среда непрозрачна (так что $W = 1$), а в субординатных линиях, возникающих при переходах с этих уровней вниз, прозрачна. В этих случаях следует ожидать систематического *дробления* фотонов.

ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Как уже упоминалось, если n_e , T и J_ν заданы, общую систему $\mathcal{A}\mathbf{n} = \mathcal{B}$ можно решать как линейную систему относительно \mathbf{n} . Но на самом деле в ходе расчета модели атмосферы точные значения этих переменных *неизвестны* (вспомните обсуждение уравнения состояния при ЛТР), имеются лишь их *текущие оценки* в общем *итерационном* процессе. Предположим, что эти переменные изменены на величины δn_e , δT , δJ_ν и т.д., чтобы лучше удовлетворить условиям энергетического и механического равновесия. Реакцию \mathbf{n} на эти изменения следует искать в виде

$$\delta \mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial n_e} \delta n_e + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial T} \delta T + \sum_{k=1}^K \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial J_k} \delta J_k. \quad (5.102)$$

Здесь J_k , $k = 1, 2, \dots, K$ — средняя интенсивность на тех дискретных частотах, которые выбраны для описания спектра. Эти частоты берутся так, чтобы все интегралы по частотам можно было заменить квадратурными суммами, т.е.

$$\int F(\nu) d\nu = \sum_{k=1}^K w_k F(\nu_k). \quad (5.103)$$

Уравнение для $\delta \mathbf{n}$ получается путем линеаризации исходных уравнений (5.91) [из уравнений переноса можно найти аналогичные линеаризованные уравнения, дающие фактически $\delta J_k(\delta T, \delta n_e, \delta \mathbf{n})$; см. § 7.5]. Уравнения вида (5.102) нужны в двух случаях: а) расчеты моделей атмосфер, где в итерационном цикле могут изменяться все

переменные, и б) расчеты стационарных населенностей в многоуровневом случае при заданной модели атмосферы (когда n_e , T и полная концентрация частиц фиксированы). Обсуждение процедуры, относящейся к случаю б), мы отложим до гл. 12, а сейчас рассмотрим только случай а). В случае б) можно использовать специальный метод, который подсказывается рассмотрением численных методов решения уравнений переноса, которые будут излагаться в гл. 6.

Если x означает произвольную переменную, то, линеаризуя уравнение (5.91), находим

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x} = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{\partial \bar{\mathcal{B}}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial x} \mathbf{n} \right], \quad (5.104)$$

где принимается, что \mathbf{n} есть решение системы $\mathcal{A}\mathbf{n} = \bar{\mathcal{B}}$ на данном шаге (для обозначения можно было бы использовать индекс «нуль» или что-нибудь в этом роде, но все стало бы выглядеть слишком громоздко). Крайне важной особенностью этого подхода является то, что все частные производные в уравнениях (5.104) и (5.102) можно выписать в явном *аналитическом* виде (однако обратную матрицу \mathcal{A}^{-1} приходится рассчитывать численно). В результате получается система, обладающая высокой точностью и надежностью. Чтобы проиллюстрировать, как это делается, выпишем выражения для некоторых типичных производных для моделей атомов, обсуждавшихся в конце § 5.4. Более полные сводки формул такого рода даются в [42] и [437]. В дальнейшем будет использоваться вспомогательный вектор $\mathbf{a} \equiv \partial \mathcal{A} / \partial x \cdot \mathbf{n}$. Предположим, что выбрана некоторая частота ν_k и мы хотим найти $\partial \mathbf{n} / \partial J_k$. Если не считать тех «специальных» строк \mathcal{A} , которые описывают химический состав и выражают сохранение заряда, будем в общем случае иметь

$$\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial J_k} \right)_{ij} = -4\pi w_k \alpha_{ji}(\nu_k) / h\nu_k, \quad j < i, \quad (5.105a)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial J_k} \right)_{ii} &= (4\pi w_k / h\nu_k) \left[\sum_{j > i} \alpha_{ij}(\nu_k) + \sum_{i < j} \alpha_{ji}(\nu_k) \times \right. \\ &\quad \left. \times (n_j/n_i)^* \exp(-h\nu_k/kT) \right], \quad (5.105b) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial J_k} \right)_{ij} = -(4\pi w_k \alpha_{ij}(\nu_k) / h\nu_k) (n_i/n_j)^* \exp(-h\nu_k/kT), \quad j > i, \quad (5.105b)$$

откуда находим

$$\begin{aligned}
 a_i &= [(\partial \mathcal{L} / \partial J_k) \cdot \mathbf{n}]_i = \\
 &= (4\pi w_k / h\nu_k) \left\{ \sum_{j>i} \alpha_{ij}(\nu_k) [n_i - n_j (n_i/n_j)^* \times \right. \\
 &\times e^{-h\nu_k/kT}] - \sum_{j<i} \alpha_{ji}(\nu_k) [n_j - n_i (n_j/n_i)^* e^{-h\nu_k/kT}] \left. \right\}. \quad (5.106)
 \end{aligned}$$

Теперь для искомой производной можем написать

$$\left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial J_k} \right)_l = - \sum_m \mathcal{L}_{lm}^{-1} a_m. \quad (5.107)$$

Особенно поучительно рассмотреть случай, когда поглощение на частоте ν_k может вызывать *всего один* переход ($i \rightarrow j$), а все остальные $\alpha_{ij}(\nu_k)$ равны нулю.

Упражнение 5.9. Показать, что в только что описанном случае справедливо следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial J_k} \right)_l &= (\mathcal{L}_{li}^{-1} - \mathcal{L}_{ji}^{-1}) (4\pi w_k \alpha_{ij}(\nu_k) / h\nu_k) \times \\
 &\times [n_i - n_j (n_i/n_j)^* e^{-h\nu_k/kT}]. \quad (5.108)
 \end{aligned}$$

Этот простой результат ясно показывает, что, поскольку \mathcal{L}^{-1} , вообще говоря, должна быть матрицей с не равными нулю элементами, изменение поля излучения на любой частоте ν_k вызывает изменение населенности любого l -го уровня, *даже если при переходах на этот уровень или с него фотоны соответствующей частоты не могут поглощаться и излучаться*. Разумеется, элементы \mathcal{L}_{li}^{-1} и \mathcal{L}_{ji}^{-1} могут быть малы, и тогда реакция будет слабой, но принципиальный физический вывод остается все же в силе. Аналогичные выражения для $\partial/\partial n_e$ и $\partial/\partial T$ даются в упомянутых выше работах.