Глава 6

Решение уравнения переноса

Анализ реальных звездных спектров требует умения рассчитывать поток излучения, выходящий из атмосферы, путем решения уравнения переноса. Поэтому в этой главе мы обратимся к численным методам решения задач переноса, основанным на использовании уравнения переноса в *дифференциальной форме*. Будет показано, что если решение уравнения переноса представить как *двухточечную краевую задачу* и перейти в ней к *разностным уравнениям*, то можно получить два чрезвычайно общих, гибких и мощных метода его решения. Имеется много методов решения уравнения переноса в *интегральной форме*, однако в этой книге мы их подробно обсуждать не будем, поскольку они достаточно ясно изложены в других работах (например, в [18], гл. 8), а также потому, что их труднее приспособить к исследованию движущихся атмосфер (гл. 14). В настоящей главе мы ограничимся рассмотрением *неподвижных одномерных плоскопараллельных атмосфер*. Более общие задачи будут рассмотрены в гл. 7 и 14. Имеются веские соображения физического и математического характера в пользу применения именно тех методов, которые описываются в §6.3 (или их аналогов для решения уравнения переноса в интегральной форме). Эти методы специально разработаны таким образом, что позволяют преодолеть определенные трудности, характерные для задач о переносе излучения в тех оптически толстых средах, где роль рассеяния велика. Чтобы разобраться в истинной природе этих трудностей, в §6.1 и 6.2 мы рассмотрим другие возможные в принципе (но практически бесполезные) методы решения задачи.

6.1. Метод итераций: проблема учета рассеяния

Одной из фундаментальных *физических* трудностей, присущих задачам переноса и проявляющихся при их решении, является наличие рассеяния, которое ведет к тому, что поле излучения перестает быть непосредственно связанным с мощностью локальных источников и стоков и процесс переноса фотонов становится глобальным, так что на поле излучения сказываются условия в атмосфере в пределах достаточно большой области. Именно из-за рассеяний наличие свободной границы ощущается даже на больших глубинах в атмосфере ($\tau_\nu \gg 1$) и вызывает значительные отклонения средней интенсивности J_ν от локальных значений функции B_ν, описывающей тепловой источник. Чтобы упростить обсуждение, рассмотрим случай простейшей функции источников, которая содержит компоненту, описывающую тепловое излучение, и член, учитывающий монохроматическое изотропное рассеяние, т.е.

$$S_\nu = (k_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu)/(k_\nu + \sigma_\nu) = (1 - \rho_\nu)B_\nu + \rho_\nu J_\nu, \tag{2.39}$$

где $\rho_\nu \equiv \sigma_\nu/(k + \sigma_\nu)$. Формальное решение стандартного уравнения переноса

$$\mu \partial I_\nu/\partial\tau_\nu = I_\nu - S_\nu \tag{2.36}$$

можно выразить через J_ν в виде (ср. упражнение 2.10)

$$J_\nu(\tau_\nu) = \Lambda_{\tau_\nu}[S_\nu] = \Lambda_{\tau_\nu}[B_\nu] + \Lambda_{\tau_\nu}[\rho_\nu(J_\nu - B_\nu)].$$

Если бы рассеяния не было ($\rho_\nu = 0$), то J_ν можно было бы найти по значениям B_ν, просто вычислив интеграл. Если же $\rho_\nu \neq 0$, нужно решать *интегральное уравнение относительно* J_ν. Один из простейших методов отыскания решения этого уравнения, который сразу же приходит в голову, — это *метод итераций*. Поскольку известно, что $J_\nu \to B_\nu$ при $\tau_\nu \to \infty$, применим этот метод к разности $J_\nu - B_\nu$. Если бы ρ_ν было везде равно нулю, то разность $J_\nu - B_\nu$ равнялось бы $\bar{B}_\nu - B_\nu$, где $\bar{B}_\nu(\tau_\nu) = \Lambda_{\tau_\nu}[B_\nu]$. Если же ρ_ν не равно нулю, то значение $\bar{B}_\nu - B_\nu$ можно рассматривать как начальное приближение к $J_\nu - B_\nu$ и написать

$$\begin{aligned}(J_\nu - B_\nu)^{(1)} &= (\bar{B}_\nu - B_\nu) + \Lambda_{\tau_\nu}[\rho_\nu(J_\nu - B_\nu)^{(0)}] = \\ &= (\bar{B}_\nu - B_\nu) + \Lambda_{\tau_\nu}[\rho_\nu(\bar{B}_\nu - B_\nu)] = \\ &= (\bar{B}_\nu - B_\nu) + \Delta^{(1)}.\end{aligned} \tag{6.1}$$

Находя последовательные приближения более высоких порядков, получаем

$$(J_\nu - B_\nu)^{(n)} = (\bar{B}_\nu - B_\nu) + \sum_{i=1}^{n} \Delta^{(i)}, \tag{6.2}$$

где $\Delta^{(i)} \equiv \Lambda_{\tau_\nu}[\rho_\nu \Delta^{(i-1)}]$. На практике процесс итераций продолжают до тех пор, пока не окажется выполненным какой-либо критерий сходимости, например $\|\Delta^{(n)}/(J_\nu - B_\nu)^{(n)}\| \leqslant \varepsilon$, где $\varepsilon \ll 1$. Ясно, что если $\|\rho_\nu\| \ll 1$, то можно ожидать, что итерационная процедура

(6.2) будет сходиться, так как последовательные поправки Δ^{n} должны быть порядка $\|\rho_\nu\|^n$ относительно $(J_\nu - B_\nu)$. Если, однако, в пределах большой области оптических глубин в атмосфере $\|\rho_\nu\| \approx 1$, то итерационный метод оказывается неэффективным.

В звездных атмосферах имеет место как раз последняя ситуация. Вероятность гибели фотона при одном акте взаимодействия с веществом $\lambda_\nu \equiv 1 - \rho_\nu$ может быть очень малой в пределах значительной области атмосферы. Например, у очень горячих звезд главным источником непрозрачности в континууме в их внешних слоях является электронное рассеяние, и λ_ν может быть порядка 10^{-4} вплоть до очень больших глубин в атмосфере (пока в конце концов из-за роста плотности тепловое поглощение при свободно-свободных переходах не начнет преобладать над электронным рассеянием). У холодных звезд с низким содержанием металлов водород в верхних слоях атмосферы нейтрален, а свободных электронов мало, так что непрозрачность за счет рэлеевского рассеяния на H и H_2 превосходит непрозрачность, обусловленную H^-. Поэтому ρ_ν близко к единице вплоть до больших глубин (начиная с некоторого уровня, возбуждение и ионизация водорода возрастают довольно резко, и λ_ν круто возрастает, приближаясь к единице). Для линий соответствующий параметр термализации может быть чрезвычайно малым, $\lambda_\nu \approx 10^{-8}$ (см. гл. 11).

В подобных случаях при проведении итераций наблюдается характерное явление — *решение стабилизируется*. При этом последовательные приближения отличаются друг от друга лишь на некоторый близкий к единице множитель, а величины Δ изменяются монотонно и от итерации к итерации остаются почти постоянными. Хотя в таких случаях относительное изменение решения с каждой итерацией и невелико ($\varepsilon \ll 1$), нет никакой гарантии, что для достижения окончательного решения не потребуется, скажем, еще $1/\varepsilon$ итераций. До сих пор рассуждение проводилось применительно к интегральному уравнению, причем мы пользовались оператором Λ. Однако следует подчеркнуть, что точно такие же трудности встретились бы и при получении итеративного решения уравнения переноса в дифференциальной форме (в дальнейшем мы будем называть Λ-итерацией обе эти процедуры, даже если на самом деле оператор Λ и не используется). Медленная сходимость в методе Λ-итераций (при большой роли рассеяния. — *Ред.*) является фактом принципиальной важности. Следует до конца уяснить себе, в чем состоит физический смысл этого факта. С этой целью можно рассмотреть следующий простой пример.

Предположим, что зависимость функции Планка от глубины можно с достаточной точностью представить линейной функцией

$$B_\nu(\tau_\nu) = a_\nu + b_\nu\tau_\nu \tag{6.3}$$

и что ρ_ν не зависит от τ_ν. Уравнение (2.71), представляющее собой нулевой момент уравнения переноса, при учете (2.39) можно записать в виде

$$\partial H_\nu/\partial\tau_\nu = J_\nu - S_\nu = \lambda_\nu(J_\nu - B_\nu), \tag{6.4}$$

а уравнение, являющееся первым моментом уравнения переноса, есть

$$\partial K_\nu/\partial\tau_\nu = H_\nu. \tag{6.5}$$

Если воспользоваться приближением Эддингтона $K_\nu = J_\nu/3$ и подставить выражение для H_ν из (6.5) в уравнение (6.4), то получим

$$\frac{1}{3}\frac{\partial^2 J_\nu}{\partial\tau_\nu^2} = \lambda_\nu(J_\nu - B_\nu) = \frac{1}{3}\frac{\partial^2}{\partial\tau_\nu^2}(J_\nu - B_\nu). \tag{6.6}$$

Здесь второе равенство — следствие принятого нами для B_ν выражения (6.3). Решение уравнения (6.6) имеет вид

$$J_\nu - B_\nu = \alpha_\nu\exp[-(3\lambda_\nu)^{1/2}\tau_\nu] + \beta_\nu\exp[+(3\lambda_\nu)^{1/2}\tau_\nu]. \tag{6.7}$$

Поскольку мы хотим, чтобы $J_\nu \to B_\nu$ при $\tau_\nu \to \infty$, следует положить $\beta_\nu = 0$. Для нахождения α_ν используем граничное условие $J_\nu(0) = \sqrt{3}H_\nu(0) = (\partial J_\nu/\partial\tau_\nu)_0/\sqrt{3}$ (второе равенство следует из уравнения (6.5) в приближении Эддингтона). Поэтому из (6.7) получаем

$$J_\nu(0) = a_\nu + \alpha_\nu = (\partial J_\nu/\partial\tau_\nu)_0/\sqrt{3} = [b_\nu - \alpha_\nu(3\lambda_\nu)^{1/2}]/\sqrt{3}. \tag{6.8}$$

Итак, окончательно

$$J_\nu(\tau_\nu) = a_\nu + b_\nu\tau_\nu + (b_\nu - \sqrt{3}a_\nu) \times \\ \times \exp[-(3\lambda_\nu)^{1/2}\tau_\nu]/[\sqrt{3} + (3\lambda_\nu)^{1/2}]. \tag{6.9}$$

Формула (6.9) позволяет понять физическую суть проблемы. Во-первых, из нее видно, что на границе J_ν может значительно отличаться от B_ν. Рассмотрим для простоты изотермическую атмосферу, т.е. пусть $b_\nu = 0$ и $B_\nu = a_\nu$. Тогда при $\tau_\nu = 0$ будет

$$J_\nu(0) = \lambda_\nu^{1/2}a_\nu/(1 + \lambda_\nu^{1/2}) = \lambda_\nu^{1/2}B_\nu/(1 + \lambda_\nu^{1/2}).$$

Поэтому когда $\lambda_\nu \ll 1$, то на границе J_ν гораздо меньше B_ν. Во-вторых, видно, что такое отличие от B_ν простирается в атмосфере до больших глубин, так как медленное стремление члена, содержащего экспоненту, к нулю ведет к тому, что $J_\nu \to B_\nu$ только на глубинах $\tau_\nu \gtrsim (\lambda_\nu)^{-1/2}$. При учете того, сколь малы упоминавшиеся выше значения λ_ν, эти глубины оказываются действительно очень большими. Когда J_ν становится достаточно близко к B_ν, говорят, что наступила *термализация*. Поэтому величину $\lambda_\nu^{-1/2}$ мы будем называть *глубиной термализации* (в гл. 7, 11 и 12 это понятие будет обобщено).

Интуитивное представление о глубине термализации можно получить из следующих физических соображений. Ясно, что параметр $\lambda_\nu = k_\nu/(k_\nu + \sigma_\nu)$ — это вероятность того, что фотон погибнет (т.е. энергия его перейдет в тепловую энергию) при одном акте рассеяния. Чтобы энергия фотона заведомо превратилась в тепло, фотон должен испытать примерно $n = 1/\lambda_\nu$ рассеяний. Если движение фотона в атмосфере рассматривать как процесс случайных блужданий со средней длиной свободного пробега $\Delta\tau$ (последняя должна быть равна примерно единице), то полная оптическая толщина слоя, через который фотон может пройти не погибнув, равна $n^{1/2}\Delta\tau = \Delta\tau\lambda_\nu^{-1/2} \approx \lambda_\nu^{-1/2}$. Для фотонов, излученных на бóльших глубинах, вероятность того, что они выйдут из атмосферы, а не термализуются, мала (поэтому $J_\nu \to B_\nu$). Фотонам же, которые возникают на меньших глубинах, удается выйти, и в результате значение J_ν оказывается меньше равновесного (т.е. меньше B_ν).

Теперь можно понять, почему, когда в качестве начального приближения принимается $J_\nu = \bar{B}_\nu$, Λ-итерация оказываются неэффективными. Каждое последовательное приближение может передать информацию об отклонении J_ν от $\bar{B}_\nu$ лишь на расстояние до $\Delta\tau \approx 1$, т.е. на расстояние среднего свободного пробега [напомним, что $E_1(\Delta\tau)$ убывает при $\Delta\tau \gg 1$ как $\exp(-\Delta\tau)/\Delta\tau$]. Поэтому для того, чтобы влияние границы на решение начало чувствоваться на глубинах, сравнимых с глубиной термализации, следует произвести $\lambda_\nu^{-1/2}$ итераций (по порядку величины). Когда $\lambda_\nu \ll 1$, вычисления по такой схеме становятся невыполнимыми, и мы приходим к заключению, что в любом практически полезном методе наличие в выражении для функции источников членов, описывающих рассеяние, должно учитываться с самого начала, и в процессе решения эти члены следует учитывать каким-то прямым методом.

6.2. Методы, основанные на решении краевой задачи «в лоб»

Характерная математическая трудность, встречающаяся при решении уравнения переноса в дифференциальной форме, связана с