до больших глубин, так как медленное стремление члена, содержащего экспоненту, к нулю ведет к тому, что $J_\nu \to B_\nu$ только на глубинах $\tau_\nu \gtrsim (\lambda_\nu)^{-1/2}$. При учете того, сколь малы упоминавшиеся выше значения λ_ν, эти глубины оказываются действительно очень большими. Когда J_ν становится достаточно близко к B_ν, говорят, что наступила *термализация*. Поэтому величину $\lambda_\nu^{-1/2}$ мы будем называть *глубиной термализации* (в гл. 7, 11 и 12 это понятие будет обобщено).

Интуитивное представление о глубине термализации можно получить из следующих физических соображений. Ясно, что параметр $\lambda_\nu = k_\nu/(k_\nu + \sigma_\nu)$ — это вероятность того, что фотон погибнет (т.е. энергия его перейдет в тепловую энергию) при одном акте рассеяния. Чтобы энергия фотона заведомо превратилась в тепло, фотон должен испытать примерно $n = 1/\lambda_\nu$ рассеяний. Если движение фотона в атмосфере рассматривать как процесс случайных блужданий со средней длиной свободного пробега $\Delta\tau$ (последняя должна быть равна примерно единице), то полная оптическая толщина слоя, через который фотон может пройти не погибнув, равна $n^{1/2}\Delta\tau = \Delta\tau\lambda_\nu^{-1/2} \approx \lambda_\nu^{-1/2}$. Для фотонов, излученных на бóльших глубинах, вероятность того, что они выйдут из атмосферы, а не термализуются, мала (поэтому $J_\nu \to B_\nu$). Фотонам же, которые возникают на меньших глубинах, удается выйти, и в результате значение J_ν оказывается меньше равновесного (т.е. меньше B_ν).

Теперь можно понять, почему, когда в качестве начального приближения принимается $J_\nu = \bar{B}_\nu$, Λ-итерация оказываются неэффективными. Каждое последовательное приближение может передать информацию об отклонении J_ν от $\bar{B}_\nu$ лишь на расстояние до $\Delta\tau \approx 1$, т.е. на расстояние среднего свободного пробега [напомним, что $E_1(\Delta\tau)$ убывает при $\Delta\tau \gg 1$ как $\exp(-\Delta\tau)/\Delta\tau$]. Поэтому для того, чтобы влияние границы на решение начало чувствоваться на глубинах, сравнимых с глубиной термализации, следует произвести $\lambda_\nu^{-1/2}$ итераций (по порядку величины). Когда $\lambda_\nu \ll 1$, вычисления по такой схеме становятся невыполнимыми, и мы приходим к заключению, что в любом практически полезном методе наличие в выражении для функции источников членов, описывающих рассеяние, должно учитываться с самого начала, и в процессе решения эти члены следует учитывать каким-то прямым методом.

6.2. Методы, основанные на решении краевой задачи «в лоб»

Характерная математическая трудность, встречающаяся при решении уравнения переноса в дифференциальной форме, связана с природой граничных условий. Допустим, что применяется метод дискретных ординат. Тогда интеграл по углу, дающий J_ν, заменяется квадратурной суммой. Предположим, что мы пытаемся численно проинтегрировать получающуюся систему уравнений

$$\mu_i dI_i/d\tau = I_i - \frac{1}{2}\rho \sum_{j=-n}^{n} a_j I_j - (1-\rho)B, \quad i = \pm 1, \ldots, \pm n. \quad (6.10)$$

Чтобы это сделать, нужно задать начальные значения I_i для всех значений i. Они определяются граничными условиями. Как было указано в гл. 2, граничные условия распадаются на две группы: $I_i(0) = 0$, $i = -1, \ldots, -n$, для излучения, идущего вниз ($-1 \leqslant \mu \leqslant 0$), и $I_i(\tau_{\max}) = g(\mu_i)$ (например, $g(\mu) \equiv B_\nu$), $i = 1, \ldots, n$, для излучения, идущего вверх ($0 \leqslant \mu \leqslant 1$). Здесь через $\tau_{\max}$ обозначена наибольшая глубина, реально учитываемая в полубесконечной атмосфере. Проблема заключается в следующем. Пусть мы хотим начать интегрирование с $\tau = 0$ и продвигаться шаг за шагом в глубь атмосферы. Сделать это невозможно, так как мы не знаем значений $I_i(0)$. Аналогично для $\tau_{\max}$ у нас отсутствуют значения $I_{-i}(\tau_{\max})$.

Таким образом, мы здесь имеем дело с *краевой задачей* для системы порядка $2n$. Можно было бы, например, задать набор значений $I_{-i}(\tau_{\max})$ и использовать их при интегрировании из глубины к границе. Когда мы довели бы интегрирование до границы, то, вообще говоря, обнаружили бы, что $I_{-i}(0) \neq 0$. В принципе можно было бы после этого взять другой набор значений $I_{-i}(\tau_{\max})$ и путем последовательных проб найти такие значения, которые приводили бы к $I_{-i}(0) = 0$. На практике, однако, этот метод оказывается сильно неустойчивым и может приводить к цели, только когда $\tau_{\max}$ не очень велико. В этом можно убедиться следующим образом. Как известно из рассмотрения задачи о серой атмосфере, метод дискретных ординат приводит к экспоненциальным решениям вида $\exp(\pm k\tau)$, где k порядка $1/\mu$. В тех случаях, когда коэффициенты (например, ρ_ν) зависят от глубины, решение уже не является суммой чистых экспонент, то тем не менее имеет экспоненциальный характер, и его можно представить в виде $f(\tau)\exp(\pm k\tau)$, где f — медленно меняющаяся функция τ. В случае полубесконечной атмосферы растущие экспоненты должны быть отброшены. Для задачи о серой атмосфере это можно сделать явным образом, так как в этом случае решение имеется в явном аналитическом виде. Но в случае несерой атмосферы при переменных коэффициентах решение удается получить только численно. Если начальные значения не выбраны точно, то решение будет содержать как убывающие, так и растущие экспоненты. Поэтому, вообще говоря, будут присутствовать члены, пропорциональные $\exp(k\tau)$. Они называются паразитными членами. Скорость их роста по порядку величины в $\exp(2k\tau)$ выше, чем у истинного решения. Таким образом, если начальные значения имеют погрешность порядка ε, то отношение паразитных членов к истинному решению на противоположной границе будет порядка $\varepsilon\exp(2k\tau_{max}) \sim \varepsilon \cdot 10^{k\tau_{max}}$. Ясно, что если только выбор начальных значений не является очень хорошим ($\varepsilon \ll 1$), то паразитные члены «забьют» истинное решение, и оно будет утеряно. Следовательно, чтобы сохранить хоть какие-то следы истинного решения, следует вести вычисления с $n \approx k\tau_{max}$ значащими цифрами. Если в интегралах по углу используется квадратурная формула с несколькими узлами μ_i, то некоторые $\mu_i \ll 1$, и потому некоторые $k \gg 1$, так что даже при не слишком большом $\tau_{max} \approx 10$ при использовании обычных электронных вычислительных машин истинное решение будет утеряно. При $\tau \approx 1$ в континууме τ_{max} в линиях могут быть $\sim 10^3 — 10^4$, откуда следует безнадежность рассматриваемого подхода. Резюмируя, можно сказать, что математическая природа задачи требует использования такого метода, в котором с самого начала явным образом учитывается, что граничные условия являются двухточечными. Обратимся теперь к обсуждению именно таких методов.

Упражнение 6.1. а) Решить систему (6.10) при $\rho = 0$, $B = \text{const}$ для $I_\pm$ при $\mu_\pm = \pm 1/2$. Показать, что $d^2J/d\tau^2 = 4(J - B)$, и написать точные выражения для J, I_+ и I_-, определив произвольные постоянные общего решения из граничных условий. Рассмотреть случай $I_+(\tau_{max}) = I_-(\tau_{max}) = B$. Получить для него решение и показать, что если на нижней границе ошибка $\varepsilon = B\exp(-2\tau_{max})$, то к поверхности она возрастает до $\varepsilon = B$. б) Обобщить рассмотрение на более общий случай, $\rho = \text{const} \neq 0$.

6.3. Двухточечная краевая задача для уравнения переноса

В этом параграфе будут описаны два очень общих, гибких и мощных метода решения задач переноса. В основе этих методов лежит запись уравнения переноса в виде дифференциального уравнения второго порядка с наложенными на его решение краевыми граничными условиями. Большинство основных идей было введено