

удается получить только численно. Если начальные значения не выбраны точно, то решение будет содержать как убывающие, так и растущие экспоненты. Поэтому, вообще говоря, будут присутствовать члены, пропорциональные $\exp(k\tau)$. Они называются паразитными членами. Скорость их роста по порядку величины в $\exp(2k\tau)$ выше, чем у истинного решения. Таким образом, если начальные значения имеют погрешность порядка ε , то отношение паразитных членов к истинному решению на противоположной границе будет порядка $\varepsilon \exp(2k\tau_{\max}) \sim \varepsilon \cdot 10^{k\tau_{\max}}$. Ясно, что если только выбор начальных значений не является очень хорошим ($\varepsilon \ll 1$), то паразитные члены «забывают» истинное решение, и оно будет утеряно. Следовательно, чтобы сохранить хоть какие-то следы истинного решения, следует вести вычисления с $n \approx k\tau_{\max}$ значащими цифрами. Если в интегралах по углу используется квадратурная формула с несколькими узлами μ_i , то некоторые $\mu_i \ll 1$, и потому некоторые $k \gg 1$, так что даже при не слишком большом $\tau_{\max} \approx 10$ при использовании обычных электронных вычислительных машин истинное решение будет утеряно. При $\tau \approx 1$ в континууме τ_{\max} в линиях могут быть $\sim 10^3 - 10^4$, откуда следует безнадёжность рассматриваемого подхода. Резюмируя, можно сказать, что математическая природа задачи требует использования такого метода, в котором с самого начала явным образом учитывается, что граничные условия являются двухточечными. Обратимся теперь к обсуждению именно таких методов.

Упражнение 6.1. а) Решить систему (6.10) при $\rho = 0$, $B = \text{const}$ для I_{\pm} при $\mu_{\pm} = \pm 1/2$. Показать, что $d^2J/d\tau^2 = 4(J - B)$, и написать точные выражения для J , I_+ и I_- , определив произвольные постоянные общего решения из граничных условий. Рассмотреть случай $I_+(\tau_{\max}) = I_-(\tau_{\max}) = B$. Получить для него решение и показать, что если на нижней границе ошибка $\varepsilon = B \exp(-2\tau_{\max})$, то к поверхности она возрастает до $\varepsilon = B$. б) Обобщить рассмотрение на более общий случай, $\rho = \text{const} \neq 0$.

6.3. Двухточечная краевая задача для уравнения переноса

В этом параграфе будут описаны два очень общих, гибких и мощных метода решения задач переноса. В основе этих методов лежит запись уравнения переноса в виде дифференциального уравнения второго порядка с наложенными на его решение краевыми граничными условиями. Большинство основных идей было введено

в важной работе Фотрие [209]*. Рассматриваемые методы оказались устойчивыми и удобными на практике. Каждый из них обладает преимуществами перед другим в дополнительном (по отношению к этому другому) диапазоне значений тех параметров, которые определяют объем вычислений, необходимых для решения той или иной задачи.

ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ВИДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В случае плоскопараллельной геометрии можно написать два уравнения, которыми определяется перенос излучения, идущего вверх и вниз в направлениях $\pm \mu$:

$$\pm \mu \partial I(z, \pm \mu, \nu) / \partial z = \chi(z, \nu) [S(z, \nu) - I(z, \pm \mu, \nu)], \quad (6.11)$$

где считается, что значения μ заключены в половинном интервале: $0 \leq \mu \leq 1$. Введем теперь симметричную и антисимметричную комбинации:

$$u(z, \mu, \nu) \equiv [I(z, \mu, \nu) + I(z, -\mu, \nu)]/2, \quad (6.12)$$

$$v(z, \mu, \nu) \equiv [I(z, \mu, \nu) - I(z, -\mu, \nu)]/2, \quad (6.13)$$

которые сходны по характеру со средней интенсивностью и с потоком соответственно. Для функций u и v можно получить два уравнения первого порядка. Сложив два уравнения (6.11), найдем

$$\mu \partial v(z, \mu, \nu) / \partial z = \chi(z, \nu) [S(z, \nu) - u(z, \mu, \nu)]; \quad (6.14)$$

вычтя же их, найдем

$$\mu \partial u(z, \mu, \nu) / \partial z = -\chi(z, \nu) v(z, \mu, \nu). \quad (6.15)$$

Подставив далее уравнение (6.15) в (6.14), можно исключить v и получить одно уравнение второго порядка для u

$$\frac{\mu^2}{\chi(z, \nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\chi(z, \nu)} \frac{\partial u(z, \mu, \nu)}{\partial z} \right] = u(z, \mu, \nu) - S(z, \nu) \quad (6.16)$$

или, вводя обозначение $d\tau_{\mu} \equiv d\tau(z, \nu) = -\chi(z, \nu) dz$ и используя со-

* К моменту появления работы Фотрие подобные идеи были уже известны и широко применялись (в частности в теории переноса нейтронов). — Прим. ред.

крашенную запись,

$$\mu^2 \partial^2 u_{\mu\nu} / \partial \tau^2 = u_{\mu\nu} - S_{\nu}. \quad (6.17)$$

При написании уравнения (6.15) предполагалось, что функция S_{ν} симметрична относительно μ . Это справедливо для большинства функций источников, которые будут нами рассматриваться. например, для функций вида

$$S_{\nu} = \alpha \int \phi_{\nu'} J_{\nu'} d\nu' + \beta_{\nu}, \quad (6.18)$$

или

$$S_{\nu} = \alpha_{\nu} \int R(\nu', \nu) J_{\nu'} d\nu' + \beta_{\nu}. \quad (6.19)$$

Это предположение, однако, может быть неверным, если перераспределение по частоте зависит от угла рассеяния (в этом случае требуется другая методика, см. [460]) или если в атмосфере происходят макроскопические движения (см. §14.1). В формулах (6.18) и (6.19) величина α представляет собой фактически коэффициент рассеяния, деленный на полный коэффициент поглощения, β — мощность тепловых источников. Необходимо подчеркнуть, что указанные выше выражения для S_{ν} являются чисто иллюстративными. В дальнейшем (см. §7.2 и 7.5) будут получены выражения, имеющие члены сходного вида, которые, однако, содержат интенсивность на всех частотах спектра (вследствие того, что должно выполняться условие лучистого равновесия) или во всех линиях многоуровневого атома. Тем не менее и в этих случаях развиваемые ниже методы оказываются применимыми.

Заметим, что в противоположность уравнениям для моментов, система которых *незамкнута*, уравнение (6.17) (впервые выведенное Фотрие [209]) представляет *замкнутую* систему точных уравнений, записанную для симметризованного среднего $u_{\mu\nu}$, зависящего от угловой переменной. Ниже мы убедимся, что иногда выгоднее избрать промежуточный путь, осуществляя замыкание уравнений для моментов приближенно, с помощью переменных эддингтоновских множителей.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Уравнение (6.17) должно решаться при граничных условиях, заданных при $\tau = 0$ и $\tau = \tau_{\max}$ (где τ_{\max} обозначает толщину (или полутолщину) конечного слоя или же — в случае полубесконечной атмосферы — некоторую достаточно большую глубину, где уже применимо диффузионное приближение). При $\tau = 0$ величина

$I(0, -\mu, \nu) = 0$, откуда следует, что $v_{\mu\nu}(0) = u_{\mu\nu}(0)$, так что

$$\mu \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial \tau_\nu} \Big|_0 = u_{\mu\nu}(0). \quad (6.20)$$

При $\tau = \tau_{\max}$ задано $I(\tau_{\max}, +\mu, \nu) = I_+(\mu, \nu)$. Но

$$v_{\mu\nu}(\tau_{\max}) = I_+(\mu, \nu) - u_{\mu\nu}(\tau_{\max}),$$

так что

$$\mu \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial \tau_\nu} \Big|_{\tau_{\max}} = I_+(\mu, \nu) - u_{\mu\nu}(\tau_{\max}). \quad (6.21)$$

Если при $\tau = \tau_{\max}$ справедливо диффузионное приближение, то

$$I(\tau_{\max}, \mu, \nu) = B_\nu(\tau_{\max}) + \mu \frac{1}{\chi_\nu} \left| \frac{\partial B_\nu}{\partial z} \right|_{\tau_{\max}}, \quad (6.22)$$

так что

$$\begin{aligned} u_{\mu\nu}(\tau_{\max}) &= B_\nu(\tau_{\max}), \\ v_{\mu\nu}(\tau_{\max}) &= \mu \left(\left| \frac{\partial B_\nu}{\partial z} \right| / \chi_\nu \right)_{\tau_{\max}} \end{aligned}$$

и

$$\mu \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial \tau_\nu} \Big|_{\tau_{\max}} = \mu \frac{1}{\chi_\nu} \left| \frac{\partial B_\nu}{\partial z} \right|_{\tau_{\max}}. \quad (6.23)$$

Упражнение 6.2. а) Обобщить уравнение (6.20) на случай, когда $I(0, -\mu, \nu) \neq 0$. б) Показать, что для случая *симметричного слоя* (бесконечного по x и y) конечной (по z) оптической толщины τ_{\max} второе граничное условие можно задать при $\tau = \tau_{\max}/2$ в виде $\partial u_{\mu\nu} / \partial \tau_\nu = 0$. Из этого следует, что здесь достаточно рассматривать лишь половину слоя $0 \leq \tau \leq \tau_{\max}/2$.

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Преобразуем теперь дифференциальное уравнение (6.17) в систему *разностных уравнений*, выполнив дискретизацию по всем переменным. Выберем набор точек деления по оптической глубине $\{\tau_d\}$, $d = 1, 2, \dots, D$, причем $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_D$, набор точек по угловой переменной $\{\mu_m\}$, $m = 1, 2, \dots, M$, и набор точек по частоте $\{\nu_n\}$, $n = 1, 2, \dots, N$. Для любой величины g будем писать $g(\tau_d, \mu_m, \nu_n) = g_{dmn}$. Заменим интегралы квадратурными суммами, так что, например, выражение (6.18) примет вид

$$S_{dn} = \alpha_{dn} \sum_{n=1}^N a_n \cdot \phi_{dn} \sum_{m=1}^M b_m u_{dmn} + \beta_{dn}. \quad (6.24a)$$

Далее, сгруппируем точки по угловой и по частотной переменным в единый набор значений, характеризуемых индексом i , так что $(\mu_i, \nu_i) = (\mu_m, \nu_n)$ при $i = m + (n - 1)M$. Тогда (6.24а) приведет к виду

$$S_{di} = \alpha_{di} \sum_{i'=1}^I w_{i'} \phi_{di'} u_{di'} + \beta_{di}, \quad i = 1, \dots, I. \quad (6.24б)$$

Аналогично вместо выражения (6.19) получим

$$S_{di} = \alpha_{di} \sum_{i'=1}^I \mathcal{P}_{d,i',i} u_{di'} + \beta_{di}, \quad i = 1, \dots, I. \quad (6.25)$$

Заметим мимоходом, что эти функции источников не зависят от угла, и, следовательно, в нашей записи имеется избыточная информация (ее можно устранить, если ввести переменные эддингтоновские множители). В выражении (6.24б) содержится еще некоторая дополнительная (по сравнению с (6.25). — *Ред.*) избыточная информация, обусловленная тем, что интеграл, описывающий рассеяние, не зависит от ν (а значит, и от i). Это обстоятельство будет использовано ниже в методе решения рассматриваемых уравнений, предложенном Райбки.

Далее, заменим производные конечными разностями, положив, например,

$$(dX/d\tau)_{d+\frac{1}{2}} \approx \Delta X_{d+\frac{1}{2}} / \Delta \tau_{d+\frac{1}{2}} = (X_{d+1} - X_d) / (\tau_{d+1} - \tau_d), \quad (6.26)$$

$$(d^2X/d\tau^2)_d \approx [(dX/d\tau)_{d+\frac{1}{2}} - (dX/d\tau)_{d-\frac{1}{2}}] / [(\Delta \tau_{d+\frac{1}{2}} + \Delta \tau_{d-\frac{1}{2}}) / 2]. \quad (6.27)$$

Тогда, вводя обозначения

$$\Delta \tau_{d \pm \frac{1}{2}, i} \equiv \frac{1}{2} (\chi_{d \pm 1, i} + \chi_{d, i}) |z_{d \pm 1} - z_d|, \quad (6.28)$$

$$\Delta \tau_{d, i} \equiv \frac{1}{2} (\Delta \tau_{d-\frac{1}{2}, i} + \Delta \tau_{d+\frac{1}{2}, i}), \quad (6.29)$$

перепишем уравнение (6.17) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_i^2}{\Delta \tau_{d-\frac{1}{2}, i} \Delta \tau_{d, i}} u_{d-1, i} - \frac{\mu_i^2}{\Delta \tau_{d, i}} \left(\frac{1}{\Delta \tau_{d-\frac{1}{2}, i}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta \tau_{d+\frac{1}{2}, i}} \right) u_{d, i} + \frac{\mu_i^2}{\Delta \tau_{d, i} \Delta \tau_{d+\frac{1}{2}, i}} u_{d+1, i} = u_{di} - S_{di}, \quad (6.30) \end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots, I$, $d = 2, \dots, D - 1$. Величины S_{di} определяются

формулами (6.24б) или (6.25). На самом деле они могут иметь даже еще более общий вид (так что, например, в них будут содержаться интенсивности на *всех частотах* спектра, см. §7.2 и 7.5). Для каждого значения частотно-угловой переменной i и каждого из $D - 2$ значений оптической глубины имеется по одному уравнению вида (6.30).

Если теперь ввести вектор \mathbf{u}_d размерности I с компонентами $(\mathbf{u}_d)_i = u_{di}$, соответствующими различным значениям частотно-угловой переменной i на данной глубине τ_d , то уравнение (6.30) можно записать в виде матричного уравнения

$$-\mathbf{A}_d \mathbf{u}_{d-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_d - \mathbf{C}_d \mathbf{u}_{d+1} = \mathbf{L}_d. \quad (6.31)$$

Квадратные матрицы \mathbf{A}_d и \mathbf{C}_d размерности I являются *диагональными* и служат конечно-разностным представлением оператора дифференцирования. У матрицы \mathbf{B}_d все элементы отличны от нуля. При этом недиагональные элементы порождаются квадратурной суммой, представляющей интегралы рассеяния в выражениях (6.24) и (6.25), элементы же, лежащие вдоль главной диагонали, представляют еще и оператор дифференцирования. Составляющие вектора \mathbf{L}_d — значения мощности тепловых источников. Можно применить и более точное, чем в уравнении (6.30), разностное представление, воспользовавшись сплайнами [374], [442] или формулами интегрирования Эрмита [34]. Впрочем, это не изменяет общего вида уравнения (6.31) (хотя матрицы \mathbf{A}_d и \mathbf{C}_d могут перестать быть диагональными).

Чтобы замкнуть нашу систему уравнений, воспользуемся граничными условиями. Для верхней границы можно было бы написать

$$\mu_i(u_{2i} - u_{1i})/\Delta\tau_{\frac{1}{2},i} = u_{1i}, \quad (6.32)$$

однако это равенство справедливо лишь с точностью до членов первого порядка. Более точное условие (с учетом членов второго порядка) можно получить [30] с помощью разложения Тейлора

$$u_2 = u_1 + \Delta\tau_{\frac{1}{2}}^2 (du/d\tau)_1 + \Delta\tau_{\frac{1}{2}}^2 (d^2u/d\tau^2)_1 / 2,$$

которое с учетом соотношений (6.17) и (6.20) дает

$$\mu_i(u_{2i} - u_{1i})/\Delta\tau_{\frac{1}{2},i} = u_{1i} + (\Delta\tau_{\frac{1}{2},i}/2\mu_i)(u_{1i} - S_{1i}), \quad (6.33)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1 - \mathbf{C}_1 \mathbf{u}_2 = \mathbf{I}_1. \quad (6.34)$$

Последовательно повторяя этот процесс, получим общее соотношение

$$\mathbf{u}_d = \mathbf{D}_d \mathbf{u}_{d+1} + \mathbf{v}_d, \quad (6.39)$$

где

$$\mathbf{D}_d \equiv (\mathbf{B}_d - \mathbf{A}_d \mathbf{D}_{d-1})^{-1} \mathbf{C}_d, \quad (6.40)$$

$$\mathbf{v}_d \equiv (\mathbf{B}_d - \mathbf{A}_d \mathbf{D}_{d-1})^{-1} (\mathbf{L}_d + \mathbf{A}_d \mathbf{v}_{d-1}), \quad (6.41)$$

причем $d = 1, \dots, D$. Начав с $d = 1$, последовательно вычисляем значения \mathbf{D}_d и \mathbf{v}_d вплоть до $d = D - 1$. На последнем шаге ($d = D$) имеем $\mathbf{C}_D \equiv 0$, и поэтому $\mathbf{D}_D = 0$ и $\mathbf{u}_D \equiv \mathbf{v}_D$ [находится из соотношения (6.41)]. Найдя \mathbf{u}_D , выполняем последовательные обратные подстановки в уравнение (6.39) и находим \mathbf{u}_d , $d = D - 1, \dots, 2, 1$.

Зная u_{dmn} , мы можем теперь вычислить $J_{dn} \equiv \sum_{m=1}^M b_m u_{dmn}$ и функцию источников, содержащую интеграл по частоте от J_n ; например, может быть

$$S_{dn} = \alpha_{dn} \sum_{n'} w_{n'} \phi_{dn'} J_{dn'} + \beta_{dn}.$$

Описанная процедура прогонки явным образом учитывает члены, описывающие рассеяние, и двухточечные краевые условия. Применение метода Фотрие показало, что он обладает высокой устойчивостью и многими другими полезными особенностями. Отметим, например, что на больших оптических глубинах система стремится стать диагональной (члены с $1/\Delta\tau^2$ стремятся к нулю) и, следовательно, $\mathbf{J}_d \rightarrow \mathbf{S}_d$, как и должно быть. Более того, мы получаем $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{S} + \mu^2 d^2 \mathbf{S}/d\tau^2$, что автоматически приводит нас к диффузионному приближению. Дискретизация по глубине, как правило, выполняется таким образом, чтобы получался равномерный шаг по $\lg \tau$, причем обычно берут по 5 или 6 точек на один порядок по τ . Такой выбор обладает тем достоинством, что на таких частотах, для которых значения коэффициента поглощения очень сильно отличаются друг от друга (например, в центре линии и в близлежащем континууме), все же получается разумное распределение точек по глубине.

Для оценки затрат машинного времени, необходимого для решения некоторой определенной задачи, можно подсчитать число умножений, требующихся при решении системы уравнений. Решение линейной системы уравнений порядка n требует $O(n^3)$ операций, так

что машинное время для метода Фотри составляет $T_F = cDI^3 = cDM^3N^3$, где D — число точек по глубине, M — число точек по углу и N — число точек по частоте. Ясно, что за любое ненужное излишество в частотно-угловой информации приходится расплачиваться и что представление этих переменных должно быть настолько экономным, насколько это возможно. Если решается задача о когерентном рассеянии, то $N = 1$, M , как правило, малó, и метод Фотри является оптимальным. Однако в других задачах число частот может быть велико, потому что необходимо обеспечить выполнение условий лучистого равновесия или статистического равновесия для нескольких переходов. При этом угловая переменная, по существу, не нужна, так как в уравнения, описывающие эти дополнительные ограничения, входит только J_ν , а не $u_{\mu\nu}$. Избавимся поэтому от информации об угловой зависимости, введя переменные эддингтоновские множители $f_\nu \equiv K_\nu/J_\nu$ [44].

Проинтегрировав уравнение (6.17) по μ , получим

$$\partial^2(f_\nu J_\nu)/\partial\tau_\nu^2 = J_\nu - S_\nu, \quad (6.42)$$

а из граничных условий найдем

$$(\partial(f_\nu J_\nu)/\partial\tau_\nu)_0 = h_\nu J_\nu(0), \quad (6.43)$$

$$\left. \frac{\partial(f_\nu J_\nu)}{\partial\tau_\nu} \right|_{\tau_{\max}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\chi_\nu} \left| \frac{\partial B_\nu}{\partial z} \right| \right)_{\tau_{\max}}, \quad (6.44)$$

где $h_\nu \equiv H_\nu(0)/J_\nu(0)$. Уравнения (6.42) — (6.44) можно дискретизировать точно так же, как и уравнения с угловой переменной. Однако машинное время, необходимое для решения получающейся при этом системы, составляет всего $T_\nu = cDN^3$, что свидетельствует о значительной его экономии. Чтобы решить эти уравнения, нужно знать зависимость f_ν от оптической глубины на всех частотах. Поступим следующим образом. а) При любой заданной функции S_ν (например, если в качестве первого приближения взять $S_\nu = B_\nu$) можно найти $u_{\mu\nu}$ из уравнения (6.17) для каждого фиксированного значения угла и фиксированного значения частоты. В матричной форме это уравнение выглядит так: $\mathbf{T} \mathbf{u}_i = \mathbf{S}_i$, где \mathbf{T} — трехдиагональная матрица, а \mathbf{u}_i и \mathbf{S}_i характеризуют изменение соответствующих величин с глубиной (при фиксированном значении частотно-угловой переменной), т.е. изменение с d компонентов u_{di} и S_{di} соответственно. Решение одной трехдиагональной системы порядка n требует выполнения $O(n)$ операций, так что время, затрачиваемое на вычисление полной частотно-угловой зависимости поля излучения при заданном S_ν , равно $T_\mu = c'DMN$. б) Имея значе-

ния u_{dmn} , мы далее вычисляем

$$f_{dn} = \sum_m b_m \mu_m^2 u_{dmn} / \sum_m b_m u_{dmn},$$

$$h_n = \sum_m b_m \mu_m u_{1mn} / \sum_m b_m u_{1mn}.$$

Заметим, что даже если поле излучения известно с не очень высокой точностью, эддингтоновский множитель определяется гораздо точнее (например, если u известно с точностью до множителя, зависящего только от глубины, то f получается точно). в) Далее, зная f_v , решаем уравнения (6.42) — (6.44) и находим J_v , используя при этом явные выражения для S_v вида (6.24) или (6.25) (переписанные так, чтобы в них входило J_v). После этого заново вычисляем S_v , пользуясь новыми значениями J_v . г) Поскольку величина S_v , найденная на этапе (в), отличается от использованной на этапе (а), повторяем этапы (а) — (в) до достижения сходимости. Если L — число таких итераций, то полное время вычислений $T_E = L(cDN^3 + c'DMN)$, т.е. при не слишком большом L много меньше cDM^3N^3 . Как показал опыт, несмотря на большое разнообразие физических условий в звездных атмосферах, этот метод всегда обеспечивает чрезвычайно быструю сходимость (L обычно равно 3 или 4), и поэтому достигается ощутимая экономия машинного времени (примерно раз в десять). Заметим, наконец, что к уравнениям переноса в каждой точке по глубине d могут добавляться и другие уравнения, которые выражают необходимость выполнения тех или иных дополнительных физических условий, например, статистического, гидростатического или лучистого равновесия (см. §7.5). Общая структура уравнения (6.31) остается при этом неизменной, так как эти дополнительные условия содержат информацию, относящуюся на каждом шаге лишь к одному или двум значениям глубины. Поэтому если мы имеем C таких условий, то полное время вычислений будет $T_E = L[cD(N+C)^3 + c'DMN]$. Этот результат имеет прямое отношение к вопросу о том, каким методом лучше пользоваться — методом Фотрие или же методом Райбики. К обсуждению этого вопроса мы теперь и обратимся.

Упражнение 6.4. Выполнение этого упражнения требует использования ЭВМ (малой мощности). а) Написать программу для формального решения уравнения переноса, т.е. для нахождения $u_{\mu\nu}$ по заданной функции источников S_ν (для фиксированного значения угла, как было описано выше) и для расчета переменных эддингто-

новских множителей на всех глубинах. Использовать равномерный шаг по $\lg \tau$, начав с $\tau = 10^{-3}$ и дойдя до $\tau = 10$ (брать по 5 или 6 точек на порядок). Для вычисления интеграла по углу применять гауссовы квадратуры по половинным промежуткам [4], стр. 921. Поэкспериментируйте с числом узлов по углу M для изучения чувствительности эддингтоновского множителя к точности квадратурной формулы. б) Написать программу для решения уравнений (6.42) — (6.44) при заданных эддингтоновских множителях для случая когерентного рассеяния, когда $S_\nu = \alpha J_\nu + \beta$. Объединить обе программы и исследовать сходимость процесса итераций при $\alpha = 1 - \varepsilon$, $\beta = \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$, начав с $J_\nu \equiv 1$. Рассмотреть случаи $\varepsilon = 0,1; 0,01$ и 10^{-4} .

РЕШЕНИЕ РАЙБИКИ

Как мы видели выше, вычисления методом Фотрие построены таким образом, что для каждой глубины вся информация о зависимости решений от частоты собирается вместе, а затем шаг за шагом осуществляется переход от одной глубины к другой. Этот метод позволяет рассматривать и тот общий случай, когда *функция источников зависит от частоты* [см., например, выражение (6.25)], как это имеет место при *частичном перераспределении* по частотам. Однако при этом затраты машинного времени растут пропорционально кубу числа точек разбиения по частоте. В превосходной работе [543] Райбики указал, что в наиболее часто рассматриваемом случае *полного перераспределения* большая часть информации о частотной зависимости является излишней, поскольку, согласно (6.24), для нахождения функции источников нужна лишь одна величина $\bar{J} = \int \phi_\nu J_\nu d\nu$. Дав глубокий анализ задачи, Райбики показал, что в этом случае схему вычислений можно перестроить таким образом, что получится система уравнений такой же степени эффективности и общности, как и в первоначальном методе Фотрие, но требующая гораздо меньших затрат машинного времени.

Вместо того чтобы описывать частотную зависимость интенсивности излучения на заданной глубине, изменим порядок группирования переменных и будем использовать векторы, которые описывают изменение интенсивности с глубиной при фиксированном значении частоты. Иначе говоря, введем теперь

$$\mathbf{u}_i = (u_{1i}, u_{2i}, \dots, u_{Di})^T, \quad (6.45)$$

где индекс i относится к определенному узлу разбиения по

дую строчку гиперматрицы преобразуем, разрешив ее относительно \mathbf{u}_i :

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{K}_i - \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{U}_i \bar{\mathbf{J}}, \quad i = 1, \dots, I. \quad (6.50)$$

Умножим полученные выражения на \mathbf{V}_i и вычтем из последней строки. Тогда i -й «элемент» последней строки обратится в нуль. Прделаав эту процедуру для всех значений i , получим окончательную систему для $\bar{\mathbf{J}}$, а именно $\mathbf{W} \bar{\mathbf{J}} = \mathbf{Q}$, где \mathbf{W} — матрица порядка D , все элементы которой ненулевые:

$$\mathbf{W} \equiv \mathbf{E} - \sum_{i=1}^I \mathbf{V}_i \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{U}_i, \quad (6.51)$$

а вектор \mathbf{Q} равен

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} - \sum_{i=1}^I \mathbf{V}_i \mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{K}_i. \quad (6.52)$$

Решаем полученную для $\bar{\mathbf{J}}$ систему. Это дает нам достаточную информацию для нахождения \mathbf{S} (т.е. хода изменения функции источников с глубиной). Если потребуется, с помощью формулы (6.50) можно восстановить полную частотно-угловую структуру поля излучения, пользуясь уже найденными нами величинами $\mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{K}_i$ и $\mathbf{T}_i^{-1} \mathbf{U}_i$.

Решение I трехдиагональных систем для получения величин \mathbf{u}_i по (6.50) требует $O(D^2 I) = O(D^2 MN)$ операций, а решение окончательной системы требует $O(D^3)$ операций, так что оценка полного машинного времени дается выражением $T_R = cD^2 MN + c'D^3$. (Замечание. Величины c в этом выражении не равны тем, которые фигурируют в выражениях для T_F , T_E и т.д.) В отличие от метода Фотрие, для которого время счета пропорционально кубу числа узлов по частотно-угловой переменной (т.е. $M^3 N^3$), в методе Райбики машинное время растет с MN линейно. Ясно, что, когда требуется большое число точек по частоте, метод Райбики гораздо выгоднее метода Фотрие (даже в варианте с переменными эддингтоновскими множителями). Напомним, однако, что метод Райбики применим лишь в том случае, когда в выражении для S_ν интеграл, описывающий рассеяние, можно выразить через зависящую только от оптической глубины величину $\bar{\mathbf{J}}$, тогда как метод Фотрие применим и в более общих случаях. В принципе и в методе Райбики можно было бы использовать переменные эддингтоновские множители, однако преимущества этого (если они вообще есть), вероятно, очень малы, так как при этом пришлось бы использовать итера-

ции. Следует также подчеркнуть, что метод Райбки полностью эквивалентен методу, основанному на использовании интегрального уравнения, которое может быть записано в виде $u_i = \Lambda_i \bar{J} + M_i$, где матрицы Λ_i появляются при аналитическом интегрировании произведения ядерной функции на набор базисных функций, представляющих \bar{J} . Матрица T_i^{-1} в сущности есть матрица Λ_i , и обращение T_i обладает заметными преимуществами перед всеми другими способами нахождения Λ [34]. Иначе это можно выразить так: при желании можно применять методы, использующие решение интегральных уравнений, однако делать это следует, используя для нахождения Λ_i метод Райбки.

Упражнение 6.5. Написать программу для решения уравнения переноса на ЭВМ методом Райбки для случая когерентного рассеяния, когда $S_p = \alpha J_p + \beta$, для тех же значений ϵ , что и в упр. 6.4. Заметим, что преимущества метода Райбки здесь не проявляются, так как в этом случае в задаче имеется лишь одна точка по частоте.

Наконец, упомянем о том, как в методе Райбки учитываются различные дополнительные физические условия. Для каждого такого условия, которое вводит в задачу существенно новую информацию, требуется дополнительная новая переменная, подобная \bar{J} , которая определяется из соответствующего уравнения. Например, в задаче о *мультиплете* (см. § 12.3) нам понадобится своя величина \bar{J} для каждого независимого перехода, а в задачах, где вводится полный набор уравнений статистического равновесия, после их линеаризации требуется по одной новой переменной на каждый уровень, имеющийся в используемой модели атома, или на каждую линию из набора возможных переходов (см. § 12.4). Если полное число переменных, описывающих налагаемые дополнительные условия, равно C , то каждая матрица U должна состоять из C диагональных матриц порядка D , расположенных в строку, тогда как каждая матрица V будет состоять из диагональных матриц порядка D , расположенных столбцом, а E становится квадратной матрицей размерности CD . В этом случае время счета при прямом решении оказывается равным

$$T_R = cD^2MNC + c'(DC)^3.$$

При $C \gg 1$ эта величина превосходит соответствующее значение T_F , и на первый взгляд кажется, что для решения систем, в кото-

рых учитывается большое число дополнительных условий, метод Фотрие предпочтительнее (вот почему он применяется в §7.5 при построении моделей звездных атмосфер без предположения об ЛТР). Тем не менее при расчетах *статистического равновесия* метод Райбики успешно применялся даже при больших значениях S . При этом полная система решалась методом итераций (см. §12.4).

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТОКА

Для сравнения теории с наблюдениями необходимо рассчитывать поток выходящего излучения. Это может делаться множеством различных способов. Например, если применяется метод Фотрие с переменными эддингтоновскими множителями, то значение величины h_ν известно и поток можно вычислить непосредственно из соотношения

$$H_\nu(0) = h_\nu J_\nu(0).$$

Если используется метод Райбики или метод Фотрие с угловой зависимостью, то поток вычисляется так:

$$H_\nu(0) = \sum_m b_m \mu_m u(0, \mu_m, \nu).$$

Другая возможность состоит в том, что, поскольку S_ν известно, для получения потока можно воспользоваться оператором Φ [см. формулу (2.61)]: $F_\nu(0) = \Phi_0[S_\nu(\tau_\nu)]$. На практике вычисления производятся с использованием какой-либо квадратурной формулы, которую можно выбрать по-разному (см., например, [141], [246], [8], стр. 33). Если нужно найти поток во внутренних точках атмосферы, можно применить к S оператор Φ_τ или же из уравнения (6.15) вычислить $u(\tau_{d \pm 1/2}, \mu_m, \nu_n)$ и найти

$$H_{d \pm 1/2, n} = \sum_m b_m \mu_m u(\tau_{d \pm 1/2}, \mu_m, \nu_n)$$

(заметим, что этим способом поток определяется в точках, расположенных в середине интервала между выбранными точками разбиения по оптической глубине).