

беднее, почти не приходится сомневаться в том, что в атмосферах многих звезд (например, сверхгигантов) сложные макроскопические движения играют важную роль. Однако в своем нынешнем виде теория не способна вполне последовательно описывать детали обмена энергией между полем излучения и гидродинамическими движениями. Турбулентная диссипация при конвекции; возбуждение, распространение и диссипация волн; эффекты, обусловленные дифференциальным вращением; эффекты, вызываемые магнитными полями и множество других явлений фактически целиком остаются в стороне! Это принципиально важные явления, так как без них мы не можем объяснить существование хромосфер и корон (в данной книге эти области атмосфер будут рассматриваться лишь с полупирической диагностической точки зрения, поскольку последовательного теоретического метода у нас нет). Существенные ограничения на наши представления о звездных атмосферах налагаются также и тем, что мы не умеем описывать тонкие явления обмена энергией между радиативными и нерадиативными модами. Разработка теории, которая позволяла бы правильно учитывать такие взаимодействия, является, по-видимому, наиболее насущной из проблем, лежащих на переднем крае исследований в этой области астрофизики.

Однако, чтобы у читателя не сложилось слишком уж мрачное представление о положении дел в настоящее время, надо сказать, что прогресс был быстрым и продолжается во все более высоком темпе. Поэтому разумно ожидать, что по крайней мере некоторые из недостатков сегодняшней теории будут исправлены в недалеком будущем. Более того, даже не выходя за рамки наложенных выше ограничений, все же удастся успешно предсказать многие характеристики континуума и профили линий у многих (вероятно, даже у большинства) звезд.

7.2. Модели с лучистым равновесием и ЛТР

В этом параграфе развиваются *методы*, которые можно использовать для построения моделей плоских неподвижных атмосфер с лучистым равновесием в предположении существования ЛТР. *Результаты* таких расчетов будут описаны в § 7.4. Как говорилось в гл. 5, предположение об ЛТР значительно упрощает расчет модели (в этом можно убедиться, сравнив методы, излагаемые в настоящем параграфе и в § 7.5). Мы критиковали использование ЛТР на том основании, что оно не дает правильного описания взаимодействия излучения и вещества в звездных атмосферах и совершен-

но не способно передать многих принципиально важных моментов (в особенности касающихся образования линий). Но с прагматической точки зрения модели с ЛТР позволяют рассматривать многие эффекты (например, покровный эффект), которые существенны при применениях расчетов моделей звездных атмосфер к интерпретации показателей цвета, температур и светимостей звезд и т.п., но пока не поддаются учету в моделях без предположения об ЛТР. Поэтому в известном смысле эти два подхода дополняют друг друга: теория, не использующая предположения об ЛТР, позволяет далеко проникнуть в физическое существо проблемы, тогда как, приняв ЛТР, мы получаем возможность составить предварительное суждение о сложных сторонах моделей. Разумеется, конечная цель — создание моделей, не опирающихся на предположение об ЛТР, но достигших степени совершенства, доступной для любой из современных моделей с ЛТР.

КОЭФФИЦИЕНТЫ ПОГЛОЩЕНИЯ И ИЗЛУЧЕНИЯ: КОНТИНУУМЫ И ПОКРОВНЫЙ ЭФФЕКТ

Зависимость коэффициентов поглощения и излучения от частоты в звездных атмосферах играет ключевую роль в определении характера спектра выходящего излучения. Например, резкое уменьшение потока по коротковолновую сторону примерно от $\lambda 3650 \text{ \AA}$ у А-звезд можно объяснить большим скачком непрозрачности, обусловленным фотоионизацией водорода с уровня $n = 2$. Так как вещество делается более непрозрачным, мы видим менее глубокие слои атмосферы и потому регистрируем энергию, приходящую только из лежащих ближе к границе более холодных слоев. Мы уже видели (гл. 3), что задачу об атмосфере с зависящим от частоты коэффициентом поглощения *нельзя* свести к серой задаче, как бы ни выбирался средний коэффициент поглощения, и поэтому необходимо с самого начала учитывать детальную зависимость коэффициента поглощения от частоты. Как минимум должно учитываться изменение непрозрачности *в континууме*, что позволяет объяснить основные особенности распределения энергии в спектре выходящего излучения. При более тонком анализе следует принимать во внимание и влияние *линий*.

Непрозрачность на любой заданной частоте есть сумма вкладов, обусловленных всеми возможными переходами (связанно-связанными, связанно-свободными, свободно-свободными) всех химических элементов, которые способны поглощать фотоны на этой частоте. Из формул (5.53) и (5.60) видно, что коэффициент погло-

шения за счет прямого перехода $i \rightarrow j$ с уровня i равен $n_i \alpha_{ij}(\nu)$. Вынужденное излучение возвращает энергию в первоначальный пучок, причем скорость этого процесса пропорциональна I_ν . Поэтому (в предположении совпадения профилей излучения и поглощения) в непрозрачность вводится соответствующая поправка — из коэффициента поглощения вычитается член, учитывающий вынужденное излучение. Согласно формулам (5.54) и (5.64), эта поправка равна произведению $n_j \alpha_{ij}(\nu) G(\nu)$, где $G(\nu) = g_i/g_j$ или $G(\nu) = (n_i/n_j)^* \times \exp(-h\nu/kT)$ для связанно-связанных и связанно-свободных переходов соответственно. Обозначим через n_i^* населенность состояния i при ЛТР, даваемую обычной формулой Больцмана — Саха [формула (5.14)] при *реально имеющейся* концентрации ионов. Тогда, выполняя суммирование по всем уровням и процессам и считая, что ЛТР, вообще говоря, отсутствует, для коэффициента поглощения получаем

$$\begin{aligned} \chi_\nu = & \sum_i \sum_{j>i} [n_i - (g_i/g_j)n_j] \alpha_{ij}(\nu) + \sum_i (n_i - n_i^* e^{-h\nu/kT}) \alpha_{ik}(\nu) + \\ & + \sum_k n_e n_k \alpha_{kk}(\nu, T) (1 - e^{-h\nu/kT}) + n_e \sigma_e, \end{aligned} \quad (7.1)$$

где четыре члена в правой части описывают вклады, обусловленные соответственно связанно-связанным, связанно-свободным и свободно-свободным поглощением и электронным рассеянием (можно добавить и другие члены, описывающие рассеяние, например рэлеевское). Чтобы рассчитать *спонтанное тепловое излучение* (не предполагая ЛТР), воспользуемся выражениями (5.55) и (5.62) для чисел переходов, что позволяет написать

$$\begin{aligned} \eta_\nu = & (2h\nu^3/c^2) \left[\sum_i \sum_{j>i} n_j (g_i/g_j) \alpha_{ij}(\nu) + \sum_i n_i^* \alpha_{ik}(\nu) e^{-h\nu/kT} + \right. \\ & \left. + \sum_k n_e n_k \alpha_{kk}(\nu, T) e^{-h\nu/kT} \right]. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Отдельные члены справа и здесь описывают связанно-связанные, связанно-свободные и свободно-свободные процессы. Излучение, обусловленное рассеянием в континууме, будем описывать отдельным членом в уравнении переноса. Формулы (7.1) и (7.2) применимы без предположения об ЛТР. Если допустить, что имеет место ЛТР, то они упрощаются и принимают вид

$$\chi_\nu^* = \left[\sum_i \sum_{j>i} n_i^* \alpha_{ij}(\nu) + \sum_i n_i^* \alpha_{ik}(\nu) + \right.$$

$$+ \sum_k n_e n_k \alpha_{kk}(\nu, T) (1 - e^{-h\nu/kT}) + n_e \sigma_e, \quad (7.3)$$

$$\eta_\nu^* = (2h\nu^3/c^2)e^{-h\nu/kT} \left[\sum_i \sum_{j>i} n_i^* \alpha_{ij}(\nu) + \right. \\ \left. + \sum_i n_i^* \alpha_{ik}(\nu) + \sum_k n_e n_k \alpha_{kk}(\nu, T) \right]. \quad (7.4)$$

Положив $k_\nu^* = \chi_\nu^* - n_e \sigma_e$, видим, что $\eta_\nu^* = k_\nu^* B_\nu$, как это и должно быть по соотношению Кирхгофа — Планка [формула (2.6)].

При ЛТР населенности уровней $n_i^* = n_i^*(N, T)$, и поэтому $\chi_\nu^* = \chi_\nu^*(N, T)$ и $\eta_\nu^* = \eta_\nu^*(N, T)$, что упрощает расчеты и позволяет легко произвести учет большого числа различных процессов поглощения и излучения. Основными свободными параметрами, входящими в расчет, являются параметры, описывающие *химический состав* вещества. У звезд разных спектральных типов доминирующие источники поглощения будут разными в зависимости от состояния ионизации и возбуждения вещества. Так, для звезд солнечной температуры и более холодной основной процесс связанно-свободного поглощения обусловлен ионом H^- , у А-звезд — нейтральным H , у В-звезд значительный вклад начинает давать $He I$, у О-звезд важную роль играют $He II$ и многочисленные ионы легких элементов (например, C, N, O, Ne, Si) [101], [319]. У звезд поздних типов заметный вклад дают разнообразные отрицательные ионы атомов и молекулы [109]; [73], гл. 4; [644]. Вклад в поглощение могут давать буквально сотни или тысячи уровней. Со всей этой массой деталей можно справиться, лишь приняв ЛТР, но даже и тогда требуются обширные расчеты (см., например, [504]).

Свободно-свободное поглощение He^+ , He и H существенно у О-звезд. У А-звезд главный вклад в свободно-свободное поглощение дает H , на Солнце оно обусловлено H^- , а у М-звезд становится существенным свободно-свободное поглощение H_2^- . Электронное рассеяние является основным источником непрозрачности у О-звезд, а рэлеевское рассеяние на H и H_2 дает существенный вклад в непрозрачность атмосфер звезд промежуточной температуры (спектральные типы G и K). Весьма детальные и обширные расчеты непрозрачностей были выполнены группами исследователей в Киле и в Лос-Аламосе, опубликовавшими многочисленные графики и таблицы результатов (читателю следует внимательно их изучить; см. [651]; [97]; [638], стр. 181–199; [184]). Большая часть полученных в Лос-Аламосе результатов имеет отношение к недрам звезд, но не-

которые касаются и звездных атмосфер. Весьма полное обсуждение методов, использовавшихся в этих расчетах, можно найти в [14], гл. 3. Хотя для континуумов расчеты подчас оказываются трудоемкими, принципиальных трудностей здесь нет.

Кроме континуумов, непрозрачность звездного вещества обусловлена вкладом от огромного числа — *от тысяч до миллионов* — спектральных линий, как атомных, так и молекулярных. Непрозрачность, обусловленная связанно-связанными переходами, существенна для звезд всех спектральных типов. У звезд самых ранних спектральных типов в ультрафиолете доминируют резонансные линии H, He I, He II и ионов легких элементов. У A-звезд существенны лаймановские и бальмеровские линии водорода. Для звезд типа Солнца важные эффекты вызываются линиями нейтральных и однократно ионизованных металлов и других атомов не слишком большого атомного веса. У звезд поздних типов доминируют молекулярные полосы (CN, CO, H₂O и т.д.). Главным параметром, определяющим непрозрачность, обусловленную линиями, также является химический состав газа. Кроме того, в модели входят параметры, которые определяют ширины линий, например скорости макроскопических движений в атмосферах (так называемая микротурбулентность, см. § 10.3).

Влияние поглощения за счет связанно-связанных переходов на звездную атмосферу известно под названием *покровного эффекта*. Он оказывает решающее влияние как на вид спектра выходящего излучения, так и на физическое строение атмосферы. Наличие градиента температуры в атмосфере ведет к тому, что слои, от которых приходит излучение в непрозрачных линиях, будут более холодными и потому будут излучать меньше энергии. Присутствие многочисленных темных спектральных линий в пределах некоторой заданной фотометрической полосы (определяемой, например, каким-то фильтром), очевидно, оказывает непосредственное влияние на измеряемый поток. Этот эффект называют *эффектом блокировки*. Поскольку полный поток в атмосфере должен сохраняться, поток, блокируемый линиями, должен выходить на других частотах. Поэтому величина энергии, излучаемой в тех областях континуума, где этот поток переизлучается, поднимается выше значения, которое она имела бы в отсутствие линий. Кроме того, ширина той полосы в спектре, в пределах которой перенос энергии не затруднен, из-за присутствия линий уменьшается. Поэтому, чтобы переносился тот же поток, требуются более крутые градиенты температуры. В результате температура в глубоких слоях возрастает

(*эффект самообогрева*). Наконец, линии *изменяют температуру в самых наружных слоях атмосферы*. Подробнее эти эффекты будут изучаться в § 7.4. Из сказанного ясно, что учет поглощения за счет связанно-связанных переходов является существенным, и возникает вопрос, как это можно сделать.

Самый непосредственный метод учета линий — *прямой подход*, при котором при вычислениях берется достаточное число точек по частоте, чтобы описать профили рассматриваемых линий. В этом методе зависимость коэффициента поглощения от частоты и от глубины учитывается полностью. Его можно использовать лишь тогда, когда в спектре доминирует всего несколько линий. Этот прямой метод обладает тем недостатком, что у многих звезд линейчатый спектр настолько сложен (в молекулярных полосах, например, содержатся миллионы линий), что детальное описание требует недопустимо больших затрат машинного времени. Поэтому следует искать другие пути. Мы будем характеризовать их термином *статистические методы*. В этих методах сложную частотную зависимость непрозрачности, обусловленной линиями, в пределах некоторой полосы пытаются заменить более простой зависимостью, описываемой небольшим числом параметров. Самое простое из всех возможных описаний — ограничить всю информацию одним числом — *средней непрозрачностью*. В частности, можно было бы рассматривать либо планковское среднее [см. формулу (3.28)], либо росселандово [формула (3.26)]. Как следовало ожидать, этот подход на самом деле не является удовлетворительным (в точности по тем же причинам, что и в случае континуума). В частности, хотя использование росселандова среднего вполне оправданно на больших глубинах, где справедливо диффузионное приближение (как это делается для учета вклада линий в непрозрачность в недрах звезд), вблизи поверхности этот метод имеет тенденцию недооценивать непрозрачность и плохо аппроксимирует истинный энергетический баланс в этих слоях [126]. Планковское среднее не способно дать для потока на большой глубине его диффузионное значение и сильно переоценивает непрозрачность на поверхности. Это ведет к значительным ошибкам в получающихся потоках и в температурной структуре модели.

Осознав недостаточность одной средней непрозрачности, перейдем от детального спектра (рис. 7.1) к плавной *функции распределения непрозрачностей* (рис. 7.2), являющейся обобщением классической модели частотола, описываемой в § 7.4. Рассмотрим участок спектра, достаточно узкий, чтобы гарантировать, что точное поло-

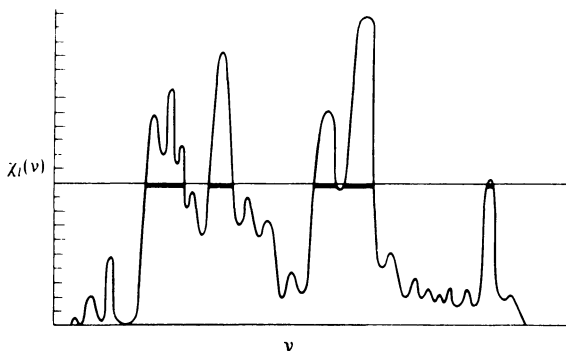


Рис. 7.1. Схематическое изображение коэффициента поглощения, обусловленного налагающимися друг на друга спектральными линиями. Для детального описания изменения коэффициента поглощения с частотой потребовалось бы очень большое число точек по частоте.

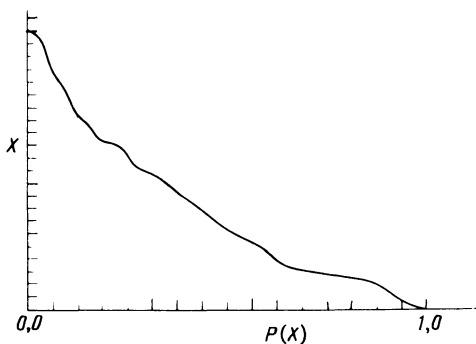


Рис. 7.2. Схематическое изображение функции распределения значений непрозрачности для спектра, показанного на рис. 7.1. Для описания этого плавного распределения достаточно сравнительно небольшого числа точек.

жение линии в его пределах несущественно (т.е. пусть другие свойства, такие, как непрозрачность в континууме или планковская функция, в пределах этого участка заметно не изменяются). Тогда можно найти долю $P(X)$ этого участка, занимаемую линиями, для которых коэффициент поглощения $\chi_i(\nu)$, имеет значение, не меньшее некоторого выбранного X , и построить график этой доли в функции X . В результате получится плавная кривая, которую можно хорошо аппроксимировать ступенчатой функцией, пользуясь небольшим числом интервалов по X (возможно, разной ширины). Такую процедуру можно выполнить для целого набора температур и плотностей, получив тем самым описание изменения непрозрачно-

сти, обусловленной линиями, по всей атмосфере. Критическое исследование этого подхода [126] показывает, что функции распределения непрозрачностей дают превосходные результаты и с удовлетворительной точностью воспроизводят потоки выходящего излучения и физическую структуру атмосферы, которые получаются при расчетах прямым методом.

Главный недостаток метода функций распределения непрозрачностей состоит в том, что в нем неявно допускается, что положения линий (по частоте) не меняются заметно с глубиной на расстояниях порядка длины свободного пробега фотона (т.е. до оптической глубины в континууме, равной единице). Решающее значение для процесса переноса излучения имеет то, попадает ли линия одного слоя атмосферы по частоте на линию или же на участок континуума для слоя, лежащего выше. Дело в том, что во втором случае фотоны могут свободно выходить, а в первом — нет. Заметные изменения линейчатого спектра с глубиной, делающие метод функций распределения непрозрачностей неприменимым, могут иметь место в целом ряде случаев, например в следующих. а) Молекулярные полосы двух различных молекул могут налагаться друг на друга. Концентрация одной из этих молекул относительно другой может быстро убывать или возрастать с глубиной. Хотя полная непрозрачность, обусловленная обеими полосами совместно, может и не меняться, положения двух групп линий могут при этом быть совершенно разными. б) Сильная ударная волна в атмосфере может вызвать резкое изменение состояния возбуждения и ионизации газа на небольшом расстоянии. Линейчатый спектр по разные стороны от фронта ударной волны может быть совершенно разным. в) Смещения линий, обусловленные движением газа в расширяющихся атмосферах, систематически сдвигают линии относительно их положения в неподвижной среде. Это сильно сказывается на балансе энергии и импульса вещества (см. §§ 14.1 и 15.4). В подобных случаях нужно использовать либо прямой метод, либо такое обобщение статистического подхода, которое каким-то образом учитывает изменения в расположении линий по частоте. Недавно был предложен [585] другой подход, называемый *методом выборочной непрозрачности* (он основан на использовании непрозрачностей на частотах, выбранных случайным образом). С вычислительной точки зрения этот метод представляется более дорогим, чем метод функций распределения непрозрачностей. Однако он свободен от только что описанного недостатка и поэтому заслуживает дальнейшего изучения.

ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ РАВНОВЕСИЕ

В неподвижной атмосфере весу вышележащих слоев противостоит давление. По сути дела именно баланс этих двух сил и определяют распределение плотности в среде. Таким образом,

$$\nabla p = \rho \mathbf{g}, \quad (7.5)$$

где полное давление $p = p_g + p_R$ [дин/см²] есть сумма газового давления $p_g = NkT$ и давления излучения $p_R = (4\pi/c) \int K_\nu d\nu$, \mathbf{g} — ускорение силы тяжести на поверхности (оно рассматривается как основной параметр, описывающий атмосферу), наконец, ρ — плотность (г/см³). Воспользовавшись обозначениями § 5.2, ее можно представить в виде

$$\rho = (N - n_e) m_H \sum_k \alpha_k A_k = (N - n_e) \bar{m}, \quad (7.6)$$

где m_H — масса атома водорода и A_k — атомный вес химического элемента k с относительной распространенностью α_k . Если ввести в качестве новой независимой переменной массу m в столбе единичного сечения, лежащую над данным уровнем, так что

$$dm = -\rho dz, \quad (7.7)$$

то уравнение (7.5) можно переписать в виде $dp/dm = g$, откуда получаем *точный интеграл* $p(m) = gm + c$. Возможность написать такое соотношение является очевидным достоинством, и поэтому в дальнейшем в качестве независимой переменной будет использоваться m . Переход от z к m на уравнении переноса, по существу, не сказывается. Если воспользоваться выражением (2.776) для градиента светового давления, уравнение (7.5) можно переписать в другой, более удобной форме:

$$\frac{dp_g}{dm} = g - \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty (\chi_\nu/\rho) H_\nu d\nu, \quad (7.8)$$

которая показывает, что механическая сила, вызываемая излучением, стремится компенсировать силу притяжения. Это приводит к тому, что градиент давления в атмосфере становится меньше. Иначе можно сказать, что под действием поля излучения вещество стремится «всплыть» вверх. Как было показано в гл. 1, градиент давления излучения определяется потоком излучения в атмосфере. Поэтому оказывается, что при заданной температуре $T_{\text{эфф}}$ значение

g будет ограничено снизу. При меньших значениях g сила давления излучения превосходит силу тяжести, что приводит к сдуванию вещества. В частности, Андерхилл [633] показала, что сила тяжести будет превосходить радиационные силы, только если $g \geq 65(T_{\text{эфф}}/10^4)^4 \text{ см/с}^2$. Ясно, что для Солнца ($T_{\text{эфф}} \approx 6 \cdot 10^3$, $g \approx 3 \cdot 10^4$) силой давления излучения можно пренебречь, но она становится очень существенной у О-звезд ($T_{\text{эфф}} \approx 4 \cdot 10^4$, $g \approx 10^4$) и у сверхгигантов, для которых g очень мало (и приближается к $g_{\text{крит}}$). В действительности, как будет показано в гл. 15, у некоторых О-звезд давление излучения в спектральных линиях в звездном ветре превосходит g и разгоняет вещество до очень больших скоростей ($\sim 3000 \text{ км/с}$).

Упражнение 7.1. Рассмотрим полностью ионизованное звездное вещество, состоящее из водорода и гелия (с содержанием Y). а) Показать, что величина $n_e \sigma_e / \rho$, которой дается нижняя оценка непрозрачности, равна $\sigma_e (1 + 2Y) / m_H (1 + 4Y)$. б) Воспользовавшись независимостью коэффициента электронного рассеяния от частоты, показать, что сила тяжести превосходит силу, вызываемую излучением, если выполняется условие $g \geq g_{\text{крит}}$, где $g_{\text{крит}} = \sigma_e (1 + 2Y) \sigma_R T_{\text{эфф}}^4 / c m_H (1 + 4Y)$. в) Выразив этот результат в другой форме, показать, что светимость звезды L должна быть $L \leq L_{\text{крит}} \approx 3,8 \cdot 10^4 (M / M_{\odot}) L_{\odot}$.

Для вычислительных целей (7.5) можно переписать в виде разностного уравнения, содержащего величины, вычисленные для глубин, которым соответствуют массы в столбе единичного сечения, равные m_d и m_{d+1} , а именно

$$N_d k T_d - N_{d-1} k T_{d-1} + (4\pi/c) \sum_{n=1}^N w_n (f_{dn} J_{dn} - f_{d-1,n} J_{d-1,n}) = g(m_d - m_{d-1}). \quad (7.9)$$

Здесь K_ν выражено через среднюю интенсивность и переменный эддингтоновский множитель, т.е. $K_\nu = f_\nu J_\nu$. Начальное значение можно получить из уравнения (7.8), если учесть, что градиент давления излучения выше границы атмосферы остается постоянным, и поэтому

$$N_1 k T_1 = m_1 [g - (4\pi/c) \sum_n w_n (\chi_{1,n} / \rho_1) h_n J_{1,n}]. \quad (7.10)$$

Формулы (7.5) — (7.10) справедливы независимо от того, находится ли атмосфера в ЛТР или нет.

Отметим, что если бы мы знали температурную структуру атмосферы $T(m)$ и могли бы либо а) пренебречь давлением излучения, либо б) оценить его вклад, пользуясь (7.8) и приняв его равным $(\bar{\chi}/\rho)(\sigma_R T_{\text{эфф}}^4/c)$, где $\bar{\chi}$ — соответствующий средний коэффициент поглощения, то можно было бы сразу же получить распределение плотности $N(m)$. Тогда можно было бы рассчитать $\chi_\nu^*(N, T)$, $\eta_\nu^*(N, T)$, решить уравнение переноса и тем самым определить все представляющие интерес свойства модели. Разумеется, распределение температуры, вообще говоря, неизвестно, и теперь нам надлежит обратиться к вопросу о том, как оно должно определяться.

ЛУЧИСТОЕ РАВНОВЕСИЕ: МЕТОДЫ КОРРЕКЦИИ ТЕМПЕРАТУРЫ

При заданном распределении температуры уравнение гидростатического равновесия можно проинтегрировать описанным выше способом и затем получить коэффициенты поглощения и излучения. После этого, применяя метод, описанный в гл. 6 для решения уравнения переноса при ЛТР

$$\begin{aligned} \partial^2(f_\nu J_\nu)/\partial\tau_\nu^2 &= (J_\nu - \eta_\nu^* + n_e \sigma_e J_\nu)/\chi_\nu^* = \\ &= (1 - n_e \sigma_e/\chi_\nu^*)J_\nu - (k_\nu^*/\chi_\nu^*)B_\nu, \end{aligned} \quad (7.11)$$

можно рассчитать интенсивность излучения на всех частотах и глубинах. Для атмосферы, находящейся в лучистом равновесии, полная поглощаемая веществом энергия должна равняться полной термомой им энергии. Поэтому при ЛТР

$$4\pi \int_0^\infty [\eta_\nu^* - (\chi_\nu^* - n_e \sigma_e)J_\nu] d\nu = 4\pi \int_0^\infty k_\nu^*(B_\nu - J_\nu) d\nu = 0, \quad (7.12)$$

или в дискретной форме (допуская также, что возможны отклонения от ЛТР)

$$4\pi \sum_n w_n [\eta_n - (\chi_n - n_e \sigma_e)J_n] = 0. \quad (7.13)$$

При лучистом равновесии полный поток $4\pi H = \sigma_R T_{\text{эфф}}^4 = \text{const}$, и его (или $T_{\text{эфф}}$) можно взять в качестве второго основного параметра, характеризующего модель.

Вообще говоря, то распределение температуры, которое обеспечивает лучистое равновесие, нам неизвестно. Если использовать

имеющуюся у нас *оценку* $T(m)$, мы, как правило, найдем, что поле излучения *не удовлетворяет* соотношению (7.12) или (7.13). Поэтому нужно путем итераций перестроить $T(m)$ таким образом, чтобы в конце концов поле излучения стало удовлетворять условию энергетического баланса. Определение $T(m)$ фактически и составляет самую суть проблемы построения моделей атмосфер с ЛТР. Можно выбрать одну из двух основных стратегий: а) осуществлять *коррекцию температуры* или б) искать решение уравнения переноса, *удовлетворяющее условию лучистого равновесия*. В методах, использующих коррекцию температуры, пытаются апостериорно использовать информацию о поле излучения, рассчитанном по данному $T(m)$, чтобы получить оценку такого изменения $\Delta T(m)$, которое обратило бы в нуль ошибки потока и производной потока (что эквивалентно уравнениям (7.12) и (7.13), см. формулу (2.71)). При втором подходе стараются с самого начала получить такое уравнение переноса, что описываемое им поле излучения автоматически удовлетворяет условию лучистого равновесия. Первый подход (коррекции) был использован для решения задачи о несерой атмосфере исторически первым, и соответствующие методы сконструированы зачастую весьма искусно. Второй подход («условное решение») тоньше и сильнее, он позволяет преодолеть недостатки, оказывающиеся фатальными для методов «коррекции» при отказе от предположения об ЛТР, позволяя тем самым глубоко проникнуть в область задач очень большой сложности. Как это ни неожиданно, идея отыскания «условного» решения уходит своими корнями в методы, использовавшиеся для решения серой задачи. Однако сначала рассмотрим коррекции температуры.

Первым и самым очевидным является так называемый метод *лямбда-итерации*. В нем предполагается, что по заданному распределению $T_0(m)$ фактически находится $J_\nu = \Lambda_\nu[B_\nu(T_0)]$ (откуда и название метода) и что в результате условие (7.12) *не удовлетворяется*. Допустим теперь, что зависимость $T(m)$, *действительно* удовлетворяющая условию лучистого равновесия, есть $T(m) = T_0(m) + \Delta T(m)$ и потребуем, чтобы

$$\int_0^\infty k_\nu^* B_\nu(T_0 + \Delta T) d\nu = \int_0^\infty k_\nu^* J_\nu d\nu. \quad (7.14)$$

Пользуясь разложением $B_\nu(T + \Delta T) \approx B_\nu(T_0) + \Delta T(\partial B_\nu/\partial T)$, находим

$$\Delta T \approx \int_0^\infty k_\nu^* [J_\nu - B_\nu(T_0)] d\nu / \int_0^\infty k_\nu^* (\partial B_\nu/\partial T)_{T_0} d\nu. \quad (7.15)$$

Следует подчеркнуть, что J_ν в выражении (7.15) есть значение, уже вычисленное по $B_\nu(T_0)$. Если все это проделать и после этого перевычислить модель, взяв новое распределение температуры, то обычно уравнение (7.12) будет удовлетворяться несколько лучше. Однако эта процедура страдает от ряда серьезных недостатков.

а) Так как $J_\nu = \Lambda_{\tau_\nu}[B_\nu(T_0)] = B_\nu(T_0) + O(e^{-\tau_\nu})$, то ясно, что в глубине поправка температуры быстро стремится к нулю независимо от того, насколько плохим на самом деле является решение в этой области. Аналогичный результат у нас получался для случая серой атмосферы.

б) Если изменение k_ν^* с частотой таково, что на одних частотах непрозрачность гораздо больше (скажем, на несколько порядков величины), чем на других, то и здесь метод перестает работать. Причина этого в том, что те участки спектра, где непрозрачность велика, дают в числитель вклад, который при больших τ_ν стремится к нулю, вклад же их в знаменатель оказывается гораздо больше вклада всех остальных участков. В результате на тех частотах, где коэффициент поглощения особенно велик, процедура Λ -итерации оказывается эффективной лишь до $\Delta\tau_\nu \sim 1$.

в) Уравнение (7.12) накладывает некоторое ограничение лишь на производные потока. Поэтому у нас нет никакой возможности определить то действительное значение потока, к которому решение сходится (если оно сходится).

г) Главный порок процедуры Λ -итерации состоит в том, что в ней *игнорируется* то влияние, которое величина ΔT , найденная для некоторой глубины τ , оказывает на $J_\nu(\tau')$ на всех других глубинах (т.е. J_ν заранее принимается *фиксированным*). Это с неизбежностью приводит к ложным значениям ΔT . В действительности $J_\nu(\tau'_\nu) = \Delta_{\tau'_\nu}[B_\nu(T + \Delta T)]$. Это означает, что на самом деле следует решать *интегральное уравнение* для ΔT . Ниже мы еще вернемся к этому вопросу.

Когда причины того, почему Λ -итерация не годится, были осознаны, стало ясно, что нужно иметь такие методы, в которых использовалась бы информация об ошибках как самого потока (который дает прямую информацию о градиенте температуры в глубоких слоях), так и его производной. Один такой метод был предложен Люси [283], стр. 93. Он обобщил на несерый случай метод, введенный Унзольдом для серой атмосферы (см. § 3.3). Если используется шкала оптических глубин, основанная на планковском среднем [формула (3.23)], так что $d\tau = -k_p^* dz$, то точные моментные уравнения, проинтегрированные по частотам, имеют вид (величины без индекса ν обозначают функции, проинтегрированные по

частоте)

$$dH/d\tau = (k_j^*/k_p^*)J - B \quad (7.16)$$

и

$$dK/d\tau = (\chi_F^*/k_p^*)H, \quad (7.17)$$

где k_j^* — прямое среднее [формула (3.32)] и χ_F^* — потоковое среднее [формула (3.21)]. Заметим, что в χ_F^* вклад рассеяния учитывается, а в других средних коэффициентах поглощения — нет. Выразив далее K через J в приближении Эддингтона и скомбинировав уравнения (7.16) и (7.17), можно получить выражение для $B(\tau)$. Наконец, из него методом возмущений можно найти уравнение для поправки $\Delta B(T) = 4\sigma_R T^3 \Delta T/\pi$:

$$\Delta B(T) = -d(\Delta H)/d\tau + (k_j^*/k_p^*)[3 \int_0^\tau (\chi_F^*/k_p^*)\Delta H(\tau')d\tau' + 2\Delta H(0)]. \quad (7.18)$$

Здесь $\Delta H(\tau) = H - H(\tau)$. Первый член в правой части (7.18) есть поправка, даваемая процедурой Λ -итерации. Остальные члены содержат ту новую информацию, за счет которой ΔB в глубоких слоях оказывается не пренебрежимо малым и ошибки в величине потока на поверхности вызывают отклик на всех глубинах. Опыт показал, что метод Унзоляда — Люси весьма эффективен при построении ЛТР-моделей с лучистым равновесием (однако очевидно-го обобщения на случай, когда ЛТР не предполагается, у него нет).

Упражнение 7.2. Получить уравнения (7.16) и (7.17) и, применяя аргументацию, аналогичную той, которая использовалась при получении выражения (3.44), вывести соотношение (7.18).

Другой очень тонкий и удобный метод вычисления поправок температуры был предложен Эвреттом и Круком [55], которые вводят в рассмотрение возмущения как температуры, так и шкалы оптических глубин. Это означает, что текущее распределение температуры $T_0(t)$ считается связанным с искомым распределением температуры $T(\tau)$ (обеспечивающим лучистое равновесие) с помощью двух соотношений: $T = T_0 + T_1$ и $\tau = t + \tau_1$. Далее уравнение переноса разлагается с точностью до членов первого порядка относительно возмущений τ_1 и T_1 . Затем из найденного таким путем уравнения первого порядка для возмущений получаются моментные уравнения, что дает уравнения для τ_1 и T_1 . Эти уравнения

(обобщенные таким образом, чтобы в них учитывались члены, описывающие рассеяние [421], и полученные с использованием улучшенного условия замыкания [351]) имеют вид

$$\begin{aligned} \tau_1' + \tau_1 \left(\int_0^\infty \chi_\nu' H_\nu^0 d\nu / \int_0^\infty \chi_\nu H_\nu^0 d\nu \right) = \\ = (1 - \mathcal{H}/H_0) + 3^{-1/2} \int_0^\infty \chi_\nu [J_\nu^0 - B_\nu(T_0)] d\nu / \int_0^\infty \chi_\nu H_\nu^0 d\nu \quad (7.19) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} T_1 = \{ (1 + \tau_1) \int_0^\infty \chi_\nu (1 - \rho_\nu) [J_\nu^0 - B_\nu(T_0)] d\nu - 3^{1/2} (1 - \mathcal{H}/H_0) \times \\ \times \int_0^\infty \chi_\nu (1 - \rho_\nu) H_\nu^0 d\nu + \tau_1' \int_0^\infty [\chi_\nu' (1 - \rho_\nu) - \chi_\nu \rho_\nu'] [J_\nu^0 - \\ - B_\nu(T_0)] d\nu \} / \int_0^\infty \chi_\nu (1 - \rho_\nu) (\partial B_\nu / \partial T)_0 d\nu, \quad (7.20) \end{aligned}$$

где штрих означает производную по t . Величины, снабженные верхним или нижним индексом нуль, означают текущие значения, $H^0 =$

$= \int_0^\infty H_\nu^0 d\nu$, через \mathcal{H} обозначен номинальный поток $\sigma T_{\text{эфф}}^4 / 4\pi$ и

$\rho_\nu = \sigma_\nu / \chi_\nu = \sigma_\nu / (k_\nu + \sigma_\nu)$. Уравнение (7.19) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно τ_1 , которое можно проинтегрировать шаг за шагом, начиная от $\tau_1(0) = 0$. Имея значения τ_1 и τ_1' , из уравнения (7.20) можно затем рассчитать T_1 и таким образом получить $T(\tau) = T_0(t) + T_1(t)$ при $\tau = t + \tau_1(t)$. Опыт показывает, что поправка τ_1 приводит к изменению температурной шкалы в глубоких слоях, тогда как влияние T_1 больше всего сказывается близ поверхности.

Методы Унзольда — Люси и Эвретта — Крука получили широкое применение и оказались очень удобными при построении моделей с лучистым равновесием и ЛТР. Если вычисления проводятся с высокой точностью, то эти методы дают модели, имеющие ошибки $|\Delta F/F|$ и $|d \ln F/d\tau|$ порядка 0,1%. Однако несмотря на то, что использование этих методов коррекции температуры не вызывает затруднений и они хорошо работают, у них имеется и ряд

серьезных недостатков, из-за которых в тех случаях, когда ЛТР заранее не предполагается, эти методы становятся неэффективными. Мы сейчас кратко опишем эти недостатки, что позволит понять мотивы, которыми мы будем руководствоваться при обсуждении методов, основанных на отыскании условных решений. Хотя эти методы первоначально были развиты для рассмотрения тех случаев, когда ЛТР заранее не предполагается, они чрезвычайно эффективны также и для расчета моделей с ЛТР, и в настоящее время предпочтение отдают именно им.

Во-первых, когда непрозрачность сильно изменяется с частотой, методы коррекции температуры имеют тенденцию к стабилизации поправок, а не к сходимости. Этот недостаток особенно серьезен, когда мы пытаемся построить модели, учитывающие наличие спектральных линий или большого скачка в континууме (например, лаймановского скачка, обусловленного водородом). В этих случаях процедуры коррекции температуры оставляют температурную структуру самых наружных слоев практически неизменной, поскольку температурный режим в этих слоях целиком определяется интенсивностью излучения на тех частотах, где непрозрачность велика (в оптически прозрачных областях поле излучения является уже практически установившимся). Во-вторых, в этих методах молчаливо предполагается, что основной переменной является температура, и поэтому они не могут быть эффективными в тех случаях, когда связь поля излучения с локальным тепловым ансамблем слабая, например в тех атмосферах, где доминирует рассеяние или где образование линий происходит не обязательно в условиях ЛТР (почему это так, будет показано в § 7.5 и в гл. 11 и 12). Наконец, эти методы не являются достаточно точными. Хотя ошибки в десятую долю процента и кажутся малыми, следует иметь в виду, что между условиями лучистого равновесия и статистического равновесия существует большое сходство. Ошибки такой величины для уравнений статистического равновесия могут быть совершенно неприемлемыми. В частности, предположим, что рассматривается континуум основного состояния, поглощение в котором превосходит поглощение за счет других источников непрозрачности на несколько порядков величины. Тогда условие энергетического равновесия требует,

чтобы
$$\int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_{\nu}^{\downarrow} J_{\nu} d\nu = \int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_{\nu}^{\uparrow} B_{\nu} d\nu,$$
 а несбалансированное число

радиативных переходов, входящее в уравнение статистического равновесия, имеет вид
$$\int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_{\nu}^{\downarrow} [b_1 J_{\nu} - B_{\nu}] \nu^{-1} d\nu,$$
 где через b_1 обозна-

чено отношение n_1/n_1^* для основного состояния. Если $b_1 \approx 1$, эти два условия отличаются лишь довольно медленно меняющимся функциональным множителем ν^{-1} . В предельном случае, когда $h\nu_0/kT \gg 1$ и у B_ν и J_ν характерная зависимость от частоты имеет вид $\exp(-h\nu/kT)$, значение обеих пар интегралов в основном определяется вкладом от $\nu \approx \nu_0$, и поэтому одно из этих условий становится практически следствием другого. Поэтому ошибка в несколько десятых процента в энергетическом балансе означает примерно такую же ошибку в числе несбалансированных радиативных переходов. Но скорости радиативных процессов могут превосходить скорости ударных процессов на несколько порядков (см. обсуждение этого в § 5.3). Поэтому эти ошибки могут оказаться по величине гораздо больше всех других членов в уравнении стационарности, что приведет к ложному равновесному решению.

Обратимся теперь к обсуждению тех методов, в которых лучистое равновесие рассматривается как дополнительное условие, накладываемое на искомое решение уравнения переноса. Эти методы свободны от всех описанных выше недостатков.

Суть такого подхода состоит в том, что *требование лучистого равновесия вводится непосредственно в уравнение переноса*, так что оба уравнения — и лучистого равновесия, и переноса — решаются *совместно*. В этих методах глобальный характер поля излучения проявляется непосредственно. Иначе говоря, в них учитывается то влияние, которое изменение температуры в одной точке атмосферы оказывает на поле излучения в других точках, и наоборот. Для упрощения изложения в остальной части этого раздела членами, описывающими рассеяние в выражении для функции источников, будем пренебрегать. Одна такая процедура была указана Э. Бём-Витензе [283], стр. 99, которая предложила непосредственно решать интегральное уравнение для ΔT :

$$\int_0^\infty k_\nu^* B_\nu(T + \Delta T) d\nu = \int_0^\infty k_\nu^* \Lambda_{\tau_\nu} [B_\nu(T + \Delta T)] d\nu. \quad (7.21)$$

Мы приведем ее рассуждения в слегка видоизмененном виде, используя принятые нами обозначения (см. также [32]). Чтобы решить интегральное уравнение такого вида, прежде всего построим матричное представление оператора Λ . Введем дискретный набор точек $\{\tau_{\nu,d}\}$, $d = 1, \dots, D$, в которых мы хотим найти решение, и представим изменение $B_\nu(\tau_\nu)$ на этой сетке *аналитически* с помощью интерполяционных (базисных) функций. Для этих базисных

функций интеграл

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_0^\infty E_1(|t_\nu - \tau_\nu|) B_\nu(t_\nu) dt_\nu \quad (7.22)$$

можно вычислить *аналитически*, что приводит к системе

$$J_{d,\nu} = \sum_{d'=1}^D \Lambda_{dd';\nu} B_{d',\nu} + M_{d,\nu}, \quad d = 1, \dots, D, \quad (7.23)$$

в которой $M_{d,\nu}$ описывает вклад в интеграл, даваемый промежутком $(\tau_{D,\nu}, \infty)$. Подставляя выражение (7.23) в (7.21) и а) принимая, что k_ν^* не зависит от ΔT , б) полагая $B_\nu(T + \Delta T) \approx B_\nu(T) + (\partial B_\nu / \partial T) \Delta T$ и в) вводя квадратуру по частоте с узлами $\{\nu_n\}$, $n = 1, \dots, N$, получаем систему линейных уравнений для величин $\Delta T_{d'}$:

$$\begin{aligned} \sum_{d'=1}^D \left[\sum_{n=1}^N w_n k_{d'n}^* (\partial B / \partial T)_{d'n} (\delta_{dd'} - \Lambda_{dd'n}) \right] \Delta T_{d'} = \\ = \sum_{n=1}^N w_n k_{dn}^* [M_{dn} + \sum_{d'=1}^D (\Lambda_{dd'n} - \delta_{dd'}) B_{d'n}], \quad d = 1, \dots, D. \quad (7.24) \end{aligned}$$

Упражнение 7.3. Проверить формулу (7.24).

Решение этой системы дает такое изменение температуры, которым полностью учитывается глобальный характер поля излучения. Поскольку мы пользуемся лишь линейным разложением B_ν , следует применить последовательные приближения, добившись достижения сходимости, т.е. взять новые значения температуры и с ними перевычислить B_ν , $\partial B_\nu / \partial T$, k_ν^* и т.д., заново решить систему и т.д. Если предположение а) выполняется, то можно ожидать квадратичной сходимости. У этого подхода есть ряд недостатков. 1) Расчет матрицы Λ громоздкий и дорогой, а поскольку k_ν^* является функцией T , то для каждой итерации его нужно выполнять заново. 2) Можно рассчитать реакцию матрицы Λ на изменения τ_ν (обусловленные изменениями k_ν^* с температурой), но это тоже требует чрезвычайно громоздких расчетов и очень дорого (кроме того, здесь возникают и проблемы устойчивости) (см., например, [347], [575]). Метод, описываемый в последнем разделе этого параграфа, позволяет преодолеть эти трудности. 3) Как в своей первоначальной

формулировке, так и в той форме, в которой он здесь описывался, этот метод не гарантирует сходимости к заранее заданному значению потока. Этого можно добиться, используя на нижней границе диффузионное приближение, если потребовать, чтобы переносимый поток имел правильное значение [32]. Положим при $\tau_\nu > \tau_{D,\nu}$

$$B_\nu(\tau_\nu) \approx B_\nu(T_D) + \frac{1}{k_\nu^*} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \left| \frac{dT}{dz} \right| (\tau_\nu - \tau_{D,\nu}), \quad (7.25)$$

$$I(\tau_\nu, \mu) \approx B_\nu(T_D) + \frac{\mu}{k_\nu^*} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \left| \frac{dT}{dz} \right|. \quad (7.26)$$

Интегрируя по μ и по частотам, находим

$$H = \frac{1}{3} \left(\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu^*} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu \right) \left| \frac{dT}{dz} \right|, \quad (7.27)$$

чем фиксируется величина dT/dz в выражении (7.25) и значение потока появляется в величинах $M_{d,\nu}$. Обращаем внимание на сходство этого приема с использованным в случае серой атмосферы.

Упражнение 7.4. а) Вычислить элементы Λ_{dd} матрицы Λ , приняв для $B_\nu(\tau_\nu)$ кусочно-линейную аппроксимацию на некоторой дискретной сетке, т.е. полагая, что на $[\tau_d, \tau_{d+1}]$

$$B(\tau) = [B_d(\tau_{d+1} - \tau) + B_{d+1}(\tau - \tau_d)] / (\tau_{d+1} - \tau_d).$$

б) Пользуясь формулами (7.25) и (7.27), получить выражение для M_d .

Упражнение 7.5. Составить программу решения на ЭВМ уравнения (7.24) при коэффициенте поглощения, имеющем вид ступенчатой функции: $k_\nu = k_0$ при $\nu \leq \nu_0$ и $k_\nu = \alpha k_0$ при $\nu > \nu_0$. Перейти к безразмерным переменным, введя параметр $\beta = h\nu_0/kT_{эфф}$, определяющий частоту скачка непрозрачности. Обращаем внимание на то, что матрица Λ и вектор M в областях $\nu \leq \nu_0$ и $\nu > \nu_0$ не зависят от частоты (хотя и различны). Поэтому интегралы от B_ν и $\partial B_\nu/\partial T$ по частотам можно найти аналитически, выразив их либо через элементарные функции (пользуясь известным результатом для промежутка $(0, \infty)$ и соответствующими разложениями для $(0, \nu_0)$, если $\beta \ll 1$, или для (ν_0, ∞) , если $\beta \gg 1$), либо через интегралы Дебая [4], стр. 998. Решить задачу для нескольких значений α и β , взяв в качестве начального распределения температуры серое при-

лижение (в шкале росселандовых оптических глубин). Сравнить полученные результаты с теми, которые даются в [128], [605], [38].

Другой метод получения решения уравнения переноса, удовлетворяющего дополнительному условию (условное решение), был предложен Фотрие [283], стр. 108; [210]. Заметив, что лучистое равновесие влечет соотношение

$$\sum_n w_n k_{dn}^* J_{dn} / \sum_n w_n k_{dn}^* B_{dn} = 1, \quad (7.28)$$

выполняющееся на всех глубинах d , он решает уравнение переноса (6.30) или (6.42) с функцией источников

$$S_{dn} = B_{dn} \left(\sum_{n'} w_{n'} k_{dn'}^* J_{dn'} / \sum_{n'} w_{n'} k_{dn'}^* B_{dn'} \right), \quad (7.29)$$

где величины J рассматриваются как неизвестные. Обращаем внимание на идейное сходство этого подхода с тем, который используется для решения задачи о серой атмосфере. В противоположность описанному выше методу, в котором применяется интегральный оператор переноса, метод Фотрие очень легко формулируется и оказывается удобным для получения решения при использовании описанных в гл. 6 методов, опирающихся на разностные уравнения. В этом методе интеграл в формуле (6.24), описывающий «рассеяние», теперь распространен на весь частотный спектр. Таким образом, явно выражается тот физически важный факт, что поле излучения на любой частоте на самом деле зависит от интенсивностей на всех частотах. Пользуясь текущими значениями B_ν и k_ν^* , уравнение (7.29) и дискретизированную форму уравнения (6.42) разрешают относительно J_ν на всех глубинах. Эти значения используются затем в уравнении (7.28), из которого находится новое распределение температуры, удовлетворяющее этому уравнению (путем линеаризации по ΔT , вообще говоря, как B_ν , так и k_ν^* ; с последующей итерацией). Так как коэффициенты поглощения и т.п. из-за изменений в T также будут изменяться, то весь этот процесс должен повторяться до достижения сходимости.

В первоначальном варианте своего метода Фотрие в явном виде не вводил в задачу заданный поток. Это, однако, легко сделать, воспользовавшись формулой (7.27), чтобы фиксировать величину $|dT/dz|$, входящую во внутреннее граничное условие [формула (6.44)]. Если для решения системы пользоваться методом Фотрие, то процедура оказывается дорогостоящей, так как число частот N должно быть большим (от углов можно избавиться, введя перемен-

ные эддингтоновские множители). Если лучистое равновесие — это *единственное* дополнительное условие, налагаемое на решение, то выгоднее пользоваться методом Райбики, взяв в качестве \bar{J} величину, стоящую в (7.28) в числителе. Равенство, выражающее это определение, заменяет здесь (6.48). Фотриэ применил свой метод (и с хорошими результатами) к расчету моделей, предназначенных для описания континуума, как тех, в которых принимается ЛТР, так и тех, где ЛТР не предполагается. Главный недостаток этого метода состоит в том, что неясно, как его обобщать, поскольку в нем все внимание сконцентрировано на коррекции температуры (чего в общем случае недостаточно).

Упражнение 7.6. Используя ЭВМ, применить только что описанный метод а) для получения функции $q(\tau)$ для серой модели; начать с $q(\tau) = c$ и испытать несколько значений c ; и б) для расчета модели с непрозрачностью, меняющейся скачком, см. упражнение 7.5 (см. также [128], [605], [38]). При решении задачи а) интеграл по частоте следует вычислять по квадратурной формуле (точным результатом не пользоваться — это сделало бы задачу тривиальной), а окончательную систему уравнений решать методом Райбики.

Другой метод, в котором также используется сведение уравнения переноса к разностным уравнениям второго порядка, был предложен Ауэром и Михаласом [38]. Этот метод очень легко обобщается на весьма сложные задачи и составляет основу методов, описываемых в последнем разделе этого параграфа и в § 7.5 (для задач, в которых ЛТР не предполагается). Если бы $T^*(m)$ было в точности тем распределением температуры в атмосфере, которое обеспечивает лучистое равновесие, а B_ν^* есть соответствующая ему функция Планка, то решение уравнения переноса

$$\partial^2(f_\nu J_\nu)/\partial\tau_\nu^2 = J_\nu - B_\nu^*, \quad (7.30)$$

удовлетворяющее в глубоких слоях условию

$$\frac{\partial(f_\nu J_\nu)}{\partial\tau_\nu} = \left(\frac{H}{k_\nu^*} \frac{\partial B_\nu^*}{\partial T} \right) / \int_0^\infty \frac{1}{k_\nu^*} \frac{\partial B_\nu^*}{\partial T} d\nu, \quad (7.31)$$

автоматически удовлетворяло бы и условию лучистого равновесия

$$\sum_n w_n k_{dn}^* J_{dn} = \sum_n w_n k_{dn}^* B_{dn}^*. \quad (7.32)$$

На самом деле $T^*(m)$ мы не знаем, есть лишь текущая аппроксимация $T(m)$. Полагаем поэтому $T^*(m) = T(m) + \Delta T(m)$ и, пренебрегая изменениями k_v^* , используем в (7.30) и (7.31) разложения $B_v^* = B_v(T) + (\partial B_v / \partial T) \Delta T$ и $\partial B_v^* / \partial T = \partial B_v / \partial T + (\partial^2 B_v / \partial T^2) \Delta T$, где ΔT должно быть таким, чтобы

$$\Delta T_d = \sum_n w_n k_{dn}^* (J_{dn} - B_{dn}) / \sum_n w_n k_{dn}^* (\partial B_n / \partial T)_d. \quad (7.33)$$

Дальше можно пойти двумя путями. Можно подставить в (7.30) и (7.31) указанные только что разложения, исключить ΔT , пользуясь (7.33), и решать систему

$$\frac{\partial^2 (f_v J_{dn})}{\partial \tau_v^2} = J_{dn} - B_{dn} - \left(\frac{\partial B_v}{\partial T} \right)_d \times \\ \times \frac{\sum_{n'} w_{n'} k_{dn'}^* (J_{dn'} - B_{dn'})}{\sum_{n'} w_{n'} k_{dn'}^* (\partial B_{n'} / \partial T)_d} \quad (7.34)$$

при соответствующем граничном условии, рассматривая $J_{dn'}$ как неизвестные.

Упражнение 7.7. Написать граничное условие, учитывающее возмущение, в такой форме, из которой исключено ΔT .

Уравнение (7.34) очень напоминает систему Фотрие (6.42) + (7.29). Здесь также имеется суммирование по всем частотам. Все ранее сделанные в отношении метода Фотрие замечания, касающиеся физического смысла уравнений, применимы и в данном случае. Решение (7.34) одновременно удовлетворяет и уравнению переноса, и условию лучистого равновесия (с точностью до членов первого порядка). После того как найдены новые интенсивности, с помощью уравнения (7.33) рассчитывается новое распределение температуры. Если мы хотим найти лишь ΔT , эффективнее пользоваться методом Райбики. При этом в качестве той переменной, которая заменяет J в дополнительном условии, следует взять ΔT , а вместо (6.48) использовать соотношение (7.33) (это тот подход, который используется для атмосфер с ЛТР).

Как метод Фотрие отыскания условного решения, так и метод линеаризации эквивалентны прямому решению интегрального уравнения (7.21), но при практической реализации они проще использования уравнения (7.24). Хотя в методе линеаризации локальное воз-

мушение ΔT и вводится, сведения о средней интенсивности не используются до тех пор, пока система не решена. Это обеспечивает глобальную сходимость (но вовсе не есть Λ -итерация). Кроме того, этот метод не боится больших вариаций непрозрачности, так как они влияют лишь на коэффициенты линейных алгебраических уравнений, и, если не говорить о том, с какой точностью можно найти решение этих уравнений, мы непосредственно получаем правильное решение.

Упражнение 7.8. Повторить упражнение 7.6, пользуясь методом линеаризации. Как и ранее, проверить результаты по указанным в упражнении 7.6 литературным данным. Для решения системы использовать метод Райбки.

МЕТОД ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Соберем теперь воедино различные моменты приведенного выше обсуждения и обрисуем в общих чертах один хорошо работающий метод построения моделей с ЛТР, который, как показывает опыт, является общим, устойчивым и эффективным [35], [275]. Основная идея метода состоит в том, что система уравнений переноса в сочетании с дополнительными условиями, выражающими гидростатическое и лучистое равновесие, записывается через *текущее* решение (которое удовлетворяет дополнительным условиям лишь приближенно) и *возмущения* основных переменных (T , N). Если возмущения найдены, это позволяет добиться более точного соблюдения дополнительных условий. В каждом уравнении учитываются изменения, вызываемые этими возмущениями у всех переменных, и то, как эти изменения в разных точках атмосферы взаимосвязаны между собой.

Для начала нужно иметь некоторое исходное приближение, описывающее структуру атмосферы. Примем распределение температуры в шкале росселандовых средних оптических глубин $\bar{\tau}_R$ вида $T^4(\bar{\tau}_R) = \frac{3}{4} T_{\text{эфф}}^4 [\bar{\tau}_R + q(\bar{\tau}_R)]$. Как мы знаем, в глубоких слоях оно дает асимптотически точный результат. Здесь $q(\tau)$ может соответствовать серому случаю или быть какой-нибудь другой функцией, отличающейся от «серой», особенно близ поверхности. Ее выбор определяется предшествующим опытом. После этого уравнение гидростатики (7.8), записанное в приближенной форме:

$$dp_g/dm = g - (\sigma_R T_{\text{эфф}}^4/c)\bar{\chi}_R/\rho, \quad (7.35)$$

интегрируется совместно с уравнением

$$d\bar{\tau}_R = (\bar{\chi}_R/\rho)dm, \quad (7.36)$$

вытекающим из определения шкалы оптических глубин. Интегрирование выполняется шаг за шагом, с использованием узлов $\{m_d\}$, $d = 1, \dots, D$. Это дает значения (N_d, T_d) в каждом из узлов. Пользуясь методом, описанным в §5.2, из уравнения состояния находим n_e и $n_i^*(N, T)$ для всех уровней атомов и ионов. Затем по формулам (7.3) и (7.4) в узлах $\{\nu_n\}$ рассчитываем χ_{dn}^* и η_{dn}^* и вычисляем средние интенсивности J_{dn} и эддингтоновские множители f_{dn} , исходя из формального решения уравнения переноса (6.30) с заданной функцией источников S_{dn} .

Это начальное решение дает достаточно информации, чтобы можно было рассчитать градиент светового давления, входящий в уравнения (7.9) и (7.10), которые поэтому становится возможным проинтегрировать, что дает улучшенную оценку зависимости полной концентрации N_d от глубины и новые значения ЛТР-населенностей n_i^* . Далее, имея переменные эддингтоновские множители, можно решить уравнения (6.42) — (6.44), представляющие собой уравнение переноса в дискретной форме. С учетом (7.27) их можно переписать так:

$$(f_{2n}J_{2n} - f_{1n}J_{1n})/\Delta\tau_{3/2, n} = h_n J_{1n}, \quad (7.37a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{f_{d-1, n}J_{d-1, n}}{\Delta\tau_{d-1/2, n}\Delta\tau_{dn}} - \frac{f_{dn}}{\Delta\tau_{dn}} \left(\frac{1}{\Delta\tau_{d-1/2, n}} + \frac{1}{\Delta\tau_{d+1/2, n}} \right) J_{dn} + \\ & + \frac{f_{d+1, n}J_{d+1, n}}{\Delta\tau_{d+1/2, n}\Delta\tau_{dn}} = \left(1 - \frac{n_{e, d}\sigma_e}{\chi_{dn}} \right) J_{dn} - \frac{\eta_{dn}}{\chi_{dn}}, \quad d = 2, \dots, D-1, \end{aligned} \quad (7.37b)$$

и (при $d = D$)

$$\begin{aligned} & (f_{Dn}J_{Dn} - f_{D-1, n}J_{D-1, n})/\Delta\tau_{d-1/2, n} = \\ & = H\chi_{dn}^{-1}(\partial B_\nu/\partial T)_{Dn} / \sum_n w_n [\chi_{Dn}^{-1}(\partial B_\nu/\partial T)_{Dn}], \end{aligned} \quad (7.37b)$$

где

$$\Delta\tau_{d \pm 1/2, n} = \frac{1}{2} [\chi_{d \pm 1, n}/\rho_{d \pm 1} + \chi_{dn}/\rho_{dn}] \times |m_{d \pm 1} - m_d|, \quad (7.38a)$$

$$\Delta\tau_{dn} = \frac{1}{2} (\Delta\tau_{d-1/2, n} + \Delta\tau_{d+1/2, n}). \quad (7.38b)$$

Граничные условия записаны с точностью до членов первого порядка лишь для простоты. Легко учесть и члены второго порядка.

Если бы мы решили уравнения (7.37), то обнаружили бы, что условие лучистого равновесия, выражаемое формулой (7.13), не удовлетворяется. Поэтому нужно таким образом изменить температуру $T(m)$, чтобы условие лучистого равновесия стало выполняться точнее, и осуществить затем итерации. Имеются две трудности: а) задача является *нелинейной* и б) взаимосвязь *глобальна*. Это означает, что любое изменение δT_d вызывает (в силу условия гидростатического равновесия) изменение δN_d , а следовательно, и $\delta \chi_d$, $\delta \eta_d$ и тем самым $\delta J_{d'n}$ *при всех d' и n , т. е. повсюду в атмосфере*. Чтобы преодолеть эти трудности, *линеаризуем* уравнения, заменив каждую из переменных x на $x_0 + \delta x$ и удержав лишь члены первого порядка по всем δ . Сила этого метода состоит в том, что а) его можно применять при весьма различных дополнительных условиях, наложенных на решение, и б) он приводит к системам, которые учитывают влияние, оказываемое изменением какой-либо переменной в некоторой заданной точке атмосферы на все другие переменные во всех других точках. В частности, линеаризованные уравнения переноса полностью описывают, каким образом распространяется влияние изменения свойств вещества или поля излучения в произвольной точке и как оно сказывается на решении в любой другой точке. Линеаризованные уравнения переноса, записанные для различных значений частоты, можно использовать для последовательного исключения величин δJ из уравнений, выражающих дополнительные условия (лучистого и гидростатического равновесия), что приводит в итоге к системе уравнений для возмущений «основных» переменных δN и δT . Таким образом, линеаризуя уравнение переноса (в предположении, что эддингтоновские множители не изменяются), вдали от границ для каждой из частот ν_n имеем

$$\begin{aligned} \frac{f_{d-1,n} \delta J_{d-1,n}}{\Delta \tau_{d-1/2,n} \Delta \tau_{dn}} - \left[\frac{f_{dn}}{\Delta \tau_{dn}} \left(\frac{1}{\Delta \tau_{d-1/2,n}} + \frac{1}{\Delta \tau_{d+1/2,n}} \right) + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{n_{e,d} \sigma_e}{\chi_{dn}} \right) \right] \delta J_{dn} + \frac{f_{d+1,n} \delta J_{d+1,n}}{\Delta \tau_{d+1/2,n} \Delta \tau_{dn}} + \\ + a_{dn} \delta \omega_{d-1,n} + b_{dn} \delta \omega_{dn} + c_{dn} \delta \omega_{d+1,n} - (\eta_{dn} + n_{e,d} \sigma_e J_d) \times \\ \times \frac{\delta \chi_{dn}}{\chi_{dn}^2} + \frac{\delta \eta_{dn}}{\chi_{dn}} + \frac{\sigma_e J_{dn}}{\chi_{dn}} \delta n_{e,d} = \\ = \beta_{dn} + (J_{dn} - n_{e,d} \sigma_e J_{dn} + \eta_{dn}) / \chi_{dn}, \quad (7.39) \end{aligned}$$

где

$$\alpha_{dn} = (f_{dn}J_{dn} - f_{d-1,n}J_{d-1,n})/(\Delta\tau_{d-1/2,n}\Delta\tau_{dn}), \quad (7.40)$$

$$\gamma_{dn} = (f_{dn}J_{dn} - f_{d+1,n}J_{d+1,n})/(\Delta\tau_{d+1/2,n}\Delta\tau_{dn}), \quad (7.41)$$

$$\beta_{dn} = \alpha_{dn} + \gamma_{dn}, \quad (7.42)$$

$$a_{dn} = [\alpha_{dn} + \frac{1}{2}\beta_{dn}(\Delta\tau_{d-1/2,n}/\Delta\tau_{dn})]/(\omega_{d-1,n} + \omega_{dn}), \quad (7.43)$$

$$c_{dn} = [\gamma_{dn} + \frac{1}{2}\beta_{dn}(\Delta\tau_{d+1/2,n}/\Delta\tau_{dn})]/(\omega_{dn} + \omega_{d+1,n}), \quad (7.44)$$

$$b_{dn} = a_{dn} + c_{dn}, \quad (7.45)$$

$$\omega_{dn} = \chi_{dn}/\rho_d. \quad (7.46)$$

Отметим, что формулы (7.39) — (7.46) применимы как при ЛТР, так и тогда, когда наличие ЛТР заранее не предполагается.

Упражнение 7.9. а) Вывести уравнение (7.39). б) Вывести линеаризованную форму граничных условий на поверхности и в глубине [формулы (7.37а) и (7.37в)]. См. также [437].

Если принять ЛТР, то в уравнении (7.39) вариации всех величин, описывающих состояние вещества, выражаются через δN и δT . Так, из формул (7.6) и (7.3) имеем

$$\delta\rho_d = \bar{m}(\delta N_d - \delta n_{e,d}), \quad (7.47)$$

$$\delta\chi_{dn}^* = (\partial\chi_n^*/\partial T)_d\delta T_d + (\partial\chi_n^*/\partial n_e)_d\delta n_{e,d} + \sum_i (\partial\chi_n^*/\partial n_i^*)_d\delta n_{i,d}^*. \quad (7.48)$$

Аналогичный вид имеет и выражение для $\delta\eta_{dn}^*$. В формуле (7.48) оператор $\partial/\partial T$ действует лишь на T , которое входит явно в $\exp(-h\nu/kT)$, $\alpha_{kk}(\nu, T)$ и т.п.; то же относится и к $\partial/\partial n_e$. Заметим далее, что из формулы (5.35) получаются выражения вида

$$\delta n_{i,d}^* = (\partial n_i^*/\partial T)_N|_d\delta T_d + (\partial n_i^*/\partial N)_T|_d\delta N_d \quad (7.49)$$

и аналогично для $\delta n_{e,d}$, так что линеаризованные представления ρ_d , χ_{dn}^* и η_{dn}^* можно свести к выражениям типа

$$\delta\chi_{dn}^* = (\partial\chi_n^*/\partial T)_N|_d\delta T_d + (\partial\chi_n^*/\partial N)_T|_d\delta N_d. \quad (7.50)$$

Конечный результат состоит в том, что (7.39) приводится к формуле, содержащей возмущения в трех соседних точках ($d-1$, d ,

$d + 1$), которая имеет следующий вид:

$$\sum_{d=d-1}^{d-1} T_{dd',n} \delta J_{d',n} + \sum_{d=d-1}^{d+1} U_{dd',n} \delta N_{d'} + \sum_{d'=d-1}^{d+1} V_{dd',n} \delta T_{d'} = K_d. \quad (7.51)$$

Аналогично линеаризованная форма условия лучистого равновесия (уравнение (7.13)) имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_n w_n (\chi_{dn} - n_{e,d} \sigma_e) \delta J_{dn} + \sum_n w_n (J_{dn} \delta \chi_{dn} - \delta \eta_{dn} - \sigma_e J_{dn} \delta n_{e,d}) = \\ = \sum_n w_n [\eta_{dn} - (\chi_{dn} - n_{e,d} \sigma_e) J_{dn}], \quad (7.52) \end{aligned}$$

а условие гидростатического равновесия (уравнение (7.9)) дает

$$\begin{aligned} (4\pi/c) \sum_n w_n (f_{dn} \delta J_{dn} - f_{d-1,n} \delta J_{d-1,n}) + \\ + k(T_d \delta N_d + N_d \delta T_d - T_{d-1} \delta N_{d-1} - N_{d-1} \delta T_{d-1}) = \\ = g(m_d - m_{d-1}) - N_d k T_d + N_{d-1} k T_{d-1} - \\ - (4\pi/c) \sum_n w_n (f_{dn} J_{dn} - f_{d-1,n} J_{d-1,n}). \quad (7.53) \end{aligned}$$

В (7.52) $\delta \chi$ и $\delta \eta$ заменяются выражениями вида (7.50). Уравнение (7.52) содержит сведения о физических условиях лишь в одной точке (по глубине), а (7.53) — в двух таких точках.

Упражнение 7.10. а) Проверить формулы (7.52) и (7.53). б) Линеаризовать граничное условие к уравнению гидростатического равновесия, задаваемое на наружной поверхности.

Полная система уравнений, записанная для всех глубин и всех частот, может быть приведена к такой форме, что для ее решения становится возможным использовать метод Райбки. Положим

$$\delta \mathbf{J}_n = (\delta J_{1n}, \delta J_{2n}, \dots, \delta J_{Dn})^T, \quad n = 1, \dots, N, \quad (7.54)$$

$$\delta \mathbf{T} = (\delta T_1, \delta T_2, \dots, \delta T_D)^T, \quad (7.55)$$

$$\delta \mathbf{N} = (\delta N_1, \delta N_2, \dots, \delta N_D)^T. \quad (7.56)$$

Тогда уравнения (7.39), (7.52) и (7.53) дают

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 & \dots & 0 & U_1 & V_1 \\ 0 & T_2 & & \cdot & U_2 & V_2 \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & & \dots & T_N & U_N & V_N \\ W_1 & W_2 & \dots & W_N & A & B \\ X_1 & X_2 & \dots & X_N & C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta J_1 \\ \delta J_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta J_N \\ \delta N \\ \delta T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ K_N \\ L \\ M \end{pmatrix} \quad (7.57)$$

Каждый «элемент» в уравнении (7.57) — это квадратная матрица размерности D . Первые N «строк» — это уравнения переноса, предпоследняя «строка» — условие лучистого равновесия, последняя — гидростатическое равновесие. Матрицы T , U и V трехдиагональны, W , A и B диагональны, X , C и D двухдиагональны. Векторы K , L и M дают ошибки в уравнениях переноса и в уравнениях, выражающих лучистое и гидростатическое равновесия, обусловленные тем, что для интенсивности излучения, температуры и плотности используются их текущие аппроксимации. Уравнение (7.57) решается путем подстановки в две последние строки величин δJ_n , найденных (для одной частоты) из n -й строки. Таким образом, находим

$$\delta J_n + (T_n^{-1}U_n)\delta N + (T_n^{-1}V_n)\delta T = T_n^{-1}K_n \quad (7.58)$$

и, исключая δJ_n , окончательно получаем систему вида

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta N \\ \delta T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad (7.59)$$

где

$$\begin{aligned} P &= A - \sum_n W_n T_n^{-1} U_n; & Q &= B - \sum_n W_n T_n^{-1} V_n, \\ R &= C - \sum_n X_n T_n^{-1} U_n; & S &= D - \sum_n X_n T_n^{-1} V_n, \\ F &= L - \sum_n W_n T_n^{-1} K_n; & G &= M - \sum_n X_n T_n^{-1} K_n. \end{aligned}$$

Из полученной в результате системы (7.59) находятся δN и δT .

Имея δN и δT , можно с их помощью получить новые плотности и температуры, затем для каждой точки m_d решить уравнения и

получить новые значения для всех $n_{i,d}^*$ и $n_{e,d}$ [пользуясь уравнениями (5.27) — (5.31) и применяя итерации до достижения сходимости], а тем самым и новые значения χ_{dn}^* и η_{dn}^* , которые в свою очередь используются для получения формального решения уравнения переноса, дающего новые значения J_{dn} и f_{dn} ($d = 1, \dots, D$; $n = 1, \dots, N$). По этим значениям опять строится уравнение (7.57), и вся процедура затем повторяется. По мере улучшения решения K_n , L и M одновременно стремятся к нулю, а потому и δN и $\delta T \rightarrow 0$.

Машинное время T в расчете на одну итерацию возрастает с ростом числа точек по частоте N и по глубине D так: $T = c_2ND^2 + c'(2D)^3$. Рост с N происходит *линейно*, так что можно использовать *много* точек по частоте (например, для учета покровного эффекта). На самом деле опыт показал [35], [275], что в большинстве случаев решение можно сделать более экономным, если допустить, что газовое давление p_g при линеаризации остается постоянным (как это имеет место, если в (7.9) члены, описывающие давление излучения, пренебрежимо малы). Все разложения переписываются тогда в форме $\delta x = (\partial x / \partial T)_{p_g} \delta T + (\partial x / \partial p_g)_T \delta p_g$, где

$$(\partial x / \partial T)_{p_g} = (\partial x / \partial T)_N + (\partial x / \partial N)_T (\partial N / \partial T)_{p_g},$$

и непосредственно принимается, что $\delta p_g = 0$. Это позволяет исключить последнюю строку системы (7.57) и решать ее только относительно δT . Машинное время становится тогда равным $T = cND^2 + c'D^3$. Только что описанный метод пока широко не использовался, но его преимущества очевидны. В будущих исследованиях по моделям атмосфер с ЛТР его, вероятно, будут предпочитать другим методам.

7.3. Конвекция и модели атмосфер звезд поздних спектральных типов

Перенос энергии в звездной атмосфере может производиться либо излучением, либо конвекцией. На самом деле осуществляется тот из этих процессов, который является более эффективным. Общая картина такова: лучистое равновесие имеется у звезд спектральных типов А и более ранних, конвекция же становится существенной у звезд средних подтипов F, а у более поздних она доминирует. Конвективные течения в звездных атмосферах являются турбулентными (см., например, [90]) и характеризуются присутствием сложной иерархии «вихрей» или «пузырей», движущихся и взаимо-