

от добавления H_{β} и P_{α} , а остальные линии вызывают лишь незначительный дополнительный рост температуры. Последний пример показан на рис. 7.26, где приведено распределение температуры для модели с $T_{\text{эфф}} = 30000 \text{ К}$, $\lg g = 4$ [436], в которой учитывались линии L_{α} , L_{β} , L_{γ} , H_{α} и P_{α} . Для модели с ЛТР температура убывает наружу монотонно. Распределение температуры для модели без ЛТР, в которой учитываются только континуумы, показывает ее рост наружу за счет нагрева лаймановским континуумом H и континуумом основного состояния HeI и $HeII$. Модель без ЛТР, построенная с учетом линий, показывает усиление роста температуры за счет влияния бальмеровских линий, за которым следует спад, вызываемый лаймановскими линиями.

Разнообразие и сложность только что описанных эффектов подчеркивает необходимость большой осмотрительности при проведении физически последовательного анализа. Не считая Солнца, для которого имеются довольно детальные исследования, изучение покровного эффекта в звездных атмосферах без ЛТР едва только начато, и здесь еще предстоит проделать большую работу.

7.6. Протяженные атмосферы

До сих пор при построении моделей предполагалось, что атмосфера состоит из плоскопараллельных слоев. Это служит превосходным приближением, когда характерный масштаб изменения плотности с высотой в атмосфере мал по сравнению с радиусом звезды. Однако многие звезды, в частности сверхгиганты и звезды Вольфа — Райе, имеют *протяженные атмосферы*, толщина которых составляет заметную долю радиуса звезды. В качестве первого приближения мы предположим, что эти атмосферы *сферически-симметричны*. Тот факт, что атмосфера является протяженной, влечет важные физические и наблюдательные следствия. Так, звезды с протяженными оболочками имеют распределение энергии в континууме с яркостной температурой, аномально низкой по сравнению с температурой возбуждения, определяемой по спектральным линиям. Другими словами, распределение энергии по частотам у этих звезд более плоское, чем у звезд главной последовательности того же спектрального типа (имеющих компактные плоские атмосферы), и у них наблюдается избыток излучения в инфракрасной области и дефицит в ультрафиолете. У звезд с протяженными оболочками наблюдения почти всегда свидетельствуют о наличии быстрого расширения атмосферы, так что здесь следует рассматри-

вать динамические модели, которые учитывают гидродинамические эффекты. Такие модели будут изучаться в гл. 15. Пока же мы займемся более ограниченной задачей о решении уравнения переноса излучения в неподвижных протяженных оболочках.

В протяженной разреженной атмосфере на больших расстояниях от находящегося в глубине диска звезды излучение становится сильно дилутированным и по преимуществу распространяется в пределах узкого конуса с осью, направленной по радиусу (этот конус опирается на диск). Из всего этого следует, что температурная структура атмосферы должна быть совершенно не такой, как в плоской модели, и что должны появиться математические затруднения, обусловленные пикообразной зависимостью интенсивности излучения от направления. Уравнение переноса, которое подлежит решению, имеет теперь вид (см. § 2.3)

$$\mu \partial I_\nu / \partial r + r^{-1}(1 - \mu^2) \partial I_\nu / \partial \mu = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu, \quad (7.165)$$

а его моменты записываются так (см. § 2.4):

$$r^{-2} \partial (r^2 H_\nu) / \partial r = \eta_\nu - \chi_\nu J_\nu, \quad (7.166)$$

и

$$\partial K_\nu / \partial r + r^{-1}(3K_\nu - J_\nu) = -\chi_\nu H_\nu, \quad (7.167a)$$

или

$$\partial (f_\nu J_\nu) / \partial r + r^{-1}(3f_\nu - 1)J_\nu = -\chi_\nu H_\nu. \quad (7.167b)$$

Ясно, что эти уравнения сложнее и оперировать с ними труднее, чем с их аналогами для плоской геометрии. Например, уравнение (7.165) является *уравнением в частных производных*, содержащим явным образом две независимые переменные. Далее, из моментных уравнений не получается какого-либо простого результата, если мы, к примеру, исключим H_ν из уравнений (7.166) и (7.167) (хотя несколько позже будет описано преобразование, которое все же позволяет свести эти два уравнения к одному комбинированному моментному уравнению весьма привлекательного вида). Моментные уравнения можно было бы решать, по крайней мере приближенно, если бы удалось найти достаточно точное соотношение между K_ν и J_ν , как это было возможно в плоском случае. Хотя на большой глубине, где поле излучения изотропно, f_ν и стремится к 1/3, однако вблизи поверхности $f_\nu \rightarrow 1$ (напоминаем упражнение 1.12). Поэтому непосредственное применение приближения Эддингтона, которое в плоском случае дает исключительно хорошие результаты, вблизи поверхности не будет оправданным даже грубо. Как было указано

Мак-Кри [413] и Чандрасекаром [148], для разреженной атмосферы, окружающей центральную звезду радиуса r_* , можно построить разумную аппроксимацию, если ввести угловые средние от интенсивности излучения, рассчитанные по отдельности для промежутка $\mu_* \leq \mu \leq 1$, где $\mu_* \equiv (1 - r_*^2/r^2)^{1/2}$, и для промежутка $-1 \leq \mu \leq \mu_*$ (см. также [403]). Однако этот метод работает, только если значение r_* можно выбрать вполне однозначно. Для протяженных фотосфер значительной плотности и не пренебрежимо малой оптической толщины этот метод перестает работать (см., впрочем, [635]). Поэтому неудивительно, что разработка эффективных общих методов решения задач переноса излучения при сферической геометрии так затянулась. Достаточно общий и гибкий численный метод, дающий прямое решение уравнений (7.165) — (7.167), будет изложен в этом параграфе несколько позже. Для рассмотрения серого случая приближенное решение будет получено путем простой сшивки асимптотических результатов для двух упомянутых выше предельных режимов. Это решение послужит нам отправным пунктом при оценке влияния протяженности атмосферы на распределение энергии в спектре выходящего излучения.

СЕРЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ АТМОСФЕРЫ

Задача о серой сферической атмосфере, в которой имеются локальное термодинамическое и лучистое равновесия, решалась приближенно Козыревым [360] и Чандрасекаром [148]. Недавно Хаммер и Райбики [323] получили численные результаты высокой точности. Если предположить, что $\chi_\nu = \chi$, и проинтегрировать уравнения (7.166) и (7.167) по всем частотам, то, опустив индекс ν у величин, проинтегрированных по частотам, получим

$$r^{-2}d(r^2H)/dr = 0, \quad (7.168)$$

$$d(fJ)/dr + r^{-1}(3f - 1)J = -\chi H, \quad (7.169)$$

причем при написании уравнения (7.168) было использовано условие лучистого равновесия

$$\int_0^\infty \eta_\nu d\nu = \int_0^\infty \chi_\nu J_\nu d\nu = \chi J. \quad (7.170)$$

Следствием уравнения (7.168) является интеграл полного потока

$$r^2H = H_0 = L/16\pi^2, \quad (7.171)$$

где L — светимость звезды. Введем оптическую глубину, измеряемую в радиальном направлении от произвольного достаточно большого внешнего радиуса R :

$$\tau(r) = \int_r^R \chi(r') dr'. \quad (7.172)$$

В глубине атмосферы (т.е. при $r \ll R$, $\tau \gg 1$), как можно ожидать, поле излучения становится изотропным и $f \rightarrow 1/3$. В этом предельном случае уравнение (7.169) переходит в следующее:

$$dJ/dr = -3\chi H = -3\chi r^{-2} H_0, \quad (7.173)$$

интегрирование которого дает

$$J(\tau) = H_0 \left(3 \int_0^\tau r^{-2} d\tau' + C \right). \quad (7.174)$$

Если бы при $\tau = 0$ можно было использовать обычное граничное условие эддингтонговского типа, то было бы $J(0) = 2H(0) = 2H_0/R^2$, так что

$$J(\tau) = R^{-2} H_0 \left[3 \int_0^\tau (R^2/r^2) d\tau' + 2 \right]. \quad (7.175)$$

Этот результат принадлежит Chandrasekarу [148]. Если далее сделать предположение об ЛТР, то $\eta_\nu = \chi_\nu B_\nu = \chi B_\nu$, и из уравнения (7.170) следует, что $J(\tau) = B(\tau) = \sigma T^4/\pi$. Этим равенством определяется распределение температуры в атмосфере. Уравнения (7.174) и (7.175) справедливы только на больших глубинах. Вблизи поверхности осуществляется режим свободного распространения фотонов (без взаимодействия с веществом. — *Ред.*) и $f \rightarrow 1$. В этом случае уравнение (7.169) принимает вид

$$d(r^2 J)/dr = -\chi r^2 H = -\chi H_0, \quad (7.176)$$

откуда

$$J(\tau) = r^{-2} H_0 (\tau + C). \quad (7.177)$$

В пределе при $f = 1$ будет $J(0) = \dot{H}(0) = H_0/R^2$, и формула (7.177) переписывается в виде

$$J(\tau) = r^{-2} H_0 (\tau + 1). \quad (7.178)$$

Следует ожидать, что это соотношение будет справедливо только при $\tau \ll 1$, $r \approx R$.

Если принять *степенной закон* изменения коэффициента погло-

нения, т.е. $\chi = C_n r^{-n}$, как это делалось в первоначальных работах [360], [148], то удастся продвинуться существенно дальше. Как было отмечено Козыревым, в случае расширяющихся атмосфер имеются серьезные физические аргументы в пользу именно такого выбора, так как уравнение неразрывности (см. § 15.1) требует, чтобы произведение $\rho v r^2$, где ρ — плотность и v — скорость расширения, было постоянно. В предельном случае очень быстрого расширения, когда $v > v_{\text{убегания}}$ (как это на самом деле и наблюдается), вещество движется практически с постоянной скоростью, так что $\rho \sim r^{-2}$. Можно ожидать, что непрозрачность пропорциональна некоторой степени плотности (например, в случае электронного рассеяния — ее первой степени, а для свободно-свободных переходов — квадрату плотности). Поэтому она изменяется как некоторая степень $1/r$. Подставив степенное выражение для χ в (7.172) и положив для простоты $R = \infty$, получим

$$\tau(r) = C_n r^{-(n-1)/(n-1)}. \quad (7.179)$$

Принимая во внимание формулу (7.179), заключаем, что предельной формой зависимости $J(\tau)$ при $r \rightarrow 0$, $\tau \gg 1$ является

$$J \rightarrow [3(n-1)/(n+1)] H_0 r^{-2\tau}, \quad (7.180)$$

формула же (7.177), справедливая при $\tau < 1$, остается без изменения. Поэтому заманчиво осуществить интерполяцию между этими двумя предельными случаями. Одна дается выражением [387]

$$J(\tau) = \frac{3H_0}{r^2} \cdot \frac{n-1}{n+1} \left[\tau + \frac{1}{3} \frac{n+1}{n-1} \right]. \quad (7.181)$$

Сравнение с численными расчетами показало, что формула (7.181) обеспечивает высокую точность. Используя то, что J и B равны, и обозначая через T_1 температуру при $\tau = 1$, можем переписать формулу (7.181) в виде

$$T(\tau) = T_1 \tau^{\frac{1}{2(n-1)}} \left\{ \left[\tau + \frac{n+1}{3(n-1)} \right] / \left[1 + \frac{n+1}{3(n-1)} \right] \right\}^{1/4}. \quad (7.182)$$

Из формулы (7.182) вытекает важное характерное отличие сферического случая от плоского, а именно: в протяженной атмосфере при $\tau \rightarrow 0$ температура стремится к нулю, а не к конечному значению. Отсюда следует, что вклад внешних холодных слоев, которые занимают большой объем, будет усиливать поток излучения в длинноволновой области и будет приводить к тому характерному уплощению распределения энергии в спектре, о котором упоминалось выше.

Поток, приходящий к наблюдателю, расположенному на большом расстоянии от центра звезды, можно рассчитать, пользуясь координатной системой (p, z) , показанной на рис. 7.27. Прицельное расстояние p — это расстояние между заданным лучом и параллельным ему лучом, проходящим через центр звезды; z — расстояние вдоль луча, измеренное от плоскости, проходящей через центр звезды перпендикулярно центральному лучу. Примем, что ось z направлена к наблюдателю, и формально поместим наблюдателя при $z = \infty$ (это оказывается удобным при вычислении интегралов). Координаты p и z связаны с полярными координатами r и θ следующим образом: $z = r \cos \theta$, $p = r \sin \theta$, причем $r = (p^2 + z^2)^{1/2}$. Если фиксировать значение p , то уравнение переноса излучения вдоль этого луча в направлении роста z будет иметь вид

$$\partial I_\nu / \partial z = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu, \quad (7.183)$$

что следует из простейших соображений. Формальное решение уравнения (7.183) для интенсивности излучения при $z = \infty$, т.е. выходящего вдоль луча с прицельным расстоянием p , можно написать непосредственно:

$$I_\nu(p, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} B_\nu(T(p, z)) \exp[-\tau(p, z)] \chi(p, z) dz, \quad (7.184)$$

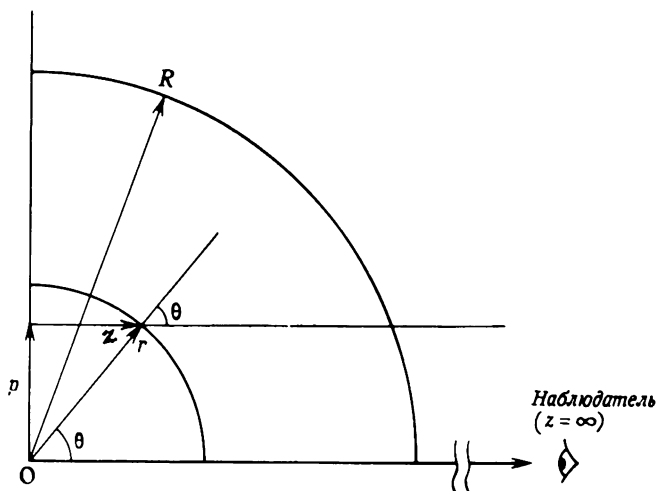


Рис. 7.27. Системы координат, используемые при решении уравнения переноса в случае сферической геометрии.

где $\tau(p, z)$ — оптическая глубина, отсчитываемая от $z = \infty$ вдоль луча по направлению к звезде.

Упражнение 7.15. Путем замены переменных выразить производную $\partial/\partial z|_p$ через производные по сферическим координатам и показать, что уравнение (7.183) равносильно уравнению (7.165). В системе координат p и z лучи $p = \text{const}$ являются характеристиками дифференциального уравнения в частных производных, которое вдоль этих прямых сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению.

Полный поток, получаемый наблюдателем в расчете на единицу площади приемника, равен

$$I_\nu = 2\pi D^{-2} \int_0^\infty I_\nu(p, \infty) p dp. \quad (7.185)$$

Следуя Козыреву [360] (см. также [61], стр. 165), сделаем в интеграле (7.184) замену переменных $\theta = \arccos z/r$ и вместо $\tau(p, z)$ будем писать $\tau(p, \theta)$. При степенном законе изменения непрозрачности будем иметь $\tau(p, \theta) = C_n p^{-(n-1)} \psi_n(\theta)$, где

$$\psi_n(\theta) = \int_0^\theta \sin^{n-2} \theta' d\theta'. \quad (7.186)$$

Тогда

$$I_\nu(p, \infty) = C_n p^{-(n-1)} \int_0^\pi B_\nu(T(p, \theta)) \exp[-\tau(p, \theta)] \sin^{n-2} \theta d\theta. \quad (7.187)$$

Подставим выражение (7.187) в формулу (7.185) и произведем после этого еще одну замену переменных, а именно вместо $p = r \sin \theta$ введем величину $\tau(r)$ — радиальную оптическую глубину, определяемую равенством (7.179). В результате получим

$$I_\nu = \pi (R_1/D)^2 \int_0^\infty B_\nu(T(r)) \tau^{-\frac{n-2}{n-1}} \Phi_n(\tau) d\tau, \quad (7.188)$$

где в качестве R_1 выбрано то значение радиуса, при котором $\tau = 1$, и

$$\Phi_n(\tau) = 2 \int_0^\pi \exp[-(n-1)\tau \psi_n(\theta)/\sin^{n-1} \theta] \sin \theta d\theta. \quad (7.189)$$

Упражнение 7.16. Вывести формулы (7.186), (7.188) и (7.189).

Исходя из закона изменения температуры, определяемого формулой (7.182), по формуле (7.188) можно рассчитать поток, выходя-

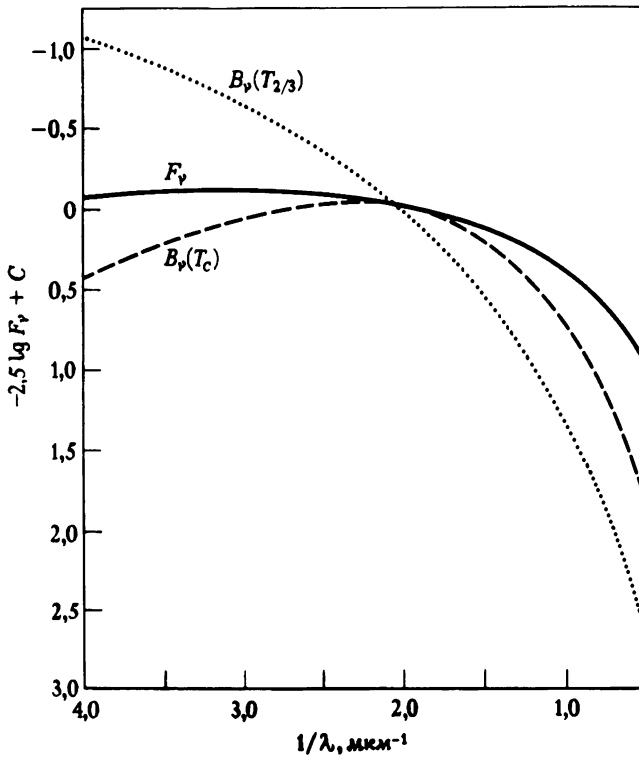


Рис. 7.28. *Сплошная кривая:* поток излучения F_ν , выходящего из серой сферической атмосферы с $T_1 = 5 \cdot 10^4$ К и $n = 2$. *Штриховая кривая:* кривая чернотельного излучения с цветовой температурой T_c , имеющая при $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ тот же наклон, что и кривая F_ν . Обратите внимание на ультрафиолетовый и инфракрасный избытки у F_ν по сравнению с $B_\nu(T_c)$. *Пунктирная кривая:* чернотельное излучение при температуре $T = T(\tau = 2/3)$, характерной для плоской атмосферы. *Абсцисса:* $1/\lambda$, где λ — в мкм. По [61], стр. 165, с разрешения.

ший из серой сферической атмосферы при конкретных значениях характерной температуры атмосферы T_1 и показателя n , определяющего степень протяженности атмосферы ($n \rightarrow \infty$ соответствует переходу к плоским моделям; малым значениям n соответствуют атмосферы большой протяженности). Из наблюдений определяются *цветовые температуры* T_c в области длины волны λ_c , для чего используются измерения показателей цвета в той или иной цветовой системе. Их находят также по спектрофотометрическим градиентам. В обоих случаях, по существу, определяется наклон континуума. Ван Блерком [61] рассчитал T_c при $\lambda_c = 5000 \text{ \AA}$ для

различных моделей с $T_1 = 50000$ К. Он нашел, что $T_c/10^4 = 5$ при $n = \infty$, а при $n = 10; 5; 3$ и 2 соответственно $T_c/10^4 = 4,3; 3,5; 2,2$ и $1,2$. Это показывает, что увеличение протяженности атмосферы приводит к эффектам, аналогичным тем, которые вызываются уменьшением ее температуры. Так, для модели с $T_1 = 50000$ К и $n = 3$ распределение энергии в потоке почти совпадает с распределением для модели с $T_1 = 30000$ и $n = 5$. Основываясь на этих результатах, можно понять, почему у сверхгигантов и звезд WR цветные температуры ниже, чем у звезд главной последовательности того же спектрального типа. Ясно также, что эффекты протяженности атмосферы вносят неоднозначность в выбор модели строения атмосферы звезды, поскольку почти одинакового согласия с наблюдениями можно добиться, пользуясь различными моделями, отличающимися друг от друга своей температурой и протяженностью — характеристиками, оказывающимися в какой-то мере взаимозаменяемыми. Частотная зависимость потока излучения, выходящего из протяженной серой атмосферы, показана на рис. 7.28, где она сравнивается с функцией Планка при температуре T_c (где T_c — цветовая температура потока при $\lambda_c = 5000$ Å) и с функцией Планка при $T(\tau = 2/3)$ (распределение излучения, которое выходило бы из плоской атмосферы). Ясно видно, что излучение, выходящее из протяженной атмосферы, имеет резко выраженный *дефицит потока в ультрафиолете* и *инфракрасный избыток* по сравнению с плоской атмосферой той же характерной температуры. По отношению же к планковской функции при T_c (т.е. при той температуре, которая была бы приписана звезде по данным наблюдений) распределение энергии в потоке обладает как *инфракрасным*, так и *ультрафиолетовым избытком*. Этот результат есть проявление существенно неоднородного характера поля излучения в протяженных атмосферах, обусловленного большими перепадами температуры в пределах оболочки. Более близкие к реальности несерые модели, построенные без предположения об ЛТР, будут рассмотрены после изложения общего метода решения уравнения переноса.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ПРИ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Для решения уравнения переноса при сферической геометрии применялось большое число различных методов. Козырев [360] и Чандрасекар [148] пользовались видоизмененными вариантами приближения Эддингтона, которое, однако, приводит к большим ошиб-

кам вблизи поверхности. В последующих работах [154], [679], [680] зависимость интенсивности излучения от угла аппроксимировалась с помощью разложения по сферическим гармоникам, но лишь до второго порядка. Как было убедительно показано Чепменом [163], эти методы не могут правильно описывать поле излучения, так как у поверхности оно приобретает пикообразный характер с резким максимумом в радиальном направлении, так что $f_K \rightarrow 1$ (см. [163], рис. 1 или [323], рис. 6). Предлагались методы [130], [255], [507], в которых в уравнении (7.165) используются конечные разности как по угловой, так и по пространственной координатам (родственные S_n -методу, используемому в теории ядерных реакторов [127]). Однако эти методы становятся непригодными, когда дискретные сферические оболочки становятся оптически толстыми. Поэтому они должны быть дополнены специальными приемами, которые позволили бы сделать их пригодными для расчета моделей звездных атмосфер.

Описываемый ниже метод, который является достаточно общим, устойчивым и эффективным, основан на использовании дифференциального уравнения. В нем метод Фотрие используется для нахождения решения вдоль лучей с определенными прицельными расстояниями (касательных к дискретным оболочкам), что позволяет выявить угловую зависимость интенсивности, необходимую для вычисления переменных эддингтоновских множителей [323] по уже найденной в каком-то приближении функции источников. Затем при известных эддингтоновских множителях используется схема метода Фотрие для решения комбинированного моментного уравнения, для получения которого применяется изящное преобразование, введенное Ауэром [32]. Другой путь может заключаться в получении решений непосредственно с помощью метода типа Райбики [442] (если входящий в выражение для функции источников интеграл, описывающий рассеяние, не зависит от частоты). Был предложен и равносильный этому метод, использующий интегральное уравнение [558].

Рассмотрим сначала моментные уравнения. Будем считать все переменные функциями r и ν и введем радиальную оптическую глубину $d\tau_\nu = -\chi_\nu dr$. Тогда эти моментные уравнения имеют вид

$$\partial(r^2 H_\nu) / \partial \tau_\nu = r^2 (J_\nu - S_\nu), \quad (7.190)$$

$$\partial(f_\nu J_\nu) / \partial \tau_\nu - (3f_\nu - 1) J_\nu / \chi_\nu r = H_\nu, \quad (7.191)$$

где предполагается, что S_ν имеет представление самого общего ви-

да:

$$S_\nu = \alpha_\nu \int R(r; \nu', \nu) J_\nu d\nu' + \beta_\nu. \quad (7.192)$$

В задаче о чисто непрерывном спектре в выражении для S_ν присутствовал бы лишь член, описывающий монохроматическое рассеяние, и оно было бы проще. При рассмотрении уравнений (7.190) и (7.191) имеются две существенные трудности. а) Непосредственное исключение H не приводит к простому уравнению. Получается довольно сложное уравнение, в которое входят производные как первого, так и второго порядка. б) Член уравнения (7.191), содержащий множитель $(\chi_\nu r)^{-1}$, обладает той особенностью, что он быстро возрастает с приближением к поверхности (напомним, что коэффициент поглощения χ_ν рассчитан на единицу *объема*, и поэтому из-за изменения концентрации частиц он изменяется на несколько порядков величины). Этот член делает систему неустойчивой. Обе эти трудности можно преодолеть путем введения [32] *фактора сферичности* q_ν , определяемого равенством

$$\ln(r^2 q_\nu) = \int_{r_c}^r [(3f_\nu - 1)/r' f_\nu] dr' + \ln r_c^2, \quad (7.193)$$

где r_c — некоторый «радиус ядра», соответствующий самому глубокому слою, рассматриваемому при отыскании решения. Ясно, что если известно f_ν , то q_ν находится легко. Введение множителя q_ν позволяет переписать уравнение (7.191) в форме

$$\partial(f_\nu q_\nu r^2 J_\nu) / \partial \tau_\nu = q_\nu r^2 H_\nu. \quad (7.194)$$

Если (7.194) подставить в уравнение (7.190), то мы придем к *комбинированному моментному уравнению*

$$\frac{\partial}{\partial \tau_\nu} \left[\frac{1}{q_\nu} \frac{\partial(f_\nu q_\nu r^2 J_\nu)}{\partial \tau_\nu} \right] = r^2 (J_\nu - S_\nu) \quad (7.195)$$

или после введения новой переменной $dX_\nu = -q_\nu \chi_\nu dr = q_\nu d\tau_\nu$,

$$\partial^2(f_\nu q_\nu r^2 J_\nu) / \partial X_\nu^2 = q_\nu^{-1} r^2 (J_\nu - S_\nu). \quad (7.196)$$

Упражнение 7.17. Проверить, что выражение (7.193) позволяет свести уравнения (7.190) и (7.191) к (7.195).

Для получения условия на верхней границе обозначим

$$h_\nu = \int_0^1 I(R, \mu, \nu) \mu d\mu / \int_0^1 I(R, \mu, \nu) d\mu. \quad (7.197)$$

Тогда из (7.194) будет следовать, что

$$[\partial(f_\nu q_\nu r^2 J_\nu) / \partial X_\nu]_{r=R} = h_\nu(r^2 J_\nu)_{r=R}. \quad (7.198)$$

Условие на нижней границе получается применением диффузионного приближения в той же форме, что и для плоского случая:

$$H_\nu(r_c) = (\chi_\nu^{-1} |\partial B_\nu / \partial r|)_{r_c} / 3. \quad (7.199)$$

Входящий сюда градиент фиксируется требованием, чтобы интеграл от $H_\nu(r_c)$ по всем частотам был равен полному потоку $H_c = L / 16\pi^2 r_c^2$. Тогда

$$\begin{aligned} [\partial(f_\nu q_\nu r^2 J_\nu) / \partial X_\nu]_{r=r_c} &= \\ &= r_c^2 H_c [\chi_\nu^{-1} (\partial B_\nu / \partial T) / \int_0^\infty \chi_\nu^{-1} (\partial B_\nu / \partial T) d\nu]_{r=r_c}. \end{aligned} \quad (7.200)$$

Диффузионное приближение, а потому и равенства (7.199) и (7.200), будут справедливы, если средний свободный пробег фотона $\chi_\nu^{-1} \ll \varepsilon R$, где ε — некоторое малое число. Этому критерию всегда можно удовлетворить, выбрав слой r_c достаточно глубоко в атмосфере. При других физических условиях (например, в случае туманностей) на нижней границе можно наложить другие граничные условия [374].

После введения набора дискретных значений радиуса $\{r_d\}$, $d = 1, \dots, D$, где $R = r_1 > r_2 > \dots > r_D = r_c$, и частоты $\{\nu_n\}$, $n = 1, \dots, N$, можно производные заменить конечными разностями (используя, например, сплайны [374], [442] или формулы Эрмита [34]), а интеграл по частоте, входящий в выражение для функции источников (если таковой имеется), представить квадратурной суммой. Уравнения (7.196), (7.198) и (7.200) примут тогда ту же стандартную трехдиагональную форму, что и уравнение (6.31). Их можно решить с помощью обычной схемы исключения Фотрие. Счетное время зависит от параметров так: $T_M = cDN^3$. Отсюда видно, что этот метод особенно эффективен, когда функция источников целиком определяется тепловыми источниками или содержит только интеграл, описывающий когерентное рассеяние (тогда $N = 1$). В только что описанной вычислительной схеме интеграл рассеяний в выражении для функции источников фигурирует *явным образом*. Поэтому здесь обеспечивается правильный учет глобальных свойств решения, определяемых процессами термализации.

Для выполнения указанных выше вычислений необходимо знать эддингтоновские множители f_ν . Их легко найти, если известна угловая зависимость интенсивности излучения на всех глубинах. Чтобы

получить необходимую нам информацию, для каждого значения частоты последовательно решаем уравнение переноса вдоль различных лучей с прицельными расстояниями из некоторого набора $\{p_i\}$. Этот набор включает лучи, касательные к каждой из дискретных оболочек, а также содержит дополнительно еще C значений прицельного расстояния. Последние выбраны так, чтобы соответствующие лучи пересекали ядро, в частности, среди них имеется $p = 0$ (ему соответствует луч, проходящий через центр). Имеющаяся здесь геометрическая ситуация поясняется рис. 7.29. Прицельные расстояния снабжены индексом i , $i = 1, \dots, I$, где $I = D + C$; $p_1 = 0$ означает центральный луч, p_c — последний луч, проходящий внутри ядра (т.е. $p_c < r_c$); $p_{c+1} = r_c$ и $p_I = R$. Каждый луч с прицельным расстоянием p_i пересекает все оболочки с $r_d \geq p_i$, эти точки пересечения определяют набор значений z -координаты $\{z_{di}\}$, $d = 1, \dots, D_r$. Здесь $D_i = D + C + 1 - i$ при $i > C$ и $D_i = D$ при $i \leq C$. Далее, $z_{di} = (r_d^2 - p_i^2)^{1/2}$. Из рисунка видно, что луч p_i пересекает сферу с радиусом r_d под углом, косинус которого равен

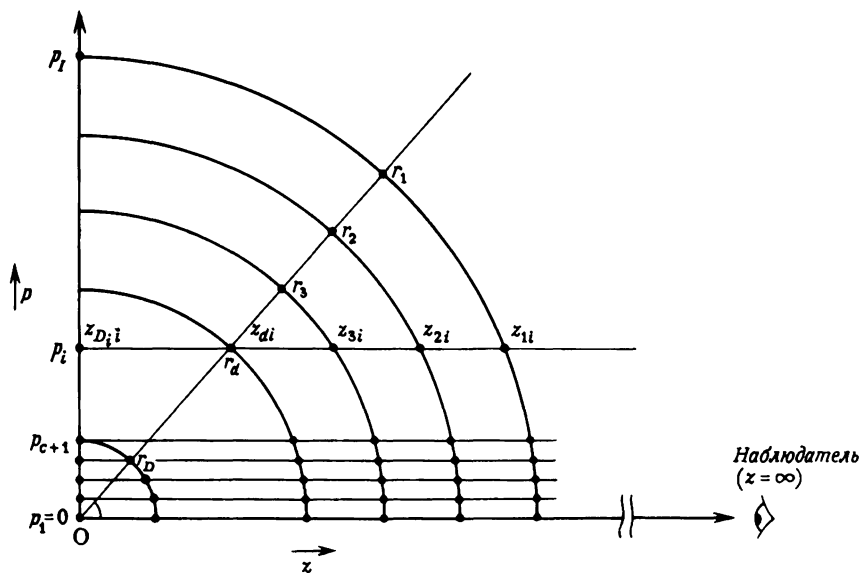


Рис. 7.29. Сетка дискретизации (p, z) , используемая при решении уравнения переноса при сферической геометрии. Лучи с прицельными расстояниями $\{p_i\}$ проводятся параллельно центральному лучу таким образом, чтобы они касались сферических оболочек, выбранных для описания зависимости различных физических величин от глубины в атмосфере. Пересечения луча с концентрическими сферами определяют набор значений z вдоль каждого луча.

$\mu_{di} = \mu(r_d, p_i) = (r_d^2 - p_i^2)^{1/2}/r_d = z_{di}/r_d$. Поэтому если мы найдем сначала решения вдоль *всех лучей* $\{p_i\}$ и выберем *частное значение* r_d , то знание изменения $I_\nu(z_{di}, p_i)$ с $i, i = 1, \dots, I_d$, *равносильно тому, что мы получили зависимость от μ величины $I_\nu(r_d, \mu)$* , известной нам *при значениях $\mu = \mu_{di}, i = 1, \dots, I_d$* , из интервала $1 \geq \mu \geq 0$. Здесь $I_d = I + 1 - d$. Ясно поэтому, что описанное выше решение, получаемое последовательно вдоль различных лучей зрения, позволяет определить необходимые нам эддингтоновские множители. Остроумная геометрическая схема, использованная здесь для получения сведений об угловой зависимости из полученных решений, в действительности не является тривиальной и существенно опирается на *симметрию* задачи, которая позволяет считать все точки на данной сфере эквивалентными. При отсутствии строгой сферической симметрии задача становится гораздо более сложной.

Рассмотрим теперь луч с определенным значением p_i . Уравнение переноса излучения вдоль этого луча имеет вид ($z \geq 0$)

$$\pm \partial I^\pm(z, p_i, \nu) / \partial z = \eta(r, \nu) - \chi(r, \nu) I^\pm(z, p_i, \nu), \quad (7.201)$$

где знаки $+$ и $-$ относятся соответственно к излучению, идущему к внешнему наблюдателю и от него, а в качестве пространственной переменной у η и χ взято r с учетом, что $r \equiv r(z, p_i) = (p_i^2 + z^2)^{1/2}$. Введя оптическую глубину вдоль луча $d\tau(z, p_i, \nu) = -\chi(r, \nu) dz$, положив $S(r, \nu) = \eta(r, \nu)/\chi(r, \nu)$ (причем η и χ считаются *известными величинами*) и введя переменные, напоминающие среднюю интенсивность и поток:

$$u(z, p_i, \nu) = [I^+(z, p_i, \nu) + I^-(z, p_i, \nu)]/2, \quad (7.202)$$

$$v(z, p_i, \nu) = [I^+(z, p_i, \nu) - I^-(z, p_i, \nu)]/2, \quad (7.203)$$

получим систему уравнений второго порядка

$$\partial^2 u(z, p_i, \nu) / \partial \tau^2(z, p_i, \nu) = u(z, p_i, \nu) - S(r(z, p_i), \nu), \quad (7.204)$$

а на верхней границе граничное условие

$$\partial u(z, p_i, \nu) / \partial \tau(z, p_i, \nu) \Big|_{z_{\max}} = u(z_{\max}, p_i, \nu), \quad (7.205)$$

где $z_{\max} = (R^2 - p_i^2)^{1/2}$. Вид граничного условия на нижней границе зависит от того, пересекает ли луч ядро ($r_D = r_c$) или же проходит мимо него и пересекает плоскость $z = 0$. В первом случае используется диффузионное приближение, как это делалось при получении равенства (7.200). Во втором соображения симметрии показывают,

что $v(0, p_i, \nu) = 0$, и поэтому

$$\partial u(z, p_p, \nu) / \partial \tau(z, p_p, \nu) |_{z=0} = 0. \quad (7.206)$$

Уравнения (7.204) — (7.206), переписанные в форме разностных уравнений, образуют (при известной S) единую трехдиагональную систему стандартной формы Фотрие, и их можно решить с помощью обычного алгоритма. Время вычислений при N значениях частоты, C лучах, пересекающих ядро, и D значениях радиальной оптической глубины равно $T_R = cN[DC + \sum D_i] \approx c'ND^2$ при $D \gg C$. Найдя полное решение $u_{\text{din}} \equiv u(z_{di}, p_i, \nu_n)$, вычисляем моменты, как это описано выше:

$$J_{dn} = \sum_{i=1}^{I_d} w_{di}^{(0)} u_{din}, \quad (7.207)$$

$$K_{dn} = \sum_{i=1}^{I_d} w_{di}^{(2)} u_{din}, \quad (7.208)$$

а тем самым и эддингтоновский множитель $f_{dn} = K_{dn}/J_{dn}$. Здесь величины w представляют собой соответствующие веса квадратурных формул, которые находятся аналитически путем интегрирования моментов кусочно-полиномиального представления функции $u(r_d, \mu)$. При этом в качестве узлов берется набор $\{\mu_{di}\}$, порождаемый пересечениями лучей $\{p_i\}$ со сферой радиуса r_d . Используя новые значения эддингтоновских множителей, заново решаем моментные уравнения, и этот процесс повторяется до достижения сходимости. Опыт показывает, что сходимость здесь очень быстрая.

Упражнение 7.18. а) Написать конечно-разностные аппроксимации уравнений (7.204) — (7.206). б) Вывести граничное условие на нижней границе с точностью до членов второго порядка, распространив разностную аппроксимацию уравнения (7.204) по другую сторону от центральной плоскости $z = 0$ и использовав симметрию u относительно этой плоскости.

Когда в выражении для функции источников интеграл, описывающий рассеяние, выражается просто через J (или, в случае рассеяния в линии, через \mathcal{J}) и не зависит от частоты (зависимость от частоты имеется при частичном перераспределении по частоте), итерационной процедуры, заключающейся в поочередном решении

уравнений переноса вдоль лучей и моментных уравнений, можно избежать, построив схему *прямого* решения типа Райбики [442]. Вдоль каждого луча для каждого значения частоты имеем трехдиагональную систему вида

$$\mathbf{T}_{in} \mathbf{u}_{in} = \mathbf{U}_{in} \bar{\mathbf{J}} + \mathbf{W}_{in}, \quad (7.209)$$

где $i = 1, \dots, I$; $n = 1, \dots, N$; $\bar{\mathbf{J}}(d = 1, \dots, D)$ описывает изменение \bar{J} с глубиной [ср. с уравнением (6.46)], а \mathbf{u}_{in} — изменение $u(z, p, \nu_n)$ вдоль луча. Эту систему можно разрешить относительно \mathbf{u}_{in} и результат $\mathbf{u}_{in} = \mathbf{C}_{in} \bar{\mathbf{J}} + \mathbf{D}_{in}$ подставить в формулу, определяющую \bar{J} (см. (7.207)). В результате получится система, определяющая \bar{J} . Время вычислений по этому методу $T_D = cND^3$ при $D \gg c$. Детали этой процедуры, которая является общей, устойчивой и экономичной, можно найти в указанной выше статье.

МОДЕЛИ ПРОТЯЖЕННЫХ АТМОСФЕР ЗВЕЗД РАННИХ ТИПОВ

Несерые сферические модели атмосфер, находящихся в ЛТР, были построены для ядер планетарных туманностей [130], [131], [376], а также для О- и В-сверхгигантов [136], [325], [376], [441], [442], [559], [516], стр. 241, причем использовались различные методы расчета. Модели с учетом отклонений от ЛТР для обоих классов объектов приводятся в [376], [441], [442], [516], стр. 241. При построении всех этих моделей предполагалось, что имеется гидростатическое равновесие, а большая протяженность атмосферы возникает из-за почти полной компенсации гравитационных сил за счет действия давления излучения на вещество. На самом деле имеются убедительные свидетельства того, что протяженность атмосферы почти всегда связана с крупномасштабным расширением и что от *статических* моделей можно ожидать в лучшем случае лишь качественной информации. *Динамические* модели, построить которые гораздо труднее, будут обсуждаться в § 15.4.

В случае протяженной атмосферы необходимо учитывать изменение силы тяжести с расстоянием от звезды. Поэтому если массу звезды обозначить через \mathcal{M} , то уравнение гидростатического равновесия примет вид

$$dp_g/dr = -\rho G \mathcal{M}/r^2 + (4\pi/c) \int_0^\infty \chi_\nu H_\nu dv. \quad (7.210)$$

Если ввести росселандову среднюю непрозрачность χ_R , интеграль-

ный поток $H = L/16\pi^2 r^2$ и параметр

$$\gamma \equiv (\chi_R H)^{-1} \int_0^{\infty} \chi_\nu H_\nu d\nu, \quad (7.211)$$

то получим

$$dp_g/d(1/r) = \rho[G\mathcal{M} - \gamma L\chi_R/4\pi c\rho]. \quad (7.212)$$

Как и в случае плоских атмосфер, влияние давления излучения приводит к увеличению шкалы высот в атмосфере (а следовательно, и ее протяженности). Параметр $\Gamma = \gamma\chi_R L/4\pi c\rho G\mathcal{M}$ есть отношение силы светового давления к силе тяжести. В предельном случае, когда непрозрачность определяется только электронным рассеянием, получаем верхнюю границу критического отношения L/\mathcal{M} , при котором сила светового давления в точности уравнивает силу тяжести, а именно $(L/\mathcal{M})_{\text{крит}} = 3,8 \cdot 10^4 L_\odot / \mathcal{M}_\odot$ (см. упражнение 7.1). Будем обозначать значение Γ , полученное для случая чисто электронного рассеяния, через Γ_e . Для протяженной оболочки понятие «радиуса» звезды (а следовательно, и эффективной температуры) становится неоднозначным. Обычно в качестве характерного радиуса пользуются значением $r_{3/2}$, при котором $\tau_R = 2/3$.

Для ядер планетарных туманностей влияние силы светового давления очень существенно, поскольку оценки L и \mathcal{M} для этих объектов [279] непосредственно приводят к значениям Γ в диапазоне $0,8 < \Gamma_e < 0,93$. Далее можно показать, что абсолютная геометрическая толщина атмосферы Δr пропорциональна $g_{\text{эфф}}^{-1} = [(1 - \Gamma)G\mathcal{M}/R^2]^{-1}$. Это означает, что при заданном значении $g_{\text{эфф}}$ относительная толщина атмосферы $\Delta r/R$ для звезд малых радиусов, таких, как ядра планетарных туманностей, будет больше. Так, согласно нескольким приводимым в [130], [131] моделям, толщина атмосферы оказывается сравнимой или даже превосходящей радиус «ядра» звезд (глубины, большие $\tau = 10$). Влияние протяженности атмосферы этих звезд проявляется в сильном снижении их цветовых температур по сравнению с эффективными температурами. При $\lambda_c = 5000 \text{ \AA}$ отношение $T_c/T_{\text{эфф}}$ для некоторых из моделей составляет всего 0,3. Распределение энергии в спектре в целом обнаруживает характерное уплощение, описанное выше для серых моделей (в видимой области спектра распределение энергии, согласно несерым моделям, можно очень точно представить распределением, рассчитанным для серых моделей с n от 3 до 4 [61], стр. 165). Более плоские распределения энергии в спектрах, предсказываемые этими моделями, очень напоминают распределения, имеющиеся у

звезд WR (хотя на самом деле параметры моделей L , M и R для этих звезд другие).

Для О-сверхгигантов и звезд Of получить распределение энергии в непрерывном спектре и воспроизвести наблюдаемые эмиссионные линии, пользуясь плоскими моделями, невозможно (см. [376]). Отсюда следует, что атмосферы таких звезд должны быть протяжен-

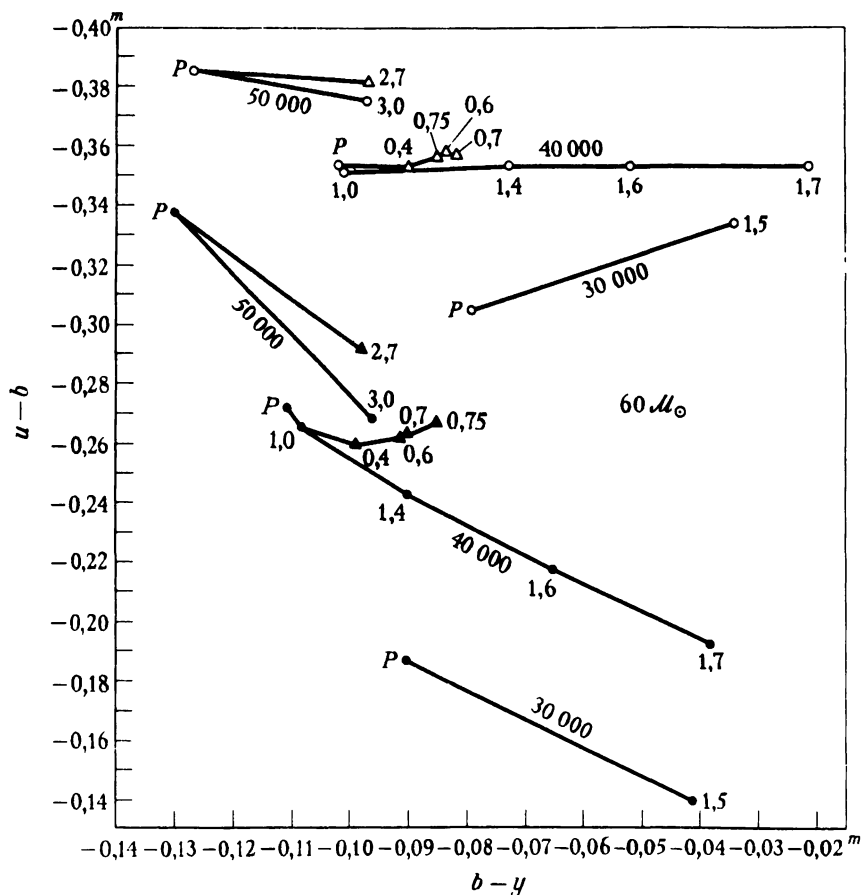


Рис. 7.30. Показатели цвета в системе Стремгrena $u - b$ и $b - y$ согласно моделям с $M = 60 M_{\odot}$. Пустые кружки и треугольники: модели с ЛТР; сплошные кружки и треугольники: модели без ЛТР. Точки, соответствующие моделям с одинаковыми значениями $T_{\text{эфф}}$, соединены отрезками. Числа у точек — значения параметров, описывающих фактор эффективности светового давления γ . Кружки: $\gamma = \gamma_1$; приведены значения γ_1 . Треугольники: $\gamma = 1 + \gamma_2 \exp(-\tau_R)$; приведены значения γ_2 . По [376], с разрешения.

ными. С другой стороны, расчеты эволюционных треков для звезд соответствующих масс неизменно приводят к значениям $\Gamma_e < 0,5$. Ввиду того что радиусы этих звезд велики, это означает, что протяженность их атмосфер должна быть несущественна [136]. Однако поглощение в спектральных линиях может значительно увеличить общую величину светового давления на вещество [102], [144]. Считается, что именно этот механизм и ответствен за образование звездного ветра у звезд типа O (см. § 15.4). В ряде работ [376], [441], [442], [516], стр. 241, были предприняты попытки смоделировать эффекты, вызываемые увеличением силы светового давления, путем введения в уравнение (7.212) произвольно задаваемого фактора эффективности светового давления γ , который подбирается таким образом, чтобы максимальное значение Γ возросло до величин, близких к единице (в самом крайнем из рассмотренных случаев принималось $\Gamma_{\max} \approx 0,995$). Хотя рассчитывать такие модели из-за неустойчивости вычислительных алгоритмов, которая непосредственно отражает физическую неустойчивость этих атмосфер, оказывается трудно, все же методом полной линеаризации был найден ряд решений (как в предположении об ЛТР, так и с учетом отклонений от ЛТР). Следует, однако, подчеркнуть, что при таких экстремальных значениях Γ гидростатическое равновесие весьма маловероятно. Поэтому необходимо рассматривать динамические модели. Модели, подобные только что описанным, годятся лишь для того, чтобы продемонстрировать характер влияния сильного увеличения шкалы высот в оболочке. Протяженность атмосферы сильно влияет на наблюдаемые параметры, такие, как показатели цвета (см. рис. 7.30), что ведет к сильному покраснению звезды при увеличении размера ее атмосферы. Показатели цвета для моделей с ЛТР и без ЛТР заметно различаются, так как при ЛТР у бальмеровского скачка имеется ложная эмиссия (обусловленная механизмом Шустера, см. § 10.2). Детальное обсуждение всех особенностей распределения энергии в спектрах таких звезд можно найти в указанной выше литературе.

7.7. Полуэмпирические модели атмосферы Солнца

Все, что излагалось до сих пор в этой книге, было связано с разработкой методов, позволяющих делать заключения о физических свойствах атмосфер на основе анализа звездных спектров путем сопоставления их с моделями. Наши сведения о звездах, которые вос-