

### 10.3. Теоретическая кривая роста

Пользуясь формулой (10.15), в принципе можно было бы рассчитать профиль спектральной линии и путем интегрирования по частоте определить ее эквивалентную ширину. Такая процедура, однако, является трудоемкой и требует использования ЭВМ. Поэтому поучительно рассмотреть какую-нибудь простую модель, которая позволяет аналитически рассчитать эквивалентную ширину. Таким путем можно будет построить так называемую *кривую роста*, непосредственно дающую эквивалентную ширину в функции числа тех поглощающих атомов, которые создают линию.

Будем сначала предполагать, что образование линии происходит в слое, которому можно приписать единые значения температуры и электронного давления. В лабораторных исследованиях это предположение, как правило, выполняется, но в условиях звездных атмосфер обычно имеются большие градиенты температуры и давления. Поэтому выбрать подходящие значения температуры и давления нелегко, и они являются не более чем некоторыми довольно неопределенными средними, взятыми по области формирования линий. Произведя такой выбор, мы можем (приняв ЛТР) рассчитать населенности атомных уровней, а следовательно, и коэффициент поглощения в континууме  $k_c$ , и коэффициент поглощения в линии, соответствующей переходу  $i \rightarrow j$ :

$$\chi_{ij}(\nu) = (\pi e^2 / mc) f_{ij} n_i (1 - e^{-h\nu/kT}) \phi_{\nu} = \chi_{ij} \phi_{\nu}. \quad (10.31)$$

Про профиль поглощения предполагается, что он дается функцией Фойгта [формула (9.34)]

$$H(a, \nu) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} [(v - y)^2 + a^2]^{-1} dy,$$

где  $\nu = \Delta\nu / \Delta\nu_D$ ,  $a = \Gamma / (4\pi\Delta\nu_D)$  и  $\Delta\nu_D = \nu\xi_0/c$ ; здесь  $\xi_0$  — наиболее вероятная скорость атомов вещества. Можем теперь написать  $\chi_{ij}(\nu) = \chi_0 H(a, \nu)$ , где  $\chi_0 = \chi_{ij} / (\pi^{1/2} \Delta\nu_D)$ . Принимается, что в области формирования линии  $\Delta\nu_D$  и параметр  $a$  заданы, и используется модель Милна — Эддингтона, в которой отношение  $\beta_{\nu} = \chi_{ij}(\nu) / k_c$  не зависит от глубины. (Предположение о независимости  $\beta_{\nu}$  от глубины для некоторых спектральных линий, например для MgII  $\lambda 4481$  и SiII  $\lambda\lambda 4128, 4131$ , действительно является довольно хорошим приближением. Для этих линий  $\chi_0$  и  $k_c$  могут изменяться в атмосфере на несколько порядков, а их отношение остается почти постоянным.) Примем, наконец, что линия возникает за

счет процесса поглощения при ЛТР. В этом случае поток легко рассчитать, а именно

$$F_\nu = 2 \int_0^\infty B_\nu(T(\tau)) E_2 \left[ \int_0^\tau (1 + \beta_\nu) dt \right] (1 + \beta_\nu) d\tau. \quad (10.32)$$

Как и ранее, примем, что  $B_\nu(T(\tau)) = B_0 + B_1\tau$ , где  $\tau$  — оптическая глубина в континууме. Тогда, поскольку принято, что  $\beta_\nu$  не зависит от глубины, будем иметь

$$\begin{aligned} F_\nu &= 2 \int_0^\infty (B_0 + B_1\tau) E_2[(1 + \beta_\nu)\tau] (1 + \beta_\nu) d\tau = \\ &= B_0 + \frac{2}{3} B_1 / (1 + \beta_\nu). \end{aligned} \quad (10.33)$$

Из формулы (10.33) для потока в континууме находим, очевидно,  $F_c = B_0 + \frac{2}{3} B_1$ , так что глубина линии в потоке равна

$$A_\nu = [\beta_\nu / (1 + \beta_\nu)] (1 + \frac{3}{2} (B_0/B_1))^{-1}. \quad (10.34)$$

Удобно ввести в рассмотрение параметр  $A_0$  — центральную глубину бесконечно сильной линии. Переходя к пределу  $\beta_\nu \rightarrow \infty$  в формуле (10.34), находим

$$A_0 = (1 + \frac{3}{2} (B_0/B_1))^{-1}, \quad (10.35)$$

т.е., по существу, тот же результат, что и (10.18). Формулу (10.34) теперь можно переписать так:

$$A_\nu = A_0 \beta_\nu / (1 + \beta_\nu). \quad (10.36)$$

Интегрируя  $A_\nu$  по частоте, можем теперь рассчитать эквивалентную ширину. Если принять, что линия симметрична относительно ее центра, то получим

$$W_\nu = \int_0^\infty A_\nu d\nu = 2A_0 \Delta\nu_D \int_0^\infty \beta(v) [1 + \beta(v)]^{-1} dv. \quad (10.37)$$

Но  $\beta(v) = (\chi_0/k_c) H(a, v) \equiv \beta_0 H(a, v)$ , так что если ввести приведенную эквивалентную ширину  $W^* = W/(2A_0 \Delta\nu_D)$ , будем иметь

$$W^*(a, \beta_0) = \int_0^\infty \beta_0 H(a, v) [1 + \beta_0 H(a, v)]^{-1} dv. \quad (10.38)$$

Прежде чем пытаться вычислить этот интеграл, рассмотрим качественно, как эволюционирует линия по мере увеличения числа поглощающих атомов. Вначале, когда число поглощающих частиц невелико, каждая из них будет способна выводить фотоны из поля излучения, и сила линии должна быть пропорциональна числу поглощающих атомов. Вклад в эквивалентную ширину дает только доплеровское ядро (где непрозрачность наибольшая). Крылья линии будут прозрачны и не будут ослаблять испускаемый в континууме поток. С ростом числа атомов, поглощающих в линии, в какой-то момент ядро становится полностью непрозрачным, и интенсивность в нем достигает своего предельного значения, даваемого выражением (10.35). Практически все фотоны, которые могут поглотиться в ядре линии, уже поглотились, и до тех пор, пока крылья линии остаются прозрачными, добавление поглощающих атомов мало увеличивает эквивалентную ширину линии. Ее называют *насыщенной*. Наконец, когда имеется достаточно много поглощающих атомов, крылья линии становятся заметно непрозрачными и эквивалентная ширина снова возрастает по мере роста вклада крыльев линии. Эти различные виды поведения показаны на рис. 10.1. Из приведенного обсуждения следует, что на кривой роста есть три существенно отличающиеся друг от друга области. Рассмотрим каждую из них по отдельности.

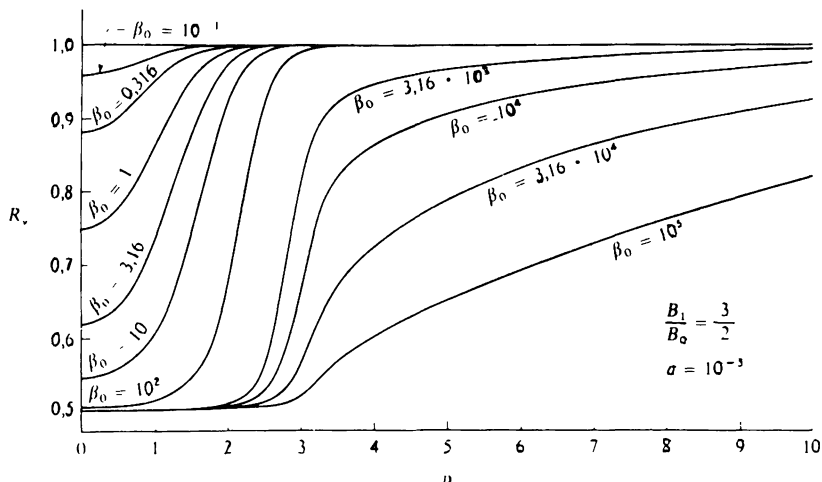


Рис. 10.1. Эволюция спектральной линии при увеличении числа атомов на луче зрения. Предполагается, что линия возникает за счет чистого поглощения. При  $\beta_0 \leq 1$  сила линии прямо пропорциональна числу поглощающих атомов. При  $30 \leq \beta_0 \leq 10^3$  линия насыщена, но крылья еще не начали развиваться. При  $\beta_0 \geq 10^4$  крылья у линии сильные, и ими определяется большая часть эквивалентной ширины.

Фойгтовский профиль можно грубо представить в виде  $H(a, v) \sim e^{-v^2} + \pi^{-1/2} a v^{-2}$  [формула (9.45)]. При этом считается, что в ядре при  $v \leq v^*$  берется только первый член, а в крыльях при  $v \geq v^*$  — только второй. За  $v^*$  принимается та переходная точка, где эти два члена равны.

Рассмотрим теперь вклад только от ядра линии. Считая, что  $\beta_0 < 1$ , можем написать  $\beta(v) = \beta_0 e^{-v^2}$ . Тогда формула (10.38) принимает вид

$$\begin{aligned} W^* &= \beta_0 \int_0^{\infty} e^{-v^2} [1 + \beta_0 e^{-v^2}]^{-1} dv = \\ &= \beta_0 \int_0^{\infty} e^{-v^2} (1 - \beta_0 e^{-v^2} + \dots) dv, \end{aligned} \quad (10.39)$$

или

$$W^* = \frac{1}{2} \pi^{1/2} \beta_0 \left[ 1 - \frac{\beta_0}{\sqrt{2}} + \frac{\beta_0^2}{\sqrt{3}} - \dots \right]. \quad (10.40)$$

При малых  $\beta_0$  (слабые линии) главную роль играет линейный член, и эквивалентная ширина линии прямо пропорциональна числу имеющих поглощающих атомов. Это так называемая *линейная часть* кривой роста. Отметим, что как  $\beta_0$ , так и  $W^*$  пропорциональны  $\Delta\nu_D^{-1}$ , а потому эквивалентная ширина на линейной части кривой роста не зависит от  $\Delta\nu_D$ .

На *насыщенном* участке кривой роста  $\beta_0$  достаточно велико, чтобы ядро линии уже достигло своей предельной глубины, но все же еще не настолько велико, чтобы крылья линии начали давать вклад в эквивалентную ширину. Здесь также  $\beta(v) = \beta_0 e^{-v^2}$ , если положить  $u = v^2$ , то  $dv = \frac{1}{2} u^{-1/2} du$  и формула (10.38) принимает вид

$$\begin{aligned} W^* &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \beta_0 e^{-u} (1 + \beta_0 e^{-u})^{-1} u^{-1/2} du = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (1 + e^{u-\alpha})^{-1} u^{-1/2} du, \end{aligned} \quad (10.41)$$

где обозначено  $\beta_0 = e^\alpha$ . Этот интеграл можно переписать в виде (см. [160], стр. 389)

$$2W^* = \int_0^{\infty} u^{-1/2} du + \alpha \int_0^{\infty} \frac{[\alpha(1+t)]^{1/2}}{1 + e^{\alpha t}} dt - \alpha \int_0^{\infty} \frac{[\alpha(1-t)]^{1/2}}{1 + e^{\alpha t}} dt. \quad (10.42)$$

Следуя Зоммерфельду, можно заменить верхний предел в третьем интеграле на  $\infty$  (поскольку  $\alpha \gg 1$ ) и разложить  $[\alpha(1+t)]^{1/2}$  в степенной ряд по  $t$ . Результат можно выразить в замкнутой форме через дзета-функцию Римана. Окончательно получается такое асимптотическое разложение:

$$W^* \approx \sqrt{\ln \beta_0} \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{24(\ln \beta_0)^2} - \frac{7\pi^4}{384(\ln \beta_0)^4} - \dots \right\}. \quad (10.43)$$

Это асимптотический (расходящийся) ряд, и его всегда нужно обрывать, беря лишь некоторое конечное число членов. Практически этим рядом можно пользоваться при  $\beta_0 \geq 55$ . Из формулы (10.43) ясно видно, что на *насыщенной*, или *плоской*, части кривой роста эквивалентная ширина растет с увеличением числа поглощающих атомов крайне медленно, именно  $W^* \propto \sqrt{\ln \beta_0}$ . Слабая зависимость  $W^*$  от  $\beta_0$  имеет своим следствием то, что на этой части кривой роста  $W$  практически пропорциональна  $\Delta\nu_D$ . Легко понять, почему это должно быть так: *глубина* профиля линии остается постоянной — она равна  $A_0$ , а потому проинтегрированное по линии поглощение должно быть пропорционально ширине линии, т.е. пропорционально  $\Delta\nu_D$  (см. рис. 10.1). Зависимость  $W$  от  $\beta_0$  можно понять также, если заметить, что для получения заметной депрессии в континууме оптическая глубина в линии должна становиться больше единицы до того, как достигает единицы оптическая глубина в континууме. Это происходит на частотах  $\nu > \nu_0$ , где  $\beta_0 \exp(-\nu^2) \approx 1$ . Видно, что  $\nu_0$ , определяющее ширину темного ядра линии (а потому и  $W^*$ ), изменяется как  $\sqrt{\ln \beta_0}$ .

Наконец, при очень большом числе поглощающих атомов крылья линии становятся достаточно непрозрачными, чтобы начать давать главный вклад в эквивалентную ширину. В крыльях можно принять  $H(a, \nu) \sim a/(\pi^{1/2}\nu^2)$ . Обозначив  $C = \beta_0 a \pi^{-1/2}$ , из формулы (10.38) находим

$$W^* = \int_0^{\infty} (1 + \nu^2/C)^{-1} d\nu = \frac{1}{2} \pi \sqrt{C} = \frac{1}{2} (\pi a \beta_0)^{1/2}. \quad (10.44)$$

Таким образом,  $W \propto \beta_0^{1/2}$ , что порождает так называемую *корневую*, или *обусловленную затуханием*, часть кривой роста. Отметим, что здесь и  $a$ , и  $\beta_0$  содержат множитель  $\Delta\nu_D$ , и поэтому на этой части кривой роста  $W$  также не зависит от  $\Delta\nu_D$ .

Целиком кривая роста показана на рис. 10.2. Обратите внимание, что чем больше величина параметра затухания  $a$ , тем раньше в

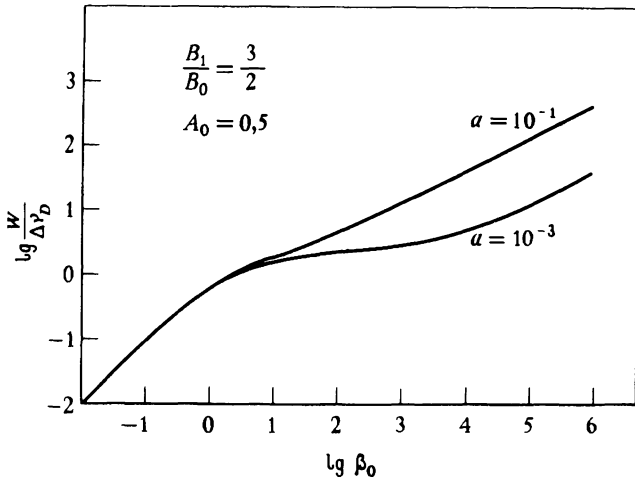


Рис. 10.2. Кривые роста для линий, возникающих за счет чистого поглощения. Обратите внимание, что чем больше значение  $\alpha$ , тем раньше часть кривой роста, обусловленная затуханием, отклоняется вверх от плоской части.

$W$  начинают доминировать крылья, а потому тем раньше корневая часть кривой роста начинает уходить вверх от плоского участка. Различные авторы рассчитали большое число кривых роста. Особенно удобный набор кривых роста был опубликован Врубелем для широкого диапазона параметров  $B_0$  и  $B_1$ , описывающих распределение температуры, при различных предположениях о модели атмосферы (модель Милна — Эддингтона или Шварцшильда — Шустера) и о механизме образования линий (поглощение или рассеяние); см. [687], [688], [689].

#### 10.4. Эмпирическая кривая роста

В течение долгого времени кривая роста была одним из излюбленных средств, использовавшихся астрономами для анализа условий в звездных атмосферах. Существует огромная литература, посвященная различным применениям этого подхода. Причина популярности кривой роста в том, что она легко и быстро дает оценки нескольких ключевых параметров, а также в том, что здесь используются только эквивалентные ширины. Они хорошо определяются из наблюдений даже для слабых звезд, у которых точно измерить профили было бы нельзя.

Как было установлено в § 10.3, теоретическая кривая роста дает