

11.2. Двухуровневый атом без континуума

ФУНКЦИЯ ИСТОЧНИКОВ

Рассмотрим схематическую модель атома, имеющего только два уровня (l и u), между которыми могут происходить радиативные и ударные переходы. Конечно, эта модель весьма несовершенна, но тем не менее для некоторых линий она дает достаточно хорошее описание реального положения дел. В частности, этой моделью хорошо описываются *резонансные линии*, возникающие при переходах из основного состояния, если взаимодействие и нижнего, и верхнего уровней с континуумом (а также верхнего уровня с другими уровнями) является слабым. Примем сейчас, что единственными источниками поглощения и излучения в частотах линии служат переходы в самой этой линии. Тогда уравнение переноса имеет вид

$$\mu \frac{dI_\nu}{dz} = [-n_l B_{lu} I_\nu + n_u (A_{ul} + B_{ul} I_\nu)] \phi_\nu (h\nu/4\pi). \quad (11.1)$$

Здесь сделано предположение о *полном перераспределении*, и поэтому профили поглощения и излучения совпадают. Введем шкалу оптических глубин, определяемую проинтегрированным по частоте коэффициентом поглощения в линии (он характеризует среднюю непрозрачность в линии в целом): $d\tau = -\chi_{lu} dz$, где

$$\begin{aligned} \chi_{lu} &= (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) (h\nu/4\pi) = \\ &= (\pi e^2/mc) f_{lu} [n_l - (g_l/g_u) n_u]. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Тогда

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau} = \phi_\nu (I_\nu - S_l), \quad (11.3)$$

где

$$S_l = n_u A_{ul} / (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) = (2h\nu^3/c^2) [n_g u / n_u g_l - 1]^{-1}, \quad (11.4)$$

причем второе равенство получается, если воспользоваться эйнштейновскими соотношениями между A и B [см. формулы (4.8) и (4.9)]. Изменение множителя ν^3 в пределах профиля ϕ_ν , имеющего узкий максимум, пренебрежимо мало. Поэтому функцию источников S_l считают *не зависящей от частоты*. Когда профиль излучения отличается от профиля поглощения, у S_l появляется явная зависимость от частоты (см. §2.1 и 13.4). Формула (11.4) дает функцию источников в *неявной форме*, так как населенности уровней в свою

очередь зависят от поля излучения. Эту зависимость можно получить в *явном виде*, если привлечь уравнения статистического равновесия, которые определяют n_l и n_u .

Уравнение стационарности для уровня l имеет вид

$$n_l(B_{lu}\int\phi_\nu J_\nu d\nu + C_{lu}) = n_u(A_{ul} + B_{ul}\int\phi_\nu J_\nu d\nu + C_{ul}). \quad (11.5)$$

Это уравнение можно использовать, чтобы найти выражение для n_l/n_u . Вводя это выражение в уравнение (11.4), привлекая соотношение $C_{lu} = (n_u/n_l)C_{ul}$, следующее из условия детального баланса при ТР, и пользуясь соотношениями Эйнштейна, сразу же получаем

$$S_l = [\int\phi_\nu J_\nu d\nu + \varepsilon' B_{ul}]/(1 + \varepsilon') \equiv (1 - \varepsilon)\bar{J} + \varepsilon B_{ul}, \quad (11.6)$$

где

$$\varepsilon' = C_{ul}(1 - e^{-h\nu/kT})/A_{ul} \quad (11.7)$$

$$\varepsilon = \varepsilon'/(1 + \varepsilon'). \quad (11.8)$$

Упражнение 11.1. Дать подробный вывод (11.6).

Каждый из членов выражения (11.6) допускает непосредственную физическую интерпретацию. Функция источников содержит член J , обусловленный *некогерентным рассеянием*, и член $\varepsilon' B_{ul}$, описывающий *тепловой источник*. Источниковый член εB_{ul} описывает фотоны, которые рождаются за счет возбуждений, вызванных столкновениями, с последующими радиативными переходами вниз. Слагаемое ε' в знаменателе описывает *сток* фотонов и учитывает те фотоны, которые *гибнут* при ударных переходах вниз, следующих за фотовозбуждениями. Связь между полем излучения и локальным тепловым состоянием газа целиком описывается этими двумя величинами. Можно считать, что член, описывающий рассеяние, представляет действие некоего *резервуара* фотонов, появление которого является конечным результатом совокупного влияния притока и стока энергии *в пределах всей характерной области взаимодействия*.

Ясно, что если плотность становится достаточно большой, то темп ударных переходов C_{ul} может в конце концов превзойти A_{ul} , так что ε' становится много больше единицы. Тогда $S_l \rightarrow B_{ul}(T)$, и мы приходим к ЛТР. Однако практически во всех случаях, представляющих астрофизический интерес, в области образования линий $\varepsilon' \ll 1$ и, вообще говоря, нельзя ожидать, что функция источников будет близка к функции Планка. То, что дело обстоит таким образом, в классической теории в какой-то мере учитывалось путем

подразделения линий на два класса — на возникающие за счет истинного поглощения и на линии, формируемые рассеянием. Такое подразделение, однако, не было вполне последовательным, а параметр, описывающий силу взаимодействия с тепловым резервуаром, должен был оцениваться из эвристических соображений. В нашем же анализе этот параметр взаимодействия получается из уравнения статистического равновесия непосредственно и однозначно. Кроме того, при классическом рассмотрении линий, возникающих при «чистом» рассеянии, зачастую делалось неверное утверждение, что малые источниковые члены можно отбросить. Важный момент, который следует иметь в виду, состоит в том, что даже если тепловой член $\epsilon'V$ локально и мал по сравнению с членом \bar{J} , описывающим рассеяние, при интегрировании по всей области взаимодействия вклады, обусловленные тепловым членом, суммируются и становятся существенными. Кроме того, на глубинах, превосходящих глубину термализации, излучение должно в конце концов приходиться в равновесие с тепловым резервуаром. Однако если тепловые члены отбросить, то уравнение переноса становится *однородным* по интенсивности и характерная амплитуда изменения решения (т.е. функции источников. — *Ред.*) *неизвестна*. По существу, масштаб изменения функции источников *фиксируется* именно (малыми) *тепловыми членами* там, где происходит термализация.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Имея выражение для функции источников, рассмотрим теперь решение уравнения переноса. Удобно работать с безразмерной частотой x , измеряемой от центра линии в единицах доплеровской ширины (а для лоренцевского профиля — в единицах ширины, обусловленной затуханием). В этой переменной профили линии записываются в следующем виде:

доплеровский

$$\phi(x) = \pi^{-1/2} e^{-x^2}, \quad (11.9a)$$

фойгтовский

$$\phi(x) = a\pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} [(x-y)^2 + a^2]^{-1} dy, \quad (11.9б)$$

лоренцевский

$$\phi(x) = (1/\pi)/(1+x^2). \quad (11.9в)$$

Все они нормированы так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1. \quad (11.10)$$

Будем считать, что множитель $\Delta\nu_D$ или $\Gamma/4\pi$ (в случае лоренцевского профиля) включен в χ , так что можно написать $d\tau = -\chi(z)dz$, где теперь $\chi_l = \chi_{lu}/\Delta\nu_D$, причем χ_{lu} дается формулой (11.2). Тогда

$$S(\tau) = [1 - \varepsilon(\tau)] \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau, x) \mathcal{J}(\tau, x) dx + \varepsilon(\tau) B(\tau), \quad (11.11)$$

и уравнение переноса принимает вид

$$\mu \frac{dI(\tau, x)}{d\tau} = \phi(\tau, x) [I(\tau, x) - S(\tau)]. \quad (11.12)$$

Введем теперь сетки дискретизации по углам и по частотам $\{\mu_m\}$ и $\{x_n\}$ и заменим интегралы квадратурными суммами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx \rightarrow \sum_{n=-N}^N a_n f(x_n) \quad (11.13a)$$

и

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu \rightarrow \sum_{m=-M}^M b_m f(\mu_m), \quad (11.13b)$$

причем узлы квадратур берутся симметрично, т.е. $x_{-n} = -x_n$ и $\mu_{-m} = -\mu_m$ (при этом $a_{-n} = a_n$ и $b_{-m} = b_m$). Тогда функцию источников можно записать в той же дискретизированной форме, которая была использована в гл. 6 [см. формулу (6.24a)]:

$$S_d = (1 - \varepsilon_d) \sum_n a_n \sum_m b_m u_{dmn} + \varepsilon_d B_d, \quad (11.14)$$

а уравнение переноса удастся свести к стандартного вида дифференциальному уравнению второго порядка

$$\mu_m^2 \frac{d^2 u_{mn}}{d\tau^2} = \phi_n^2 (u_{mn} - S), \quad (11.15)$$

где $u_\nu = \frac{1}{2} [I_\nu(+\mu) + I_\nu(-\mu)]$. Уравнение (11.15) можно дискретизировать по τ , взяв сетку $\{\tau_d\}$, и решить затем численно либо методом Фотрие, либо методом Райбки, которые обсуждались в § 6.3. Все входящие в уравнение параметры (ε , B и ϕ) могут зависеть от

глубины, что не вызовет каких-либо затруднений при вычислениях.

Другая возможность состоит в том, чтобы переписать уравнение переноса в *интегральной форме*. Формальное решение уравнения (11.12) есть

$$J(\tau, x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S(t) E_1(| \int_{\tau}^t \phi(t', x) dt' |) \phi(t, x) dt. \quad (11.16)$$

Если профиль изменяется с глубиной, аргумент функции E_1 будет зависеть от τ и от t порознь (а не от $\tau - t$. — *Ред.*). Это сильно усложняет анализ. Поэтому мы рассмотрим только случай, когда профиль с глубиной не изменяется. В этом случае E_1 зависит только от смещения $t - \tau$:

$$J(\tau, x) = \frac{1}{2} \phi(x) \int_0^{\infty} S(t) E_1(|t - \tau|) \phi(x) dt. \quad (11.17)$$

Подстановка этого выражения для J в соотношение (11.11) дает интегральное уравнение для S_j :

$$S(\tau) = [1 - \varepsilon(\tau)] \int_0^{\infty} S(t) K_1(|t - \tau|) dt + \varepsilon(\tau) B(\tau), \quad (11.18)$$

где ядерная функция K_1 дается формулой

$$K_1(s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(\phi_x s) \phi_x^2 dx = \int_0^{\infty} E_1(\phi_x s) \phi_x^2 dx. \quad (11.19)$$

Упражнение 11.2. Провести промежуточные выкладки при выводе уравнения (11.18).

Упражнение 11.3. а) Показать, что $K_1(s)$ нормировано так, что $\int_0^{\infty} K_1(s) ds = \frac{1}{2}$. б) Пользуясь этим, показать, что $S(\tau) \rightarrow B$ при $\tau \rightarrow \infty$. При выводе учесть, что $S(\tau)$ при больших τ должна быть медленно меняющейся функцией и потому ее можно вынести из-под знака интеграла.

Численные методы решения уравнений вида (11.18) подробно обсуждаются в [52] и в [18], гл.8. Во многих отношениях они напоминают метод Райбики решения дифференциальных уравнений, хотя в случае, когда профиль зависит от глубины, метод Райбики применять проще. По существу, решение получается путем введения функционального представления $S(\tau)$ на дискретной сетке $\{\tau_d\}$. Эти функции домножаются на ядро и интегрируются, что приводит к

окончательной системе уравнений вида

$$\mathbf{S} = \mathbf{KS} + \mathbf{L}, \quad (11.20)$$

где $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_d, \dots, S_D)$ описывает изменение функции источников с глубиной. Эта система решается затем стандартными численными методами.

Одно из достоинств подхода, использующего интегральное уравнение, состоит в том, что здесь непосредственно видно, что вид функции источников в конечном счете определяется характером ядерной функции. Аналитическое исследование свойств ядра позволяет многое понять. В частности, *асимптотическое поведение* $K_1(s)$ при $s \gg 1$ показывает, что характерной чертой задач об образовании линий при некогерентном рассеянии является наличие *крупномасштабного взаимодействия* одной части атмосферы с другой. Напомним, что при *когерентном рассеянии* ядерная функция есть $E_1(|t - \tau|)$ [см. формулу (2.57) и упражнение 2.10]. Это ядро стремится к нулю очень быстро. Оно спадает как $\exp(-|t - \tau|)/|t - \tau|$, накладывая тем самым очень сильные ограничения на то предельное расстояние по глубине между двумя точками, в пределах которого они непосредственно связаны, обмениваясь рассеиваемыми фотонами. В противоположность этому асимптотическое поведение $K_1(s)$ оказывается следующим ([53], приложение 1): при доплеровском профиле

$$K_1(s) \sim 1/\{4s^2[\ln s^2/\pi^{1/2}]^{1/2}\},$$

при фойгтовском профиле

$$K_1(s) \sim a^{1/2}/6s^{3/2}$$

и при лоренцевском профиле

$$K_1(s) \sim 1/6s^{3/2}.$$

Очевидно, что для этих ядерных функций характерный масштаб очень велик по сравнению с характерным масштабом при когерентном рассеянии. Это приводит к тому, что поля излучения в двух далеко разнесенных точках среды становятся взаимозависимыми.

Физической причиной медленного убывания ядерных функций при некогерентном рассеянии служит, конечно же, перераспределение фотонов по частотам, ведущее к их уходу в прозрачные крылья линии. При когерентном рассеянии каждый фотон, поглощенный в ядре, в нем же и переизлучается. Поэтому для него непрозрачность всегда велика, и он остается запертым. При некогерентном рассеянии фотон имеет некоторую вероятность быть излученным в

крыльях, где из-за меньшей непрозрачности он может сместиться на большое геометрическое расстояние (а потому и на большое соответствующее ему оптическое расстояние в центре линии), прежде чем он снова будет поглощен.

ДЛИНА ТЕРМАЛИЗАЦИИ

Рассмотрим теперь поведение функции источников в такой атмосфере, где ε и B не зависят от глубины. Понятно, что это очень схематичный случай, но он позволяет многое понять. В этой задаче одной из самых важных подлежащих определению характеристик является *глубина термализации*, на которой функция источников в линии становится близка к функции Планка B . Выражение для длины термализации можно получить весьма разными методами, в том числе: а) из анализа асимптотического поведения решения интегрального уравнения (11.18); б) из рассмотрения функции распределения тех расстояний, которые фотон может пролететь от места своего рождения до места гибели [545], [322]; в) путем расчета распределения вероятности выхода фотона, родившегося в заданной точке в среде, через ее границу [214], [215], [216]. Один из самых простых и в то же время самых привлекательных способов вывода основан на физических соображениях, приведенных в § 11.1 и сводящихся к тому, что глубина термализации Λ должна быть расположена недалеко от той точки в атмосфере, для которой *вероятность выхода фотона* $P_e(\Lambda)$ вслед за актом рассеяния равна *вероятности его гибели* P_d [28].

Для строго двухуровневого атома при полном отсутствии поглощения в континууме вероятность гибели в расчете на одно рассеяние равна

$$P_d = C_{ul}/(A_{ul} + C_{ul}) = \varepsilon, \quad (11.21)$$

где ε определяется формулами (11.7) и (11.8) (вынужденное излучение для простоты не учитывается). Чтобы получить вероятность прямого выхода, нужно вероятность $\exp(-\tau\phi_x/\mu)$ выхода фотона на частоте x вдоль луча, образующего угол $\arccos\mu$ с нормалью, проинтегрировать по всем углам и частотам с весом ϕ_x , представляющим собой вероятность излучения на частоте x в пределах линии:

$$\begin{aligned} P_e(\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_x \int_0^1 e^{-\tau\phi_x/\mu} d\mu = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_x \int_1^{\infty} e^{-(\tau\phi_x)v} v^{-2} dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_2(\tau\phi_x) \phi_x dx. \end{aligned} \quad (11.22)$$

При $\tau \gg 1$ интегральная показательная функция E_2 близка к нулю при $|x| \leq x_1$, где $\phi(x_1)\tau = 1$, и к единице при $|x| > x_1$. Физически это означает, что в ядре, т.е. там, где $\tau\phi_x > 1$, фотоны заперты, а в крыльях, где $\tau\phi_x < 1$, они свободно выходят. Поэтому $P_e(\tau)$ можно аппроксимировать следующим образом:

$$P_e(\tau) \approx \int_{x_1}^{\infty} \phi_x dx. \quad (11.23)$$

При $x_1 \gg 1$ (что имеет место при $\tau \gg 1$) этот интеграл легко вычисляется. Непосредственная подстановка выражений (11.9) дает

$$P_e(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(x_1) \approx e^{-x_1^2}/2\pi^{1/2}x_1 \quad (\text{Доплер}), \quad (11.24a)$$

$$P_e(\tau) = a/\pi x_1 \quad (\text{Фойгт}), \quad (11.24б)$$

$$P_e(\tau) = 1/\pi x_1 \quad (\text{Лоренц}). \quad (11.24в)$$

При получении формулы (11.24б) было использовано асимптотическое выражение для функции Фойгта [см. формулу (9.45)]. Далее, условие $\phi_{x_1}\tau = 1$ дает

$$x_1 = (\ln \tau / \pi^{1/2})^{1/2} \quad (\text{Доплер}), \quad (11.25a)$$

$$x_1 = (a\tau/\pi)^{1/2} \quad (\text{Фойгт}), \quad (11.25б)$$

$$x_1 = (\tau/\pi)^{1/2} \quad (\text{Лоренц}). \quad (11.25в)$$

Поэтому, подставляя выражения (11.25) в (11.24), полагая при этом, что $P_e(\Lambda) = P_d = \varepsilon$, и разрешая получающиеся равенства относительно Λ , находим

$$\Lambda \approx c/\varepsilon \quad (\text{Доплер}), \quad (11.26a)$$

$$\Lambda \approx a/\varepsilon^2 \quad (\text{Фойгт}), \quad (11.26б)$$

$$\Lambda \approx 1/\varepsilon^2 \quad (\text{Лоренц}), \quad (11.26в)$$

где c — число порядка единицы, слабо зависящее от ε . Другие множители порядка единицы мы опустили.

Упражнение 11.4. Показать, что для профиля, имеющего при больших x асимптотику $\phi_x \sim cx^{-\alpha}$, где $\alpha > 1$, зависимость длины термализации от ε есть $\Lambda \sim \varepsilon^{-\beta}$, где $\beta = \alpha/(\alpha - 1)$.

Важнейшей характерной чертой результата, выражаемого формулами (11.26), является то, что для линии с малым ε глубина термализации *чрезвычайно велика*. Напомним, что при когерентном

рассеянии глубина термализации $\sim \varepsilon^{-1/2}$ (см. § 6.1 и 10.2). Ясно, что влияние некогерентности, проявляющееся, в частности в усилении роли фотонов, диффундирующих в крыльях, приводит к значительному увеличению той глубины в атмосфере, в пределах которой функция источников может отклоняться от локальной функции Планка. И действительно, сопоставление между собой формул (11.26а) — (11.26в) сразу же показывает, что увеличение относительной роли крыльев линии в профиле прямо ведет к увеличению глубины термализации. Следует, однако, подчеркнуть, что вышеприведенные результаты непосредственно справедливы лишь при двух предположениях: а) отсутствует поглощение в континууме и б) имеется полное перераспределение по частотам. Ниже в этом разделе будет показано, что поглощение в континууме может сильно уменьшать Λ . В гл. 13 будет установлено, что в случае резонансных линий рассеяние в сильных крыльях, обусловленных затуханием излучения, является почти когерентным и выражение (11.26а) лучше аппроксимирует Λ , чем (11.26б)

С математической точки зрения формулы (11.26) показывают, что при малых ε попытка получить решение уравнения переноса методом итераций, взяв в качестве начального приближения ЛТР, была бы *тщетной* (еще в гораздо большей мере, чем в случаях, уже обсуждавшихся в § 6.1), и правильные значения функции источников и интенсивности могут дать только *прямые методы* решения уравнения переноса.

ГРАНИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ И ЕЕ ИЗМЕНЕНИЕ С ГЛУБИНОЙ

Выше было показано, что функция источников может сильно отличаться от функции Планка вплоть до больших глубин в атмосфере. Выясним теперь, какова ее величина около границы полубесконечной атмосферы. Если считать, что ε и B не зависят от глубины, то уравнение переноса (11.12) легко решить методом дискретных ординат [53]; [476]. Положив $\lambda_n = 1/\phi(x_n)$, будем иметь следующую систему уравнений:

$$\lambda_n \mu_m \frac{dI_{mn}}{d\tau} = I_{mn} - \frac{1}{2} (1 - \varepsilon) \sum_{n'=-N}^N a_{n'} \sum_{m'=-M}^M b_{m'} I_{m'n'} - \varepsilon B. \quad (11.27)$$

Рассмотрим сначала однородное уравнение ($B = 0$). Будем искать его решение в виде $I_{mn} = g_{mn} \exp(-k\tau)$. В результате найдем, что

$$I_{mn} = c(1 + k\lambda_n \mu_m)^{-1} e^{-k\tau}, \quad (11.28)$$

где постоянные k — корни характеристического уравнения

$$2(1 - \varepsilon) \sum_{n=1}^N a_n \sum_{m=1}^M b_m (1 - k^2 \lambda_n^2 \mu_m^2)^{-1} = 1. \quad (11.29)$$

Упражнение 11.5. а) Получить выражение (11.28). б) Показать, что уравнение (11.29) действительно есть характеристическое уравнение системы (11.27).

При $\varepsilon = 0$ характеристическое уравнение имеет корень $k^2 = 0$. При $\varepsilon > 0$ значения k^2 должны быть больше нуля. Подобно тому как это было ранее при использовании метода дискретных ординат (§3.3, 7.4), и здесь корни расположены между полюсами, находящимися при $k^2 = 1/\lambda_n^2 \mu_m^2$. Если эти полюсы занумеровать в порядке уменьшения значений $\lambda_n \mu_m$, то можно написать

$$0 < k_1^2 < (\lambda_1 \mu_1)^{-2} < k_2^2 < \dots < k_{MN}^2 < (\lambda_N \mu_M)^{-2}, \quad (11.30)$$

откуда следует, что корни можно без труда получить, найдя их расположение в пределах соответствующих конечных интервалов. Эти корни также удобно занумеровать, придав им индекс α , $1 \leq \alpha \leq MN$. Из рассмотрения характеристического уравнения, подобного тому, которое было использовано для вывода соотношения (3.65), легко показать, что

$$\prod_{\alpha=1}^{MN} (k_\alpha \lambda_n \mu_m)^2 = \varepsilon. \quad (11.31)$$

Этот результат будет использован ниже. При $B = \text{const}$ система (11.27) имеет частное решение $I_{mn} = B$. Поэтому общее решение должно иметь вид

$$I_{mn} = B \left[1 + \sum_{\alpha=1}^{MN} L_\alpha e^{-k_\alpha r} (1 + k_\alpha \lambda_n \mu_m)^{-1} \right], \quad (11.32)$$

причем члены с возрастающими экспонентами отброшены, чтобы обеспечить ограниченность решения на бесконечности. Граничное условие на поверхности есть, как обычно, $I_{mn}(-\mu_m) = 0$. Если ввести функцию

$$\mathcal{J}(x) = 1 + \sum_{\alpha=1}^{MN} L_\alpha (1 - k_\alpha x)^{-1}, \quad (11.33)$$

то граничное условие на поверхности можно выразить в форме $\mathcal{J}(\lambda_n \mu_m) = 0$ при $m = 1, \dots, M$ и $n = 1, \dots, N$. Эту систему ли-

нейных уравнений можно разрешить численно относительно величин L_α . Подставляя (11.32) в выражение для S_I , стоящее в правой части уравнения (11.27), и пользуясь характеристическим уравнением (11.29), находим

$$S_I(\tau) = B(1 + \sum_{\alpha=1}^{MN} L_\alpha e^{-k_\alpha \tau}). \quad (11.34)$$

В частности, на поверхности

$$S_I(0) = B(1 + \sum_{\alpha=1}^{MN} L_\alpha) = B\mathcal{S}(0). \quad (11.35)$$

Далее, применяя рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы для вывода формул (3.70) и (7.104), можно показать, что

$$\mathcal{S}(x) = [\prod_{\alpha=1}^{MN} k_\alpha \prod_{n=1}^N \prod_{m=1}^M (\lambda_n \mu_m - x)] / \prod_{\alpha=1}^{MN} (1 - k_\alpha x). \quad (11.36)$$

Пользуясь соотношением (11.31), находим отсюда, что

$$\mathcal{S}(0) = \prod_{\alpha=1}^{MN} (k_\alpha \lambda_n \mu_m) = \varepsilon^{1/2}. \quad (11.37)$$

Упражнение 11.6. а) Вывести соотношение (11.31). б) Получить выражение (11.34). в) Вывести формулу (11.36).

Подставляя (11.37) в (11.35), приходим окончательно к чрезвычайно важному результату:

$$S_I(0) = \varepsilon^{1/2} B. \quad (11.38)$$

Этот результат не зависит от числа членов в квадратурной сумме и от вида профиля, а потому является точным. Из полученных до сих пор результатов самыми важными с точки зрения физики являются формулы (11.38) и (11.26). Суть этих формул можно словесно кратко сформулировать так: когда взаимодействие между процессом излучения в линии и тепловым ансамблем слабое ($\varepsilon \ll 1$), функция источников может *чрезвычайно сильно* отклоняться от равновесного теплового значения, причем эти отклонения могут простираются до *больших глубин* в атмосфере. Отметим, что значение функции источников на границе превышает тепловой член, определяющий темп истинного рождения фотонов, в $1/\varepsilon^{1/2}$ раз. Отсюда вытекает, что значение $S_I(0)$ определяется главным образом фото-

нами, поглощаемыми в крыльях линии. Эти фотоны зарождаются в глубоких слоях атмосферы, где $S_i(\tau) \gg S_i(0)$. Поэтому ясно, что *граничное значение S_i не имеет почти ничего общего с локальным значением теплового источникового члена, доминирующую же роль играют нелокальные эффекты.*

Результаты численных расчетов изменения $S_i(\tau)$ с глубиной показаны на рис. 11.1 и 11.2. Графики рис. 11.1 относятся к полубесконечной атмосфере, постоянной функции Планка ($B = 1$), доплеровскому профилю ($a = 0$) и различным значениям ε . Видно, что во всех случаях $S_i(0) = \varepsilon^{1/2}$ и что S_i приближается к B при $\tau \approx 1/\varepsilon$. Результаты, показанные на рис. 11.2, относятся к линиям с $\varepsilon = 10^{-4}$, имеющим различные фойгтовские профили — от чисто доплеровского вплоть до лоренцевского ($a = \infty$). Четко видно возрастание глубины термализации от ε^{-1} до ε^{-2} . Функции источников, изображенные на рис. 11.1 и 11.2, будут порождать *линии поглощения*, остаточная интенсивность в ядрах которых очень мала. В противоположность этому решение $S_i = B$, отвечающее ЛТР, не дало бы вообще *никакой линии*. Это различие можно приписать влиянию рассеяний. Согласно классической теории (когерентное рассеяние. — *Ред.*), при том же ε также должна была бы образовываться линия, имеющая ту же самую центральную глубину. Однако два важных различия все же имеются: а) населенности как верхнего, так и нижнего уровня отличаются от их значений при ЛТР. Во

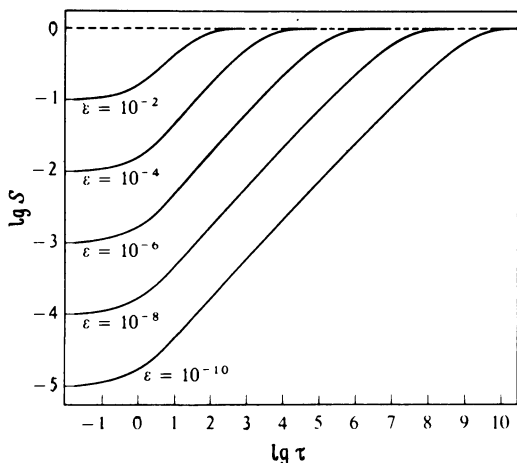


Рис. 11.1. Функции источников в линии в полубесконечной атмосфере при $B = 1$ для линии с чисто доплеровским профилем ($a = 0$) при различных значениях ε . (По [53], с разрешения.)

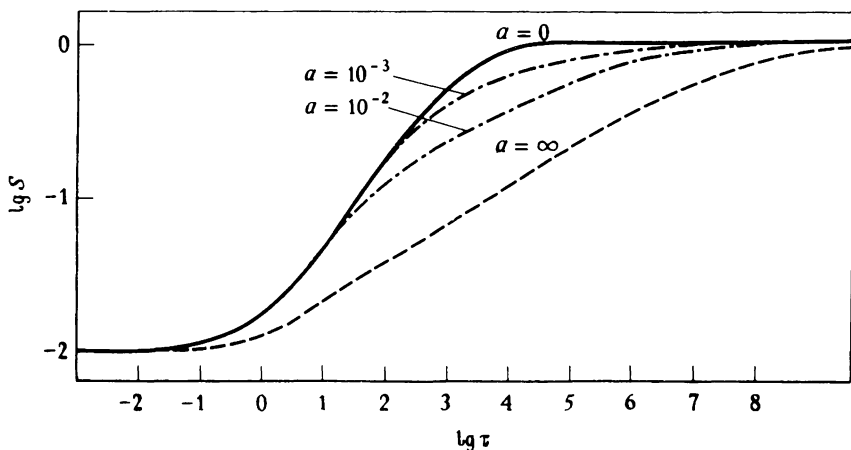


Рис. 11.2. Функции источников в линии в полубесконечной атмосфере при $B = 1$ для линий с $\epsilon = 10^{-4}$ при различных фойгтовских профилях — от чисто доплеровского ($a = 0$) до чисто лоренцевского ($a = \infty$). (По [53], с разрешения.)

многих ранних расчетах на основе модели «рассеяния» (ошибочно) брали равновесные населенности. б) При принятии *некогерентного* рассеяния темная часть профиля, обусловленная отклонениями от ЛТР, шире. Согласно соотношению Эддингтона — Барбье, $I_\nu(0) \sim S_l(\tau_\nu = 1)$. Поэтому линии будут темными при $|x| \leq x_1$, где $\Delta\phi_{x_1} = 1$. Так как при некогерентном рассеянии значения Λ гораздо больше (от ϵ^{-1} до ϵ^{-2} , а не $\epsilon^{-1/2}$), соответствующие значения x_1 также будут больше. К этому вопросу мы еще вернемся в § 11.5. Наконец, следует отметить, что полученные сейчас решения являются *точными* самосогласованными решениями, которые одновременно удовлетворяют и уравнению переноса, и уравнениям статистического равновесия. Любой подход, в котором такой взаимосогласованности решений нет, является неудовлетворительным.

СЛОЙ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Атмосфера в виде *слоя конечной толщины* T представляет собой важную для астрофизики модель. Ее можно использовать для описания туманностей или некоторых ограниченных зон звездной атмосферы, в пределах которых из-за изменения ионизации с глубиной тот или иной ион только и встречается (например, формирование хромосферных линий, скажем He II, происходит в слое, ограниченном сверху короной, а снизу — фотосферой). Для конечных

атмосфер возможно существование двух физически различных ситуаций соответственно тому, является ли атмосфера *эффективно толстой* или *эффективно тонкой*. Если $T \gg \Lambda$, то из середины слоя фотоны почти не будут успевать выйти, прежде чем они испытывают термализацию. В этом случае $S_i(0)$ будет почти достигать значения, которое она имеет в полубесконечной атмосфере при том же ε , а на расстояниях $\geq \Lambda$ от границ она будет приближаться к B . Если, наоборот, $T \ll \Lambda$, то термализация несущественна и $S_i(\tau)$ становится пропорциональной локальной мощности первичных источников, т.е. $S_i(\tau) = \varepsilon B f(\tau)$, где $f(\tau)$ для данного T не зависит от ε .

Оценку S_i в середине слоя можно получить следующим образом (см. также [28]). Отношение *полного* числа актов излучения в столбе единичного сечения, проходящем через весь слой, к числу актов излучения вслед за *тепловым возбуждением* должно быть равно среднему числу рассеяний $\langle N \rangle$, испытываемых фотоном до его выхода или гибели, т.е.

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} d\nu (4\pi h\nu\phi_\nu) \int_0^T S_i(\tau) d\tau / \int_{-\infty}^{\infty} d\nu (4\pi h\nu\phi_\nu) \int_0^T \varepsilon(\tau) B(\tau) d\tau \\ &= \int_0^T S_i(\tau) d\tau / \int_0^T \varepsilon(\tau) B(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (11.39)$$

Здесь мы воспользовались тем, что по определению $\eta_\nu = \chi_\nu S_\nu$, и учли, что S_i не зависит от частоты. Для конечного (эффективно тонкого. — *Ред.*) слоя основным механизмом выбывания фотонов является их выход, и поэтому

$$\langle N \rangle \sim [P_e(T)]^{-1}.$$

В середине слоя

$$P_e(T) \approx [2P_e(\frac{1}{2} T)]_\infty,$$

где индексом ∞ отмечена вероятность выхода с указанной глубины из полубесконечного слоя, а множитель 2 учитывает возможность выхода через обе границы конечного слоя. Чтобы из формулы (11.39) получить порядковую оценку, заменим $S_i(\tau)$ на $S_{\max} = S(\frac{1}{2} T)$ и примем, что εB постоянно, так что $\langle N \rangle \approx S_{\max} / \varepsilon B$. Воспользовавшись для вычисления $P_e(T)$ (11.24) и (11.25) и, как и выше, пренебрегая численными множителями порядка единицы, найдем тогда

$$S_{\max} \approx \varepsilon T (\ln T)^{1/2} B \quad (\text{Доплер}), \quad (11.40a)$$

$$S_{\max} \approx \varepsilon (T/a)^{1/2} B \quad (\text{Фойгт}), \quad (11.40b)$$

$$S_{\max} \approx \varepsilon T^{1/2} B \quad (\text{Лоренц}). \quad (11.40\text{в})$$

Описанное выше поведение очень четко проявляется в численных результатах, показанных на рис. 11.3 [53]. На нем приведены графики $S_l(\tau)$ для линий с доплеровским профилем ($a = 0$) при различных значениях ε для атмосферы с $T = 10^4$. Пунктиром показано решение для полубесконечной атмосферы с $\varepsilon = 10^{-4}$. Можно видеть, что при $\varepsilon \geq 10^{-4}$ решения для конечного слоя близки к решениям для полубесконечной атмосферы при том же ε , тогда как при $\varepsilon < 10^{-4}$ атмосфера становится эффективно тонкой. Кривая S_l проходит при этом ниже соответствующей кривой для полубесконечного слоя, причем значения S_l практически пропорциональны ε . На рис. 11.4 для линий с $\varepsilon = 10^{-4}$ приведены интенсивности выходящего излучения при различных значениях a и T . При $T = \infty$ во всех случаях получается линия поглощения, причем центральная интенсивность не зависит от a . Для конечных атмосфер получаются эмиссионные линии, так как при достаточно больших x (в крыле линии) среда становится все более прозрачной, а интенсивность должна стремиться к нулю. При меньших x интенсивность быстро

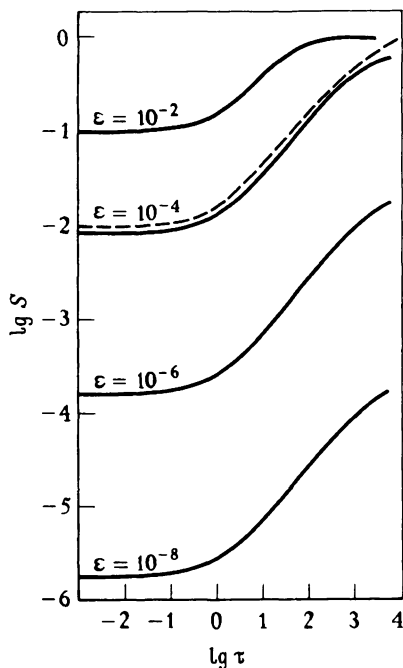


Рис. 11.3. Функции источников в линии в конечных атмосферах оптической толщины $T = 10^4$ при $B = 1$ для линии с чисто доплеровским профилем ($a = 0$). Штриховая линия соответствует решению для полубесконечной атмосферы с $\varepsilon = 10^{-4}$. Отметим, что $S_l(\tau)$ симметрично относительно $T/2$ (из-за использования логарифмического масштаба по оси абсцисс значения $S_l(\tau)$ при $\tau > T/2$ не нанесены). (По [53], с разрешения.)

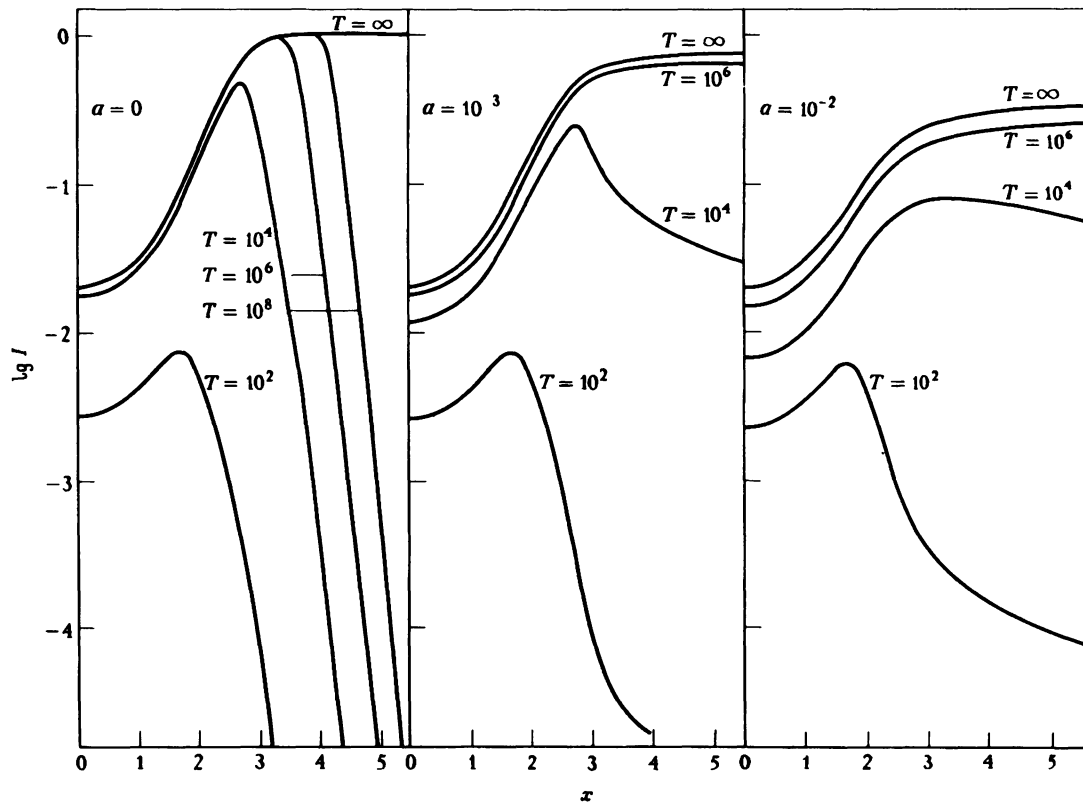


Рис. 11.4. Интенсивность излучения, выходящего из конечной и полубесконечной атмосфер, при доплеровском и фойгтовском профилях и $\epsilon = 10^{-4}$. (По [53], с разрешения.)

возрастает и для эффективно толстых атмосфер достигает насыщения, приближаясь к значению, которое она имеет для полубесконечной атмосферы. Наконец, в ядре линии рассеяние ведет к появлению самообращения. Профили, показанные на рис. 11.4, сильно напоминают профили, наблюдающиеся у лабораторных эмиссионных источников с насыщенными линиями, а также те, которые порождаются горячими хромосферными слоями, лежащими над сравнительно холодной фотосферой.

ЭФФЕКТЫ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ КONTИНУУМОМ, НАЛАГАЮЩИМСЯ НА ЛИНИЮ

Все приведенное в этом разделе обсуждение основывалось на предположении, что единственным источником непрозрачности является поглощение в самой линии. Однако почти во всех случаях, представляющих интерес для астрофизики, линия будет налагаться на континуум, служащий для нее фоном. Как отмечалось в § 11.1, наличие такого фонового континуума влияет на вероятность гибели фотона P_d и ведет к появлению верхнего предела у длины свободного пробега фотона и у длины пути, проходимой фотоном до его гибели. Поэтому следует ожидать, что и у глубины термализации будет существовать верхний предел, обусловленный процессами взаимодействия с континуумом. Кроме того, континуум служит дополнительным источником излучения в линии. Детальное исследование задачи об образовании линии при наличии континуума, на который налагается линия, было дано в [315] для идеализированных задач, аналогичных тем, которые были рассмотрены выше для случая, когда континуума нет. В этом разделе будут кратко изложены результаты этой работы.

Для простоты рассмотрим полубесконечную атмосферу и предположим, что коэффициенты поглощения в линии и в континууме χ_l и χ_c , профиль поглощения ϕ_x , параметр эффективности термализации ϵ и функция Планка B не зависят от глубины (все эти предположения можно отбросить, если используется численный подход и применяются методы решения типа метода Фотрие или Райбики). Уравнение переноса имеет вид

$$\mu \frac{dl_\lambda}{dz} = -(\chi_c + \chi_l \phi_x) I_x + \chi_l \phi_x S_l + \chi_c B. \quad (11.41)$$

Если оптическую глубину ввести через коэффициент поглощения в линии $d\tau = -\chi_l dz$ (тем самым подразумевается, что континуум

рассматривается как возмущение) и положить $r = \chi_c/\chi_l$, то уравнение (11.41) перейдет в следующее:

$$\mu \frac{dI_x}{d\tau} = (\phi_x + r)(I_x - S_x), \quad (11.42)$$

где

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{(1 - \varepsilon)\phi_x}{\phi_x + r} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{x'} J_{x'} dx' + \frac{\varepsilon\phi_x + r}{\phi_x + r} B = \\ &= (1 - \xi_x) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{x'} J_{x'} dx' + \xi_x B \end{aligned} \quad (11.43)$$

и

$$\xi_x = (\varepsilon\phi_x + r)/(\phi_x + r). \quad (11.44)$$

Легко видеть, что ξ_x представляет собой *полную вероятность гибели* фотона частоты x , так как ξ_x есть сумма а) вероятности $\phi_{x'}/(\phi_x + r)$ того, что фотон будет поглощен в линии, умноженной на вероятность ε того, что фотон линии погибнет за счет столкновений, и б) вероятности $r/(\phi_x + r)$ того, что фотон будет поглощен в континууме, умноженной на единицу — вероятность его гибели в этом случае. Формальное решение уравнения переноса (11.42) дает

$$\begin{aligned} J_x(\tau) &= (\phi_x + r) \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S_x(t) E_1(|t - \tau|(\phi_x + r)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \phi_x \int_0^{\infty} S_x(t) E_1(|t - \tau|(\phi_x + r)) dt + \\ &+ \frac{1}{2} rB \int_0^{\infty} E_1(|t - \tau|(\phi_x + r)) dt. \end{aligned} \quad (11.45)$$

Решение, даваемое выражением (11.45), можно было бы подставить в (11.43), что дало бы интегральное уравнение для полной функции источников $S_x(\tau)$. Однако получающееся в результате уравнение было бы двумерным (интегрирования по τ и по x), и пользоваться им для решения задачи было бы нецелесообразно. Вместо этого можно получить уравнение для $S_x(\tau)$. Если же функция источников в линии известна, то можно рассчитать и искомую полную

функцию источников

$$S_x = (\phi_x S(\tau) + rB)/(\phi_x + r).$$

Чтобы получить уравнение для $S(\tau)$, найдем интеграл $\int \phi_x J_x dx$, воспользовавшись выражением (11.45). Подстановка результата в формулу (11.11) дает

$$S(\tau) = (1 - \varepsilon)(1 - \delta) \int_0^{\infty} S(t) K_{1,r}(|t - \tau|) dt + \\ + (1 - \varepsilon)\delta B \int_0^{\infty} L_{1,r}(|t - \tau|) dt + \varepsilon B, \quad (11.46)$$

где

$$\delta = r \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x (\phi_x + r)^{-1} dx, \quad (11.47)$$

$$K_{1,r}(s) = \frac{1}{2} (1 - \delta)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} E_1[(\phi_x + r)s] \phi_x^2 dx, \quad (11.48)$$

$$L_{1,r}(s) = \frac{1}{2} r \delta^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} E_1[(\phi_x + r)s] \phi_x dx. \quad (11.49)$$

Коэффициенты, стоящие перед интегралами, которыми определяются фигурирующие здесь ядерные функции, выбраны так, что они обеспечивают нормировку ядер.

Упражнение 11.7. а) Получить уравнение (11.46). б) Показать, что $\lim_{r \rightarrow 0} (\delta/r) = \infty$, $\lim_{r \rightarrow 0} (1 - \delta) \rightarrow 1$ и поэтому $\lim_{r \rightarrow 0} L_{1,r}(\tau) = 0$ и $\lim_{r \rightarrow 0} K_{1,r}(\tau) = K_1(\tau)$, где $K_1(\tau)$ определяется формулой (11.19). в) Показать, что $K_{1,r}$ и $L_{1,r}$ нормированы так, что $\int_0^{\infty} K_{1,r}(\tau) d\tau = \frac{1}{2}$ и $\int_0^{\infty} L_{1,r}(\tau) d\tau = \frac{1}{2}$. г) Пользуясь (в), показать, что $S(\tau) \rightarrow B$ при $\tau \rightarrow \infty$. Воспользоваться тем, что $S(\tau)$ при больших τ изменяется медленно и потому может быть вынесена из-под знака интеграла.

Физический смысл уравнения (11.46) становится ясным, если ввести среднюю вероятность гибели фотона

$$\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x \xi_x dx = \delta + \varepsilon(1 - \delta). \quad (11.50)$$

Тогда $1 - \xi = (1 - \varepsilon)(1 - \delta)$ и уравнение (11.46) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} S_A(\tau) &= (1 - \xi) \int_0^{\infty} S_A(t) K_{1,r}(|t - \tau|) dt + \\ &+ (\xi - \varepsilon) B \int_0^{\infty} L_{1,r}(|t - \tau|) dt + \varepsilon B = \\ &= (1 - \xi) \int_0^{\infty} S_A(t) K_{1,r}(|t - \tau|) dt + \xi B_{\text{эфф}}(\tau). \end{aligned} \quad (11.51)$$

В первой из двух приведенных форм записи уравнения (11.51) первый член описывает, очевидно, рассеяние в линии, причем полная вероятность гибели фотона равна ξ . Второй член учитывает фотоны, появляющиеся в линии из континуума, третий — те фотоны, которые возникают за счет ударных процессов. Как и в случае, когда принималось, что континуума нет вовсе, изменение функции источников с глубиной будет определяться свойствами ядерных функций. Вопрос о том, как происходит термализация, можно выяснить путем аналитического исследования асимптотического поведения $K_{1,r}$ и $L_{1,r}$ [315]. С другой стороны, вторая форма записи уравнения (11.51) показывает, что при наличии континуума задача сохраняет ту же форму, что и в случае, когда есть только переходы в линии. Единственное отличие состоит в том, что константа, характеризующая взаимодействие между полем излучения и тепловым резервуаром, равна не ε , а ξ . Поэтому если воспользоваться той же схемой рассуждений, что и выше, но взять в качестве P_d величину ξ , то найдем, что *глубина термализации по-прежнему дается выражениями (11.26)*, в которых, однако, ε заменено на ξ . Значения ξ и Λ при $\varepsilon = 10^{-6}$ для различных значений r и a приведены в табл. 11.1. Бросающийся в глаза результат, который отсюда вытекает, состоит в том, что ξ *может сильно превосходить ε* , даже когда $r \leq \varepsilon$. Следствием этого является огромное уменьшение Λ . Эти результаты показывают, что континуум, ограничивая возможность переноса фотонов в крыльях линии, может играть доминирующую роль в процессе термализации в линии. Отметим также, что, когда $r \geq \varepsilon$, значение ξ уже достаточно велико, чтобы гарантировать неравенство $\Lambda < r^{-1}$. Это так и должно быть, поскольку из физических соображений следует, что на расстояниях, превосходящих r^{-1} , будет происходить термализация в континууме. Поэтому формулы (11.26), в которых ε заменено на ξ , не содержат внутренних противоречий.

ТАБЛИЦА 11

Средняя вероятность гибели фотона $\bar{\xi}$ и глубина термализации Λ для линии, налагающейся на континуум ($\varepsilon = 10^{-6}$) (по [315])

r	a					
	0		10^{-3}		10^{-2}	
	$\bar{\xi}$	Λ	$\bar{\xi}$	Λ	$\bar{\xi}$	Λ
0	10^{-6}	$1 \cdot 10^6$	10^{-6}	10^9	10^{-6}	10^{10}
10^{-7}	$1,79 \cdot 10^{-6}$	$5,6 \cdot 10^5$	$1,87 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^6$	$5,71 \cdot 10^{-5}$	$3,1 \cdot 10^7$
10^{-6}	$8,26 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^5$	$5,72 \cdot 10^{-5}$	$2,1 \cdot 10^5$	$1,78 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^5$
10^{-5}	$6,69 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^4$	$1,85 \cdot 10^{-4}$	$2,9 \cdot 10^4$	$5,63 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^4$
10^{-4}	$5,85 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^3$	$7,84 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^3$	$1,83 \cdot 10^{-3}$	$3,0 \cdot 10^3$
10^{-3}	$4,98 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^2$	$5,23 \cdot 10^{-3}$	$3,7 \cdot 10^1$	$7,25 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^2$

Чтобы оценить функцию источников на границе, также можно воспользоваться сходством уравнений (11.51) и (11.18), что позволяет заключить, что существует соотношение вида

$$S_l(0) = \bar{\xi}^{1/2} \bar{B}_{\text{эфф}}, \quad (11.52)$$

где $\bar{B}_{\text{эфф}}$ — это $B_{\text{эфф}}(\tau)$, соответствующим образом усредненное по τ вплоть до глубины, равной длине термализации. Из приведенного выше обсуждения очевидно, что во всех случаях, когда $\bar{\xi}$ превосходит ε (будь то потому, что $r > \varepsilon$, или же из-за того, что протяженные крылья линии обеспечивают выполнение неравенства $\bar{\xi} > \varepsilon$, хотя r и меньше ε), в членах, описывающих и гибель, и рождение $[B_{\text{эфф}}]$ фотонов линии, доминирующую роль играет континуум. Говорят, что в этом случае линия *контролируется континуумом*. Отсюда следует, в частности, что $S_l(0)$ определяется континуумом, несмотря на то, что в ядре и коэффициент поглощения в линии, и функция источников в линии превосходят члены, определяемые континуумом. Это служит еще одним проявлением того уже отмечавшегося выше факта, что значение функции источников на границе определяется крыльями линии.

Результаты численных расчетов $S_l(\tau)$ в полубесконечных атмос-

ферах с $B = 1$ и $\varepsilon = 10^{-6}$, полученные методом дискретных ординат, показаны на рис. 11.5 и 11.6 [315]. Ясно видно, что даже весьма малые r вызывают большие изменения функции источников. Для слоев конечной толщины эти эффекты выражены еще сильнее. Результаты, приведенные на рис. 11.5, относятся к чисто доплеровскому профилю. Вертикальными стрелками показаны теоретические значения глубины термализации, приведенные в табл. 11.1, а горизонтальные стрелки указывают $\xi^{1/2}$, т.е. значения $S_i(0)$ при $B_{\text{эфф}} = 1$. Для фойгтовских профилей (рис. 11.6) довольно хорошая оценка $S_i(0)$ получается, если взять

$$\bar{B}_{\text{эфф}} = (\Lambda/\alpha)^{-1} \int_0^{\Lambda/\alpha} B_{\text{эфф}}(\tau) d\tau, \quad (11.53)$$

выбрав α чуть меньше 3. Таким выбором α учитывается сильное убывание истинной весовой функции с глубиной. Для конечных атмосфер в качестве первого приближения к значению S_{max} в середине слоя можно использовать выражения (11.40) с заменой ε на

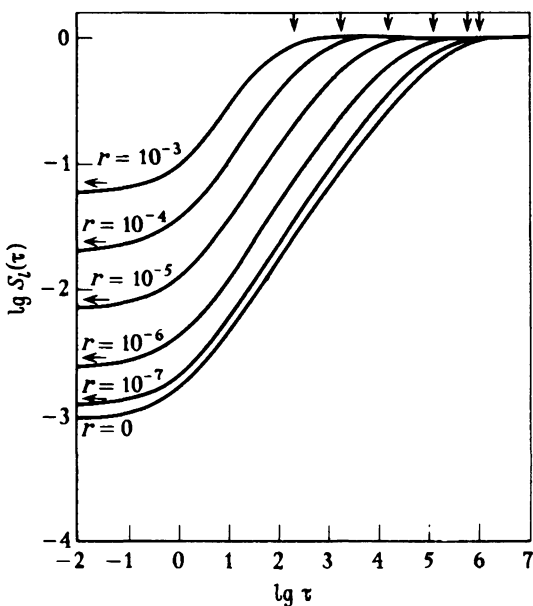


Рис. 11.5. Функции источников в линии в полубесконечной атмосфере для двухуровневого атома с $\varepsilon = 10^{-6}$ при чисто доплеровском профиле ($a = 0$). Линия налагается на континуум с различными значениями r . (По [315], с разрешения.)

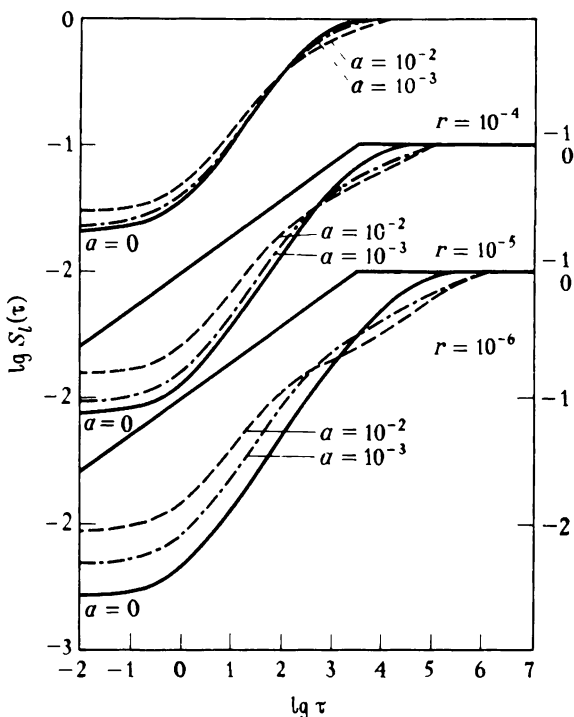


Рис. 11.6. Функции источников в линии в полубесконечной атмосфере для двухуровневого атома с $\varepsilon = 10^{-6}$ при наличии поглощения в континууме с различными значениями r . Видны эффекты, обусловленные различиями в форме профиля. (По [315], с разрешения.)

ξ — тем самым учитываются фотоны, излучаемые в континууме.

В реальных звездных атмосферах влияние континуума, на фоне которого видны линии, на процесс образования линии и на термализацию фотонов обычно является сильным. У звезд ранних типов лишь для самых сильных линий значения r могут опускаться до 10^{-4} или 10^{-3} . Поэтому члены, описывающие влияние континуума, обычно оказываются преобладающими. С другой стороны, для линий H и K Ca II в спектре Солнца $r \approx 10^{-9}$, и поэтому для них термализация практически не зависит от того континуума, на который они налагаются.

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ТЕРМАЛИЗАЦИИ И ПРОФИЛЯ ЛИНИИ С ГЛУБИНОЙ

В идеализированных задачах, рассматривавшихся до сих пор в этом разделе, для простоты предполагалось, что величины B , r , ε и

ϕ_ν не зависят от глубины. Между тем в реальных звездных атмосферах все они могут сильно изменяться с глубиной. Эти изменения могут, конечно, заметно влиять на процесс образования линии, на поведение функции источников и на получающиеся в результате профили линий. Если стремиться построить аккуратные модели реальных звездных спектров, эти усложнения должны учитываться. Для этого следует обратиться к прямым численным методам того типа, которые были описаны ранее. Однако понимания физической сути дела можно достичь из рассмотрения простых параметризации изменения некоторых из упомянутых выше величин с оптической глубиной. Обсуждение чрезвычайно важных эффектов, вызываемых изменениями функции Планка с глубиной, мы отложим до § 11.3, где будет описано образование линий при наличии хромосферной инверсии температуры. Изменения параметра r могут быть существенны, но описать их в нескольких словах нелегко; дальнейшее обсуждение см. в [18], гл. 3. Мы же сосредоточим наше внимание на эффектах, вызываемых изменением с глубиной величин ε и ϕ_ν .

Параметр ударного девозбуждения ε пропорционален электронной концентрации и поэтому должен отражать рост плотности с глубиной в атмосфере. Если считать атмосферу почти изотермической, то из условия гидростатического равновесия следует, что полная плотность будет возрастать линейно с массой m , находящейся в столбе единичного сечения над данным уровнем. Если, кроме того, предположить, что χ/ρ практически постоянно, то τ также будет пропорционально m . Тогда для звезды раннего типа, у которой вещество заметно ионизовано, следует ожидать, что n_e будет пропорционально τ . У звезд более поздних типов вещество в наружных слоях может быть нейтральным, а затем на некоторой глубине испытывает резкую ионизацию. В этом случае может происходить гораздо более крутой рост n_e (и ε). Хотя при переменном ε для точного определения $S_\nu(\tau)$ необходимо численное решение, из физических соображений разумно ожидать, что термализация будет по-прежнему происходить на такой глубине Λ , где $P_e(\Lambda) \approx P_d(\Lambda)$. Чтобы проиллюстрировать плодотворность этой идеи, предположим, что в атмосфере с постоянными r , B и ϕ на какой-то конкретной глубине τ_0 происходит быстрое увеличение ε от значения ε_1 до большего значения ε_2 . Тогда если $\tau_0 > 1/\varepsilon$ (для доплеровского профиля), то ясно, что линия уже успела термализоваться и поэтому рост ε не дает эффекта. В этом случае $S_\nu(0)$ будет равно $\varepsilon_1^{1/2} B$. Предположим теперь, наоборот, что $\tau_0 < 1/\varepsilon_2$. В этом случае из-за

малости величины ε на поверхности термализация функции источников в линии должна была бы произойти на глубине $1/\varepsilon_1$. Но на этой глубине ε уже равно $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Поэтому линия будет вести себя так, как если бы ε было постоянным и равным $\varepsilon \equiv \varepsilon_2$, так что $S_l(0)$ будет равно $\varepsilon_2^{1/2} B$. Эти качественные ожидания подтверждаются детальными расчетами [284], стр. 101, типа тех, результаты которых показаны на рис. 11.7; здесь предполагается, что ε имеет вид

$$\varepsilon(\tau) = 10^{-3} [1 - 0,99 \exp(-\tau/\tau_0)].$$

Обратите внимание, что, когда $\tau_0 > 10^5$, S_l ведет себя как если бы $\varepsilon = 10^{-5}$; если же $\tau_0 \leq 10^2$, S_l изменяется так, как будто бы $\varepsilon = 10^{-3}$.

Изменение формы профиля поглощения влияет на процесс пере-

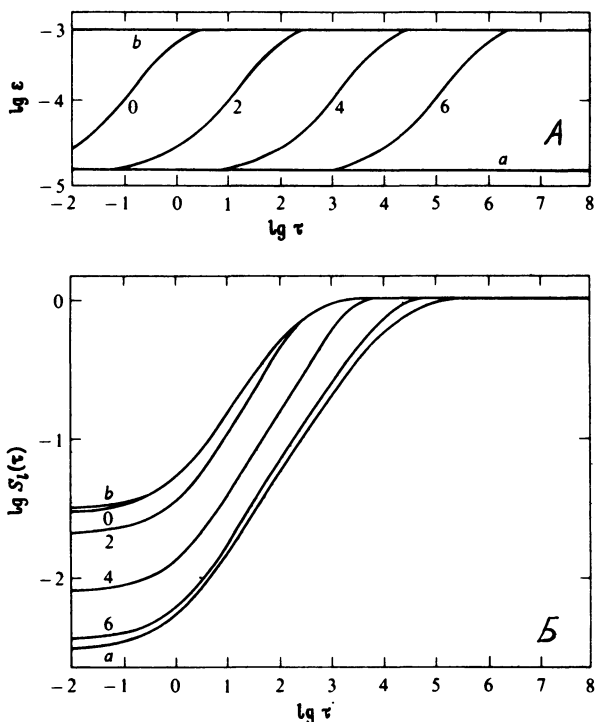


Рис. 11.7. А — изменение ε с глубиной вида $\varepsilon(\tau) = 10^{-3} [1 - 0,99 \exp(-\tau/\tau_0)]$; числа у кривых — значения $\lg \tau_0$. Б — функция источников в линии в полубесконечной атмосфере при $B = 1$, чисто доплеровском профиле и $\varepsilon(\tau)$, показанном на рис. 11.7, А. Кривые а и б соответствуют постоянным значениям ε , равным 10^{-5} и 10^{-3} соответственно. (По [284], стр. 101.)

качки фотонов в крылья линии и на вероятность их выхода. Исследования, основанные на применении численных методов [320]; [18], стр. 51, выявили ряд интересных эффектов, посредством которых изменения профиля с глубиной влияют на функцию источников в линии. Предположим, например, что в атмосфере с $B = \text{const}$ доплеровская ширина резко возрастает вблизи поверхности (см. рис. 11.8). Тогда оказывается, что значение S_l на границе заметно увеличено, так как более широкие крылья линии могут теперь перехва-

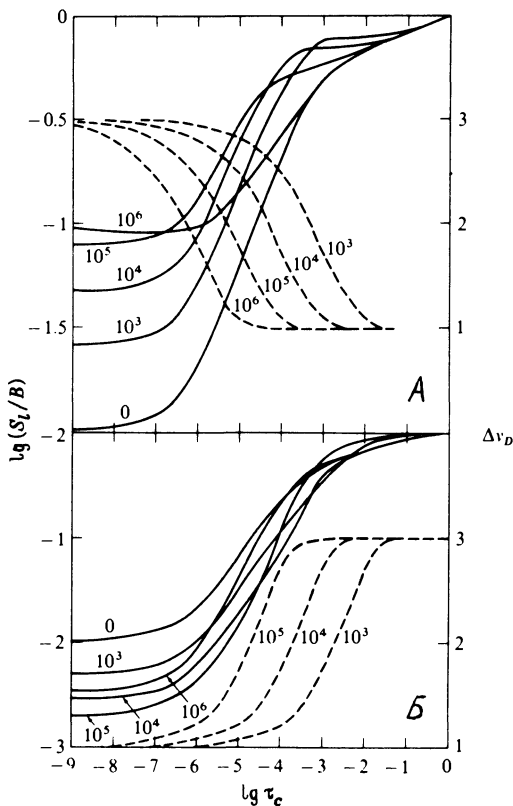


Рис. 11.8. Функции источников в линии в полубесконечной атмосфере при $B = 1$ для линии с изменяющейся с глубиной доплеровской шириной и $\varepsilon = 10^{-4}$, $r = 10^{-6}$, $a = 10^{-3}$. А — доплеровская ширина, возрастающая к границе: $\Delta\nu_D(\tau) = 1 + 2\exp(-\alpha\tau_c)$; Б — доплеровская ширина, убывающая к границе: $\Delta\nu_D = 3 - 2\exp(-\alpha\tau_c)$. Числа у кривых — значения параметра α . Кривые, около которых стоит 0, соответствуют постоянной доплеровской ширине. Ординаты: шкала слева и сплошные кривые дают $\lg(S_l/B)$; шкала справа и пунктирные кривые дают $\Delta\nu_D$. (По [18], стр. 52, с разрешения.)

тывать излучение, идущее из более глубоких слоев. По мере того как место, где $\Delta\nu_D$ увеличивается, перемещается глубже в атмосферу, этот поверхностный эффект уменьшается главным образом потому, что поверхностный слой становится все более непрозрачным в крыльях, и интенсивное излучение континуума, на который накладывается линия, все более ослабляется. Одновременно на больших глубинах функция источников также возрастает главным образом потому, что большая непрозрачность в крыльях линии в поверхностном слое подавляет выход излучения из нижележащих слоев. Этот эффект иногда называют *отражательным эффектом*. Он тем больше, чем толще верхний слой (конечно, это верно лишь до тех пор, пока слой, где $\Delta\nu_D$ возрастает, не окажется ниже того уровня, на котором поле излучения термализуется). Обратите внимание на то, что на рис. 11.8, а при $\alpha = 10^6$ верхний слой оптически тонкий и поэтому отражательного эффекта практически нет; в то же время возрастание значений функции источников у границы здесь наибольшее.

Когда доплеровская ширина резко убывает близ поверхности, значение $S_l(0)$ падает, так как более узкий профиль поглощения уже не перехватывает яркое излучение, идущее в крыльях. Излучение оказывается менее запертым и в глубоких слоях. Поэтому S_l убывает и там. Однако на очень больших глубинах эффект оказывается обратным, и S_l даже слегка возрастает по сравнению со своим значением при постоянно $\Delta\nu_D$, так как здесь уменьшение ширины спектральной полосы, охватываемой линией, ведет к уменьшению вероятности выхода.

Следует также отметить, что вариации профиля поглощения с глубиной изменяют не только $S_l(\tau)$, но и связь между оптической глубиной на данной частоте и геометрической глубиной. Если вспомнить соотношение Эддингтона — Барбье, то становится ясно, что это должно приводить к изменению отображения, переводящего S_l в $I_l(0)$, а значит, и к изменению распределения интенсивности выходящего излучения по профилю линии и к изменению вариаций этого распределения при переходе от центра к краю (см., например, [26]).

11.3. Двухуровневый атом с континуумом

ФУНКЦИЯ ИСТОЧНИКОВ

Обсуждение, проведенное в предыдущих разделах этой главы, основано на весьма схематичной и, конечно же, ограниченной моде-