

частоты. Кроме того, расчеты, результаты которых показаны на рис 12.3 и 12.4, представляют лишь среднюю спокойную хромосферу. Чтобы добиться согласия с наблюдениями профилей в спектрах активных областей [569], требуется другая модель атмосферы, а чтобы согласовать с наблюдениями *детальные* изменения теоретического профиля линии К при переходе от одной точки диска к другой, необходим полный учет трехмерной тонкой структуры хромосферы и макроскопических движений в ней. Такие расчеты аккуратно еще не сделаны, хотя они необходимы как для выяснения деталей строения хромосферы, так и для ответа на вопрос, в какой мере возможно (и возможно ли вообще) заменять сложную многомерную структуру хромосферы усредненной по горизонтальным плоскостям «средней хромосферой».

12.2. Эффекты взаимосвязи уровней.

Равенство функций источников в мультиплетах

Как подчеркивалось в предыдущем параграфе, метод эквивалентных двухуровневых атомов работает лучше всего тогда, когда члены уравнений статистического равновесия, описывающие переходы между двумя уровнями, дающими изучаемую линию, и всеми остальными уровнями, малы по сравнению с членами, описывающими переходы между самими этими двумя уровнями, а также между этими уровнями и континуумом. Существует, однако, множество физических ситуаций, когда это *не так*, и важно разобраться в том, к каким эффектам может приводить сильная взаимосвязь между несколькими уровнями. Эти эффекты порождают ряд важных следствий, которые сказываются и на наших общих представлениях о процессе образования линий, и на выборе численных методов решения многоуровневых задач теории переноса. Большинство основных физических понятий было введено Джеффрисом [333]; [334], гл. 8, и значительная часть последующих теоретических работ (например, [567]) была основана на его идеях. Были выполнены многочисленные методические расчеты, при которых использовались идеализированные модели многоуровневых атомов и параметризованные модели атмосфер: см., например, [54]; [18], гл. 4; [187], [213], [217], [218]. Вместо того, чтобы пытаться суммировать здесь результаты этих сильно различающихся между собой исследований, мы сосредоточим внимание на двух конкретных примерах, которые особенно ярко иллюстрируют природу эффектов взаимосвязи.

В первую очередь будет кратко рассмотрен случай трех уровней, при переходах между которыми образуются две резонансные линии и одна субординатная. Здесь основной эффект, представляющий интерес, состоит в *дроблении фотонов* старшей резонансной линии на фотоны первой резонансной и субординатной линий. Это явление имеет отношение к механизму флуоресценции в туманностях и к росселандовым циклам, обсуждавшимся в § 5.5. Остальную часть параграфа мы посвятим изучению взаимосвязи линий, образующих мультиплет. Здесь может происходить *конверсия фотонов*, вызванная тем, что столкновения перебрасывают электроны между различными уровнями тонкой структуры рассматриваемых спектроскопических термов. В результате между функциями источников различных линий возникают простые зависимости, и в определенном предельном случае они становятся на всех глубинах в атмосфере *равными* между собой. *Равенство функций источников* для линий мультиплета с теоретической точки зрения очень важно, так как из него следует, что изучение нескольких линий, входящих в мультиплет, можно заменить исследованием всего одной линии, представляющей весь мультиплет сразу, что позволяет значительно сократить объем вычислений. Далее, если равенство функций источников имеет место, это позволяет применить такой метод обработки данных о профилях линий, основанный на теории их образования при отсутствии ЛТР, который дает возможность при минимуме ограничений на теорию непосредственно вывести физические характеристики атмосферы. В соответствии с духом всей нашей книги, в которой на первом плане находится теоретический синтез спектров, а не анализ наблюдений, мы не будем обсуждать здесь этот аналитический метод, предложив читателю за подробным его обсуждением обратиться к книге Джеффриса [34], гл. 9.

ДРОБЛЕНИЕ И КОНВЕРСИЯ ФОТОНОВ

Рассмотрим сначала трехуровневый атом, способный излучать и поглощать две резонансные линии $1 \rightarrow 2$ и $1 \rightarrow 3$ и одну субординатную линию $2 \rightarrow 3$. Например, в атоме водорода мы имели бы линии L_α , L_β и H_α . Для удобства изложения наши три линии мы так и будем называть, хотя мы можем иметь дело и не с водородом. В соответствии с нашими теперешними целями взаимодействием с континуумом пренебрежем и целиком сосредоточим внимание на линиях. Вообще говоря, можно ожидать, что населенность основного уровня n_1 будет гораздо больше населенностей возбуж-

денных уровней n_2 и n_3 . Поэтому в резонансных линиях атмосфера будет гораздо менее прозрачной и на заданной геометрической глубине будет иметь в этих линиях намного большие оптические глубины, чем в субординатной линии. Предположим сначала, что все три линии каким-то образом оказались не связанными друг с другом и образуются в различных двухуровневых атомах. Тогда фотоны в каждой из них термализовались бы на характерной глубине $\Lambda_{ij} \approx 1/\varepsilon_{ij}$, где ε_{ij} — вероятность гибели фотона вследствие тушащих столкновений при переходе $i \rightarrow j$. Так как $h\nu_{23} \ll h\nu_{12}$ (или $h\nu_{13}$), обычно будет $\varepsilon_{23} \gg \varepsilon_{12}$ (или ε_{13}). Поэтому фотоны субординатной линии будут термализоваться на меньших оптических глубинах (измеренных в их собственной шкале), чем фотоны резонансных линий.

Однако этот эффект будет обращен из-за гораздо большей непрозрачности атмосферы в резонансных линиях, и термализация в субординатной линии наступит в атмосфере на значительно большей *геометрической* глубине. Можно сказать и иначе. В субординатной линии атмосфера настолько более прозрачна, чем в резонансных линиях, что при продвижении из глубоких слоев к границе атмосферы первыми получают возможность выходить из атмосферы фотоны этой субординатной линии (вызывая тем самым отклонения S от B). Таким образом, будет существовать определенная область глубин, в пределах которой фотоны резонансных линий, если бы они *не были* связаны с субординатной линией, были бы термализованы, а фотоны субординатной линии могли бы успевать выходить из атмосферы, так как в этой линии она не столь непрозрачна. На самом же деле в этом критическом диапазоне глубин некоторые из электронов, переведенные излучением L_β с уровня 1 на уровень 3, будут затем переходить на уровень 2 с излучением H_α , и эти фотоны H_α будут выходить из атмосферы. Таким образом, будет происходить систематическое *дробление* фотонов L_β на L_α и H_α , темп которого определяется вероятностью дробления $A_{32}/(A_{31} + A_{32})$. Заметим, что обратный процесс конверсии фотонов H_α в L_β малоэффективен. Если поглощается фотон H_α , что приводит к возбуждению 2 — 3, то *большинство* последующих актов излучения из состояния 3 будет происходить при переходе 3 — 1. Однако, так как τ_{13} очень велико, а ε_{13} очень мало, эти фотоны *заперты* и рассеиваются до тех пор, пока наконец не произойдет переход 3 — 2. Излученный при этом фотон H_α сразу же выйдет из атмосферы. В этой области атмосферы поле излучения L_α останется почти в состоянии детального баланса (а соответствующая функ-

ция источников будет близка к функции Планка), возбуждение же за счет L_β будет ослаблено, а соответствующая функция источников должна поэтому быть меньше равновесной.

Пренебрегая вынужденным излучением, мы можем выразить «приведенные» функции источников в виде $S_{21}/B_{21} = b_2/b_1$, $S_{31}/B_{31} = b_3/b_1$ и $S_{32}/B_{32} = b_3/b_2$, где B_{ij} — значение функции Планка $B(\nu_{ij}, T)$ и $b_i \equiv n/n_i^*$. Там, где в L_α имеет место детальный баланс, $b_2 = b_1$ (напомним обсуждение вопроса о населенности основного состояния N у V -звезд, см. § 7.5). Поэтому $S_{32}/B_{32} = S_{31}/B_{31}$, так что, начиная с того уровня в атмосфере, где наступает термализация L_α , «приведенные» функции источников линий L_β и H_α становятся между собой равны. По мере перемещения во все более близкие к границе слои атмосферы она становится все прозрачнее в линии L_β , и в конце концов вероятность прямого выхода L_β -фотона становится больше вероятности его преобразования в покидающий атмосферу фотон H_α . С этого места функции источников для L_β и H_α перестают быть близкими.

Результаты расчетов для трехуровневого атома с параметрами $A_{31}/A_{32} = 10$, $\epsilon_{12} = \epsilon_{13} = 10^{-3}$, $\epsilon_{23} = 9 \cdot 10^{-2}$, $\tau_{12}/\tau_{13} = 6,2$ и $\tau_{23}/\tau_{13} = 1,6 \cdot 10^{-4} \cdot (S_{31}/B_{31}) / (S_{32}/B_{32})$ приведены на рис. 12.5 [218]. Из рисунка видно, что L_α -фотоны термализуются при $\tau_{13} \approx 2 \cdot 10^2$, что соответствует $\tau_{12} \approx 10^3$, как и следовало ожидать при принятом значении ϵ_{12} . При $\tau_{13} \leq 10$ вероятность прямого выхода L_β -фотона сравнима с вероятностью его дробления с образованием H_α . Поэтому при $\tau_{13} < 10$ кривые для «приведенных» функций источников в линиях L_β и H_α расходятся. Однако ниже этого уровня они быстро сближаются, причем их общее значение существенно меньше того, которое было бы у функции источников L_β , если бы дробления фотонов не происходило. Термализация фотонов H_α (а вместе с ними и L_β) наступает около $\tau_{13} \approx 10^5$, что соответствует $\tau_{23} \approx 10$, как и следовало ожидать, учитывая значение ϵ_{23} . Дальнейшее обсуждение и интерпретацию результатов можно найти в указанной выше работе, однако из сказанного здесь ясно, что в этой задаче взаимосвязь линий сильно влияет на то, как происходит изменение функций источников с глубиной. См. также [18], § 4.8.

Теперь обратимся к случаю трехуровневого атома, имеющего основное состояние и два близко расположенных верхних состояния. Предположим, что между состояниями 1 и 2, а также между состояниями 1 и 3 могут происходить как радиативные, так и ударные переходы, тогда как между состояниями 2 и 3 возможны лишь ударные переходы. Эта модель описывает реальную физическую

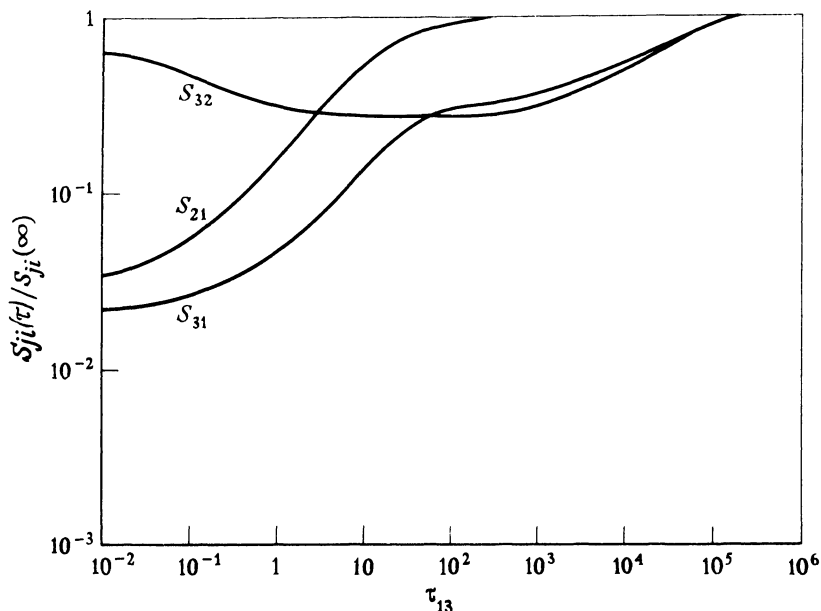


Рис. 12.5. Функции источников для трехуровневого атома, для которого разрешены переходы как в резонансных линиях $1 \rightarrow 3$ и $1 \rightarrow 2$, так и в субординатной линии. Абсцисса — оптическая глубина в линии $1 \rightarrow 3$; ордината — значение приведенных функций источников $S_{ji}(\tau)/S_{ji}(\infty)$; значение $S_{ji}(\infty)$ равно функции Планка на соответствующей частоте. (По [218], с разрешения.)

ситуацию в случае *резонансного дублета*, у которого верхние состояния соответствуют тонкой структуре уровня. Например, D-линии натрия возникают при переходах с основного уровня $3s \ ^2S_{1/2}$ (состояние 1) на верхние уровни $3p \ ^2P_{1/2}$ и $3p \ ^2P_{3/2}$ (состояния 2 и 3).

Обсудим сначала предельный случай, когда вероятность ударного перехода $2 \rightarrow 3$ равна нулю (т.е. случай *отсутствия связи* между уровнями). Тогда переходы $1 \rightarrow 2$ и $1 \rightarrow 3$ могут происходить независимо друг от друга, и обе линии образуются также независимо. Функции источников в этих линиях у границы будут меньше локальной функции Планка. Становятся равновесными, приближаясь к функции Планка, они будут на *глубине термализации*, определяемой для каждой из линий соответственно выражениями

$$\Lambda_{12} \approx (A_{21} + C_{21})/C_{21}, \quad (12.13a)$$

$$\Lambda_{13} \approx (A_{31} + C_{31})/C_{31}. \quad (12.13b)$$

Здесь были сделаны упрощающие предположения о том, что профи-

ли у линий доплеровские, а сильные градиенты параметров отсутствуют. В рассматриваемом сейчас предельном случае ход изменения функций источников этих двух линий с глубиной в атмосфере будет разным, и на каждой данной глубине их значения, вообще говоря, совпадать не будут.

Примем теперь, напротив, что *столкновения*, вызывающие переходы между уровнями 2 и 3, *происходят очень часто*. В этом случае электроны, находящиеся на возбужденных уровнях, часто перебрасываются с одного из этих возбужденных уровней на другой. В этом случае говорят, что происходит прямая и обратная *конверсия* фотонов одной линии в фотоны другой линии. В задаче о переносе излучения в таких линиях два верхних уровня, по существу, выступают как один. В этом предельном случае населенности верхних уровней пропорциональны их статистическим весам. Функции источников этих двух линий (которые выражаются через отношения $n_l g_u / n_u g_l$) *становятся тогда равны на всех глубинах в атмосфере*. (Здесь мы пренебрегли несущественным различием, которое может возникать из-за того, что ν_{12} не в точности равно ν_{13} .) В общем случае ситуация будет промежуточной между двумя описанными выше крайними случаями, и следует ожидать, что функции источников будут равны лишь в некоторой части атмосферы.

При перемещении из глубоких слоев атмосферы наружу мы обнаружим, что на глубинах, меньших глубин термализации, функции источников линий становятся меньше функций Планка. Это происходит потому, что вероятность прямого выхода фотона начинает превосходить вероятность его гибели (см. § 11.2). Однако если коэффициенты ударных переходов C_{23} и C_{32} отличны от нуля, то наряду с вероятностями выхода из среды и гибели появляется конечная не равная нулю вероятность того, что фотон *перейдет* из одной линии в другую. Поэтому должна существовать некоторая *длина конверсии* ([333]; [284], стр. 177) — расстояние, в пределах которого функции источников двух линий остаются между собой близкими. Линии делаются несвязанными лишь тогда, когда вероятность прямого выхода становится больше вероятности *и гибели, и конверсии* фотона, т.е. когда

$$P(\tau_{12}) \geq (C_{21} + C_{23}) / (A_{21} + C_{21} + C_{23}), \quad (12.14a)$$

$$P(\tau_{13}) \geq (C_{31} + C_{32}) / (A_{31} + C_{31} + C_{32}). \quad (12.14б)$$

Из неравенств (12.14) следует, что обе линии могут термализоваться независимо друг от друга во всей той области глубин в атмосфере-

ре, которая определяется выражениями (12.13), только в том случае, когда *всюду* в этой области $C_{31} > C_{32}$ и $C_{21} > C_{23}$ (с хорошим запасом). Если *хотя бы одно* из этих условий нарушено, конверсия фотонов играет существенную роль. Снова принимая, что профиль доплеровский, можно дать оценку той оптической глубины, начиная с которой фотоны каждой из линий способны полностью сохранять свою индивидуальность и выходить из атмосферы, не претерпевая ни гибели вследствие ударов второго рода, ни конверсии. Для переходов $1 \rightarrow 2$ и $1 \rightarrow 3$ имеем соответственно

$$\Lambda_{12}^* \approx (A_{21} + C_{21} + C_{23}) / (C_{21} + C_{23}), \quad (12.15a)$$

$$\Lambda_{13}^* \approx (A_{31} + C_{31} + C_{32}) / (C_{31} + C_{32}). \quad (12.15b)$$

Пусть z_{12}^* и z_{13}^* — *геометрические глубины*, соответствующие Λ_{12}^* и Λ_{13}^* . Тогда обе группы фотонов могут распространяться независимо друг от друга лишь до глубины $z^* = \min(z_{12}^*, z_{13}^*)$.

С точки зрения вычислений можно сказать, что если конверсия успешно конкурирует с термализацией, то целесообразность использования той итерационной процедуры, которая применяется в методе эквивалентных двухуровневых атомов, становится не вполне ясной. Кажется более естественным рассматривать обе (*или большее число*) линии и их воздействие друг на друга *одновременно*, разбив для этого другую расчетную схему.

НАБЛЮДАЕМЫЕ ПРОЯВЛЕНИЯ РАВЕНСТВА ФУНКЦИЙ ИСТОЧНИКОВ

Чтобы получить стимул к дальнейшей разработке теории, рассмотрим некоторые наблюдательные проявления того, что функции источников в мультиплетах действительно между собой равны. Прекрасный пример этого дается обширным рядом высокоточных наблюдений D-линий натрия в спектре диска Солнца [655]. Интенсивность выходящего излучения в определенной частоте и в определенной точке диска дается выражением

$$I_i(0, \mu) = \mu^{-1} \int_0^{\infty} [S_c(\tau_c) + \beta_v S_l(\tau_c)] \exp \left[-\mu^{-1} \int_0^{\tau_c} (1 + \beta_v) dt_c \right] d\tau_c, \quad (12.16)$$

где τ_c — оптическая глубина в континууме и $\beta_v = \chi \phi_v / \chi_c$. В ядре линии $\beta_v \gg 1$, так что с хорошей точностью можно написать

$$I_i(0, \mu) = \mu^{-1} \int_0^{\infty} S_l(\tau) \exp(-\tau \phi_v / \mu) \phi_v d\tau, \quad (12.17)$$

где τ — оптическая глубина в линии. В случае D-линий $f_{13}/f_{12} = 2$,

так что

$$I_{12}(0, \mu, \nu) = \int_0^{\infty} S_{12}(\tau_{12}) \exp(-\phi_{\nu} \tau_{12}/\mu) \phi_{\nu} d\tau_{12}/\mu, \quad (12.18a)$$

$$I_{13}(0, \mu, \nu) = \int_0^{\infty} S_{13}(\tau_{12}) \exp(-2\phi_{\nu} \tau_{12}/\mu) 2\phi_{\nu} d\tau_{12}/\mu. \quad (12.18b)$$

Следовательно, если S_{12} и S_{13} одинаково зависят от глубины, то $I_{13}(0, \mu, \nu) = I_{12}(0, \mu/2, \nu)$. Суть дела в том, что большая непрозрачность в одной линии компенсируется увеличением длины пути, проходимого фотоном другой линии. Если произвести сравнение указанных интенсивностей, то для ядер двух D-линий обнаруживается очень хорошее согласие (см. рис. 12.6,а — 12.6,в). Для контраста на рис. 12.6,г показано обратное сравнение — $I_{13}(0, \mu/2, \nu)$ сопоставлено с $I_{12}(0, \mu, \nu)$. Этим наглядно демонстрируется, насколько реально значимо согласие, вытекающее из остальных рисунков. Отсутствие согласия в крыльях объясняется возрастающим вкладом континуума, что нарушает справедливость предположений, которые нужно сделать, чтобы можно было написать формулу (12.17).

Этот поразительный наблюдательный результат побуждает предпринять детальное изучение условий, при которых может осуществляться равенство функций источников (помимо тривиального случая ЛТР), а также разработать методы расчета, специально приспособленные для задач о переносе излучения в мультиплетах. Прекрасное согласие профилей, показанное на рис. 12.6, производит настолько сильное впечатление, что в некоторых ранних работах [655], [656] делался вывод, что равенство функций источников в двух линиях должно строго соблюдаться вплоть до самой поверхности. Чтобы гарантировать такое равенство, нужно было бы наложить очень сильное требование, что $C_{23} \gg A_{21}$ и $C_{32} \gg A_{31}$. Коэффициенты ударных переходов для D-линий в солнечной атмосфере на самом деле удовлетворяют этим неравенствам не могут. Возникает кажущееся противоречие. В последующих работах [16], [51] было, однако, показано, что наложенные выше условия являются излишне строгими и что для того, чтобы функции источников оказывались очень близкими (хотя и не точно равными), достаточно выполнения лишь условий $C_{32}/A_{31} > C_{31}/A_{31}$ и $C_{23}/A_{21} > C_{21}/A_{21}$ (которые для солнечных D-линий выполняются). Этих условий достаточно, чтобы формировать профили, которые в пределах точности наблюдений неотличимы друг от друга.

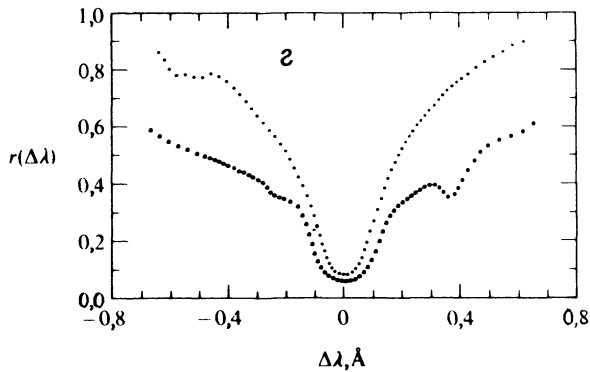
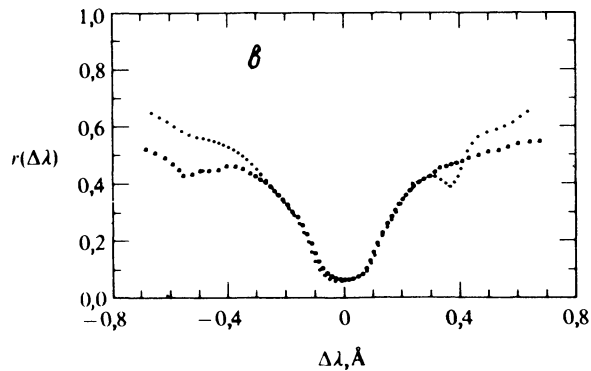
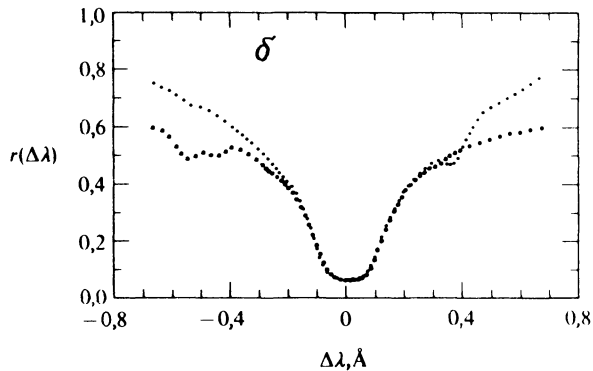
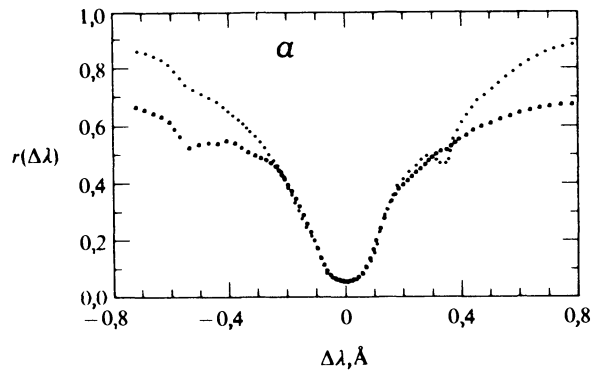


Рис. 12.6. Сравнение $I_{12}(0, \mu/2, \nu)$ с $I_{13}(0, \mu, \nu)$ для солнечных D-линий Na: а) $\mu = 1$; б) $\mu = 0,8$; в) $\mu = 0,6$; г) сравнение $I_{12}(0, \mu, \nu)$ с $I_{13}(0, \mu/2, \nu)$ при $\mu = 1$; обратите внимание на отсутствие какого-либо согласия в этом случае. (По [655], с разрешения.)

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗУЧЕНИЯ В МУЛЬТИПЛЕТАХ

Рассмотрим теперь, как формулируется и решается задача о переносе излучения в совокупности линий мультиплета, возникающего при переходах с одного нижнего уровня на два (или более) верхних уровня, которые связаны друг с другом за счет столкновений. Для простоты пренебрежем вынужденным излучением и взаимодействием с континуумом, а также различием в частотах линий. Все это, конечно, можно учесть, однако формулы становятся гораздо более громоздкими, хотя описываемая ими физика существенно не изменяется. Функция источников для перехода $1 \rightarrow j$ равна

$$S_{1j} = (2h\nu^3/c^2)g_1 n_j / g_1 n_1. \quad (12.19)$$

Искомые отношения населенностей получаются из уравнений статистического равновесия. Для случая, когда имеются только два верхних уровня, они выглядят следующим образом:

$$n_2(A_{21} + C_{21} + C_{23}) = n_1(B_{12}\bar{J}_{12} + C_{12}) + n_3C_{32}, \quad (12.20a)$$

$$n_3(A_{31} + C_{31} + C_{32}) = n_1(B_{13}\bar{J}_{13} + C_{13}) + n_2C_{23}, \quad (12.20b)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{J}_{1j}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} J_{1j}(\tau, \nu)\phi_j(\tau, \nu)d\nu = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu\phi_j(\tau, \nu) \int_{-1}^1 d\mu I_{1j}(\tau, \mu, \nu). \end{aligned} \quad (12.21)$$

Используя соотношения между эйнштейновскими коэффициентами и между коэффициентами ударных переходов $C_{ij} = (n_j^*/n_i^*)C_{ij}$, получающиеся из условия детального баланса, а также полагая $\varepsilon_{12} = C_{21}/A_{21}$, $\eta_{12} = C_{23}/A_{21}$, $\varepsilon_{13} = C_{31}/A_{31}$ и $\eta_{13} = C_{32}/A_{31}$, мы можем следующим образом переписать уравнения (12.20) через функции источников вида (12.19):

$$S_{12} = (\bar{J}_{12} + \varepsilon_{12}B_{12} + \eta_{12}S_{13})/(1 + \varepsilon_{12} + \eta_{12}), \quad (12.22a)$$

$$S_{13} = (\bar{J}_{13} + \varepsilon_{13}B_{13} + \eta_{13}S_{12})/(1 + \varepsilon_{13} + \eta_{13}). \quad (12.22b)$$

Из этих уравнений ясно видно, что S_{12} и S_{13} связаны между собой линейно. Мы видим, что при $\eta_{12} = \eta_{13} = 0$ функции источников становятся независимыми. Если же либо $\eta_{12} \gg 1$, либо $\eta_{13} \gg 1$, то $S_{12} \approx S_{13}$. Далее, видно, что если только что приведенные неравенства и не удовлетворяются, но выполнены более слабые ограничения $\eta_{1j} \gg \varepsilon_{1j}$ и $\eta_{1j}S_{1k} \gg \varepsilon_{1j}B_{1j}$, то этого также достаточно, чтобы значения S_{12} и S_{13} были близки, так как в этом случае величины,

описывающие рождение и гибель фотонов в выражении для каждой из функций источников, будут определяться *другой* линией. Можно ожидать, что влияние величин η_{lj} будет отчасти напоминать имеющий место в случае двухуровневого атома переход от линии, контролируемой столкновениями, к линии, контролируемой фотоионизациями (иначе говоря, линии мультиплета могут быть, так сказать, контролируруемыми конверсией).

Ввиду линейной зависимости между функциями источников, о которой говорилось выше, ясно, что уравнения для обеих функций придется решать совместно. Рассмотрим случай одного нижнего состояния и произвольного числа верхних уровней. Уравнения (12.22) можно заменить более общими:

$$S_{lj} = \alpha_j \bar{J}_{lj} + \sum \beta_{jk} S_{1k} + \gamma_j, \quad (12.23)$$

где сумма распространяется на все верхние уровни. Эту систему можно разрешить относительно S_{lj} (для каждого значения оптической глубины в среде), что приводит к выражению вида

$$S_{lj}(\tau) = \sum a_{jk} \bar{J}_{1k}(\tau) + b_j(\tau), \quad (12.24)$$

Упражнение 12.2. Написать в явном виде выражения (12.24) для случая двух верхних уровней, исходя из уравнений (12.22).

Чтобы написать уравнение переноса, примем теперь в качестве независимой переменной оптическую глубину $\tau = \tau_{li}$ в какой-нибудь конкретной линии ($1 \rightarrow i$) и обозначим $\gamma_j = d\tau_{lj}/d\tau_{li} = f_{lj}/f_{li}$. Тогда для каждой линии ($1 \rightarrow j$) имеем

$$\mu dI_{lj}(\tau, \mu, \nu)/d\tau = \gamma_j \phi_j(\tau, \nu) [I_{lj}(\tau, \mu, \nu) - S_{lj}(\tau)]. \quad (12.25)$$

Введем дискретизацию по глубине, углу и частоте ($\{\tau_d\}$, $\{\mu_m\}$, $\{\nu_n\}$) и выберем ту или иную квадратурную формулу для вычисления интегралов вида (12.21). Если обозначить

$$\begin{aligned} u_{j, dmn} &= u_{lj}(\tau_d, \mu_m, \nu_n) = \\ &= \frac{1}{2} [I_{lj}(\tau_d, +\mu_m, \nu_n) + I_{lj}(\tau_d, -\mu_m, \nu_n)], \end{aligned} \quad (12.26)$$

то формула (12.21) переписывается в виде

$$\bar{J}_{j, d} = \bar{J}_{lj}(\tau_d) = \sum w_{mn} \phi_j(\tau_d, \nu_n) u_{j, dmn}. \quad (12.27)$$

Уравнение переноса можно тогда записать в дискретизованной

форме:

$$\mu_m^2 d^2 u_{j, dm} / d\tau^2 = (\gamma_{j, d} \phi_{j, dn})^2 (u_{j, dm} - \sum_{k=2}^{L+1} a_{jk, d} J_{k, d} - b_{j, d}). \quad (12.28)$$

Здесь $\phi_{j, dn} = \phi_j(\tau_d, \nu_n)$, $a_{jk, d} = a_{jk}(\tau_d)$, $b_{j, d} = b_j(\tau_d)$ и $\gamma_{j, d} = \gamma_j(\tau_d)$, а сумма распространяется на все L рассматриваемых линий (или верхних уровней). Уравнение вида (12.28) можно написать для каждой линии.

Для решения полученной системы можно применить метод Рай-бики. Введем векторы

$$\mathbf{u}_{j, mn} = (u_{j, 1mn}, \dots, u_{j, dm}, \dots, u_{j, Dmn})^T, \quad (12.29)$$

$$\bar{\mathbf{J}}_j = (\bar{J}_{j1}, \dots, \bar{J}_{j, d}, \dots, \bar{J}_{j, D})^T, \quad (12.30)$$

которые описывают изменение указанных величин с глубиной в интервале $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_D$. Тогда систему (12.28) можно записать в общей форме:

$$\mathbf{T}_{j, mn} \mathbf{u}_{j, mn} + \sum \mathbf{U}_{jk, mn} \bar{\mathbf{J}}_k = \mathbf{K}_{j, mn}, \quad (12.31)$$

где $j = 2, \dots, L + 1$; $m = 1, \dots, M$; $n = 1, \dots, N$. В (12.31) \mathbf{T} — трехдиагональные матрицы размерности D , \mathbf{U} — диагональные матрицы размерности D и \mathbf{K} — вектор той же размерности. Полученные системы решаются одна за другой, и в результате мы получаем

$$\mathbf{u}_{j, mn} = \sum \mathbf{C}_{jk, mn} \bar{\mathbf{J}}_k + \mathbf{D}_{j, mn}, \quad (12.32)$$

где \mathbf{C} — полные матрицы размерности D . Выражения (12.32) подставляются в формулу, являющуюся матричным представлением (12.27), а именно $\bar{\mathbf{J}}_j = \sum_{m, n} \mathbf{W}_{j, mn} \mathbf{u}_{j, mn}$. В результате получается

окончательная система вида

$$\sum \mathbf{P}_{jk} \bar{\mathbf{J}}_k = \mathbf{Q}_j, \quad j = 2, \dots, L + 1. \quad (12.33)$$

Здесь каждая \mathbf{P}_{jk} — матрица размерности D , так что вся система имеет порядок LD . Эта система решается затем стандартными численными методами, и в результате находится полная зависимость $\bar{\tau}$ от глубины во всех линиях одновременно. Если учитывается вынужденное излучение, то система становится нелинейной и требует итеративного решения. Метод линеаризации такой задачи описан в [23], стр. 1. Мы не будем обсуждать эту частную процедуру, а вме-

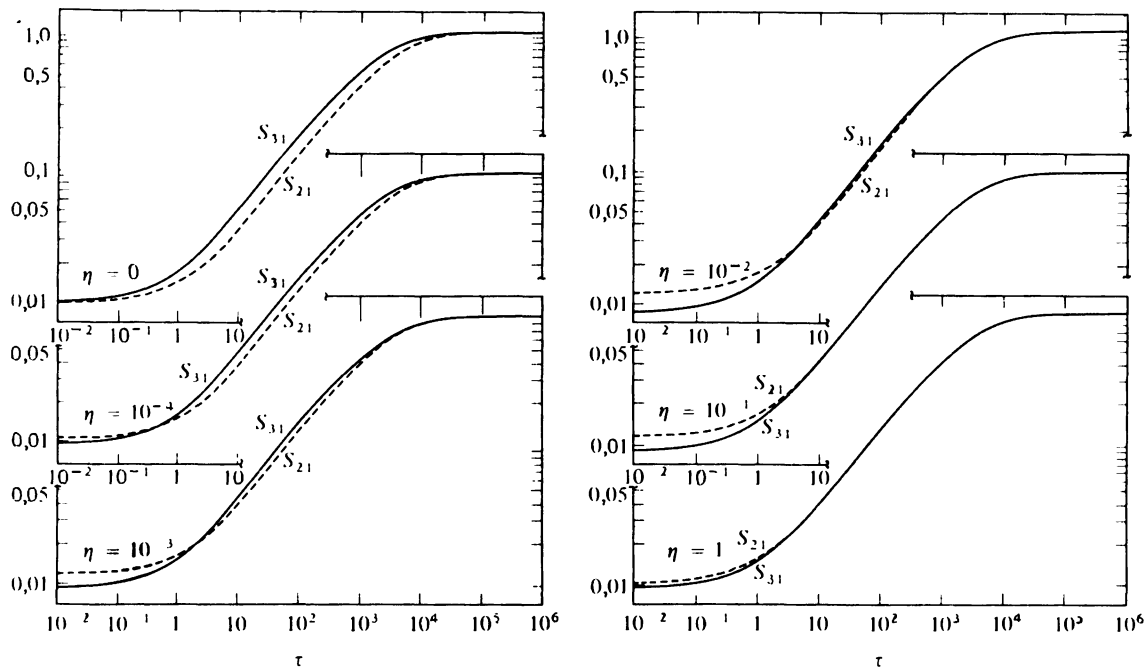


Рис. 12.7. Функции источников для D-линий дублета натрия в полубесконечной атмосфере с $B_{\nu} = \varepsilon = 10^{-4}$ при различных значениях $\eta = \eta_{13}$. (По [51], с разрешения.)

сто этого в §12.3 опишем более общий метод, который позволяет полностью решить и эту задачу, и многие другие.

Для изучения D-линии натрия был использован [51] метод интегральных уравнений, по существу эквивалентный решению описан-

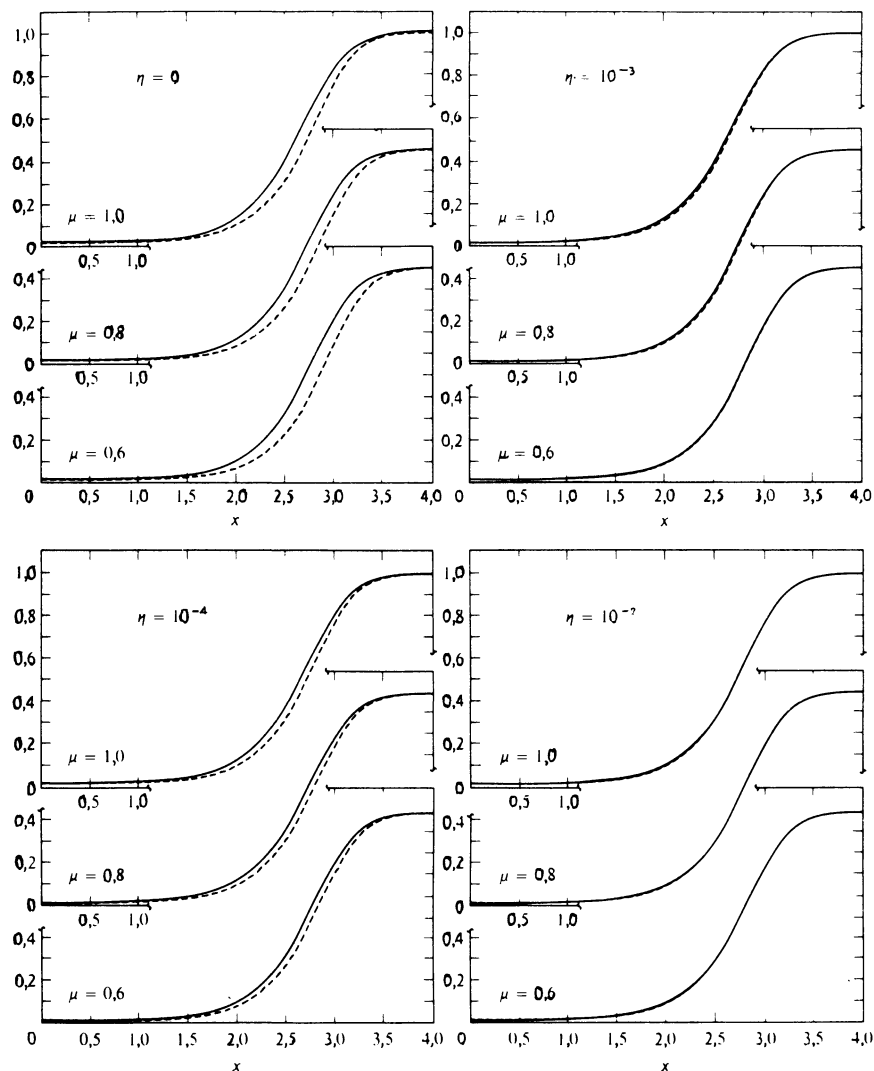


Рис. 12.8. Сравнение профилей $I_{12}(0, \mu/2, \nu)$ с $I_{13}(0, \mu, \nu)$ при различных значениях η и $\mu = 1; 0,8; 0,6$. Сплошные кривые дают I_{13} , пунктир — I_{12} . Абсцисса — расстояние от центра линии в доплеровских ширинах. (По [51], с разрешения.)

ной выше системы, причем брались схематические модели атома и атмосферы. Для атомных характеристик этих линий имеем: $g_1 = 2$, $g_2 = 2$, $g_3 = 4$, $A_{31} = A_{21}$, $B_{13} = 2B_{12}$, $C_{21} = C_{31}$. Поэтому $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13}$ и $\eta_{12} = 2\eta_{13}$. Приняв в качестве основного переход $1 \leftrightarrow 3$, получим $\gamma_2 = 1/2$, $\gamma_3 = 1$. Решения были найдены для ряда типичных значений параметров ε_{13} и η_{13} и нескольких стандартных видов зависимости функции Планка от глубины. На рис. 12.7 представлены результаты для случаев $B_\nu = 1$, $\varepsilon = 10^{-4}$ и $\eta = \eta_{13} = 0, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$ и 1. Видно, что хотя для того, чтобы гарантировалось строгое равенство функций источников вплоть до самой поверхности, значение η_{13} должно было бы быть больше 1, их равенство при $\tau \geq 1$, т.е. в области, дающей основной вклад в интенсивность выходящего излучения, обеспечивают уже меньшие значения η_{13} . Интенсивности выходящего излучения для $\mu = 1, 0; 0,8; 0,6$ приведены на рис. 12.8. Ясно видно, что при $\eta = 10^{-3}$ профили очень близки между собой, а при $\eta = 10^{-2}$ они неразличимы. Эти расчеты показывают, что для всех практических целей равенство функций источников *может* приниматься и при $\eta \ll 1$. На самом деле этот результат неудивителен, так как можно было бы заранее *ожидать*, что конверсия фотонов должна преобладать над их термализацией в каждой отдельной линии, как только $\eta \gg \varepsilon$. Было также изучено влияние зависимости температуры от глубины и показано, что когда B_ν с ростом глубины возрастает, значение η , необходимое для обеспечения равенства функций источников, уменьшается (по сравнению со случаем $B_\nu = 1$), если же B_ν убывает с глубиной — то увеличивается. Эти выводы, однако, основаны на рассмотрении частных форм зависимости $B_\nu(\tau)$ и не могут претендовать на общность.

12.3. Метод полной линеаризации

В свете всего сказанного в этой главе легко понять, что влияние эффектов взаимосвязи переходов в задачах об образовании линий многоуровневых атомов очень существенно, чрезвычайно сложно и его учет приводит к системам уравнений, которые могут быть плохо обусловленными. Ни один из методов, обсуждавшихся нами до сих пор, не является вполне подходящим для решения многоуровневых задач. Метод эквивалентных двухуровневых атомов перестает работать, когда между линиями имеется сильная взаимозависимость. Метод, разработанный для исследования образования мультиплетов, является узкоспециализированным. Нам нужен такой метод, который был бы общим, гибким, достаточно эффективным в