

ной выше системы, причем брались схематические модели атома и атмосферы. Для атомных характеристик этих линий имеем: $g_1 = 2$, $g_2 = 2$, $g_3 = 4$, $A_{31} = A_{21}$, $B_{13} = 2B_{12}$, $C_{21} = C_{31}$. Поэтому $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13}$ и $\eta_{12} = 2\eta_{13}$. Приняв в качестве основного переход $1 \leftrightarrow 3$, получим $\gamma_2 = 1/2$, $\gamma_3 = 1$. Решения были найдены для ряда типичных значений параметров ε_{13} и η_{13} и нескольких стандартных видов зависимости функции Планка от глубины. На рис. 12.7 представлены результаты для случаев $B_\nu = 1$, $\varepsilon = 10^{-4}$ и $\eta = \eta_{13} = 0, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$ и 1. Видно, что хотя для того, чтобы гарантировалось строгое равенство функций источников вплоть до самой поверхности, значение η_{13} должно было бы быть больше 1, их равенство при $\tau \geq 1$, т.е. в области, дающей основной вклад в интенсивность выходящего излучения, обеспечивают уже меньшие значения η_{13} . Интенсивности выходящего излучения для $\mu = 1, 0; 0,8; 0,6$ приведены на рис. 12.8. Ясно видно, что при $\eta = 10^{-3}$ профили очень близки между собой, а при $\eta = 10^{-2}$ они неразличимы. Эти расчеты показывают, что для всех практических целей равенство функций источников *может* приниматься и при $\eta \ll 1$. На самом деле этот результат неудивителен, так как можно было бы заранее *ожидать*, что конверсия фотонов должна преобладать над их термализацией в каждой отдельной линии, как только $\eta \gg \varepsilon$. Было также изучено влияние зависимости температуры от глубины и показано, что когда B_ν с ростом глубины возрастает, значение η , необходимое для обеспечения равенства функций источников, уменьшается (по сравнению со случаем $B_\nu = 1$), если же B_ν убывает с глубиной — то увеличивается. Эти выводы, однако, основаны на рассмотрении частных форм зависимости $B_\nu(\tau)$ и не могут претендовать на общность.

12.3. Метод полной линеаризации

В свете всего сказанного в этой главе легко понять, что влияние эффектов взаимосвязи переходов в задачах об образовании линий многоуровневых атомов очень существенно, чрезвычайно сложно и его учет приводит к системам уравнений, которые могут быть плохо обусловленными. Ни один из методов, обсуждавшихся нами до сих пор, не является вполне подходящим для решения многоуровневых задач. Метод эквивалентных двухуровневых атомов перестает работать, когда между линиями имеется сильная взаимозависимость. Метод, разработанный для исследования образования мультиплетов, является узкоспециализированным. Нам нужен такой метод, который был бы общим, гибким, достаточно эффективным в

отношении его вычислительных возможностей и таким, чтобы он позволил преодолеть все сложности, обусловленные физикой проблемы. Всем этим требованиям удовлетворяет *метод полной линеаризации* [42]. В этом методе при решении уравнения переноса с самого начала целиком учитываются ограничения, налагаемые на решение *всей совокупностью* уравнений статистического равновесия (путем линеаризации их по всем населенностям уровней и по входящим в них интенсивностям излучения). Уравнения статистического равновесия описывают физические процессы взаимодействия фотонов с веществом, их рождения, гибели, конверсии, дробления и взаимного влияния в том коллективном ансамбле, понятие о котором ввел Джеффрис. Уравнения же переноса определяют, каким образом эта информация распространяется с одной глубины на другую. С помощью процедуры линеаризации выводится совокупность уравнений, которые вполне последовательно (с точностью до членов первого порядка) описывают реакцию вещества в *любой* данной точке атмосферы на изменение поля излучения на *любой* частоте и в *любой* точке по глубине. И наоборот, те же уравнения описывают ответную реакцию поля излучения во *всех* частотах и во *всех* точках среды на изменение свойств вещества в *любой* точке. Если эта система решена (итеративно), то тем самым получено совместное решение всей совокупности уравнений статистического равновесия и переноса излучения. Это решение отражает как нелокальный характер процесса переноса излучения (проявляющийся в том, что значения длин гибели и конверсии фотонов неизменно оказываются большими, а это приводит к сложным взаимодействиям со свободной поверхностью на границе среды), так и весьма тонкую инфраструктуру уравнений статистического равновесия. Этот метод предоставил в наше распоряжение практическую возможность рассчитывать очень сложные модели атомов, находящихся в условиях, очень близких к реальности.

Мы рассмотрим задачу о статистическом равновесии многоуровневных атомов «примесного» элемента, который не влияет на структуру атмосферы. Модель атмосферы считается *заданной*. Это значит, что температура T , электронная концентрация n_e , плотность вещества ρ и полная концентрация рассматриваемой примеси $n_{\text{атом}}$ являются заданными фиксированными функциями глубины. Предполагается, что атом имеет L дискретных уровней, относящихся, возможно, к различным стадиям ионизации. Уравнения статистического равновесия записываются таким образом, что ими учитываются все переходы между всеми уровнями; задается также

условие равенства полной концентрации атомов и ионов рассматриваемого элемента величине $n_{\text{атом}}$. Эти уравнения будут иметь тот же общий вид, что и M_{He} первых строк матрицы, приведенной в § 5.4, дополненных уравнением

$$\sum_{ij} n_{ij} = n_{\text{атом}}. \quad \text{Для облегчения из-}$$

ложения сделаем упрощающее предположение, что на любой заданной частоте ν_n возможен только *один* переход (скажем, $l \leftrightarrow u$) между состояниями атома, за счет которого он может взаимодействовать (при связанно-связанных или связанно-свободных переходах) с полем излучения, а все остальные источники поглощения и испускания излучения на этой частоте считаются заданными и фиксированными.

Уравнение переноса, которое надо решить для каждой частоты, имеет вид

$$\partial^2(f_\nu J_\nu)/\partial \tau^2 = J_\nu - \eta_\nu/\chi_\nu. \quad (12.34)$$

Согласно формулам (7.1) и (7.2), коэффициенты поглощения и излучения на частотах связанно-связанного перехода можно записать в виде

$$\chi_\nu = \alpha_{lu}(\nu)(n_l - g_l n_u/g_u) + X_\nu, \quad (12.35a)$$

$$\eta_\nu = (2h\nu^3/c^2)\alpha_{lu}(\nu)g_l n_u/g_u + E_\nu, \quad (12.35b)$$

а на частотах связанно-свободного перехода — в виде

$$\chi_\nu = \alpha_{lu}(\nu)[n_l - n_u(n^*_l/n^*_u)\exp(-h\nu/kT)] + X_\nu, \quad (12.36a)$$

$$\eta_\nu = (2h\nu^3/c^2)\alpha_{lu}(\nu)n_u(n^*_l/n^*_u)\exp(-h\nu/kT) + E_\nu, \quad (12.36b)$$

где X_ν и E_ν считаются заданными. Для унификации обозначений положим

$$\chi_\nu = \alpha_{lu}(\nu)[n_l - G_{lu}(\nu)n_u] + X_\nu, \quad (12.37a)$$

$$\eta_\nu = (2h\nu^3/c^2)\alpha_{lu}(\nu)G_{lu}(\nu)n_u + E_\nu, \quad (12.37b)$$

где $G_{ln}(\nu) = g_l/g_n$ для связанно-связанных переходов и $G_{ln}(\nu) = n_e \Phi_l(T)\exp(-h\nu/kT)$ для связанно-свободных переходов, причем $\Phi_l(T)$ — множитель Саха-Больцмана для уровня l [см. (5.14)]. Система уравнений дискретизуется по глубине точками $\{\tau_d\}$, $d = 1, \dots, D$, и по частоте — точками $\{\nu_k\}$, $k = 1, \dots, K$. Тогда для каждой частоты ν_k уравнение переноса излучения можно

написать в виде (7.37). Эти уравнения линеаризуются, и получают-ся уравнения вида (7.39), где в данном случае $\delta\chi_{dk}$ и $\delta\eta_{dk}$ даются следующими простыми выражениями:

$$\delta\chi_{dk} = \alpha_{lu}(v_k)[\delta n_{l,d} - G_{lu}(v_k)\delta n_{u,d}], \quad (12.38a)$$

$$d\eta_{dk} = (2hv_k^3/c^2)\alpha_{ln}(v_k)G_{lu}(v_k)\delta n_{u,d}. \quad (12.38b)$$

Величины δn можно выразить через изменения характеристик одно-го только поля излучения, так как предполагается, что T и n_l фиксиро-ваны. Согласно уравнениям (5.102) и (7.157), можно поэтому напи-сать

$$\delta n_d = \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial n}{\partial J_k} \right)_d \delta J_{dk}, \quad (12.39)$$

где явные *аналитические* выражения для элементов матриц $\partial n/\partial J_k$, даются формулой (5.108). При помощи выражений (12.38) и (12.39) теперь легко все δn исключить из линеаризованных уравнений пере-носа *аналитически*, так что туда будут входить лишь δJ [33], и мы получим уравнения в стандартной форме Фотрие

$$- \mathbf{A}_d \delta \mathbf{J}_{d-1} + \mathbf{B}_d \delta \mathbf{J}_d - \mathbf{C}_d \delta \mathbf{J}_{d+1} = \mathbf{L}_d, \quad (12.40)$$

где

$$\delta \mathbf{J}_d = (\delta J_{d1}, \dots, \delta J_{dk}, \dots, \delta J_{dK})^T \quad (12.41)$$

и

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{C}_D = 0.$$

Упражнение 12.3. Выписать явные выражения для элементов матриц \mathbf{A}_d , \mathbf{B}_d и \mathbf{C}_d , а также вектора \mathbf{L}_d , входящих в уравнение (12.40).

В процедуре линеаризации, описанной в § 7.5, δJ и δn входили в уравнение явным образом. Исключение δn снижает размерность систе-мы с $K + L$ до K , что позволяет сберечь машинную память. *Од-нако* в рассматриваемом нами теперь случае \mathbf{A} и \mathbf{C} — это *полные* матрицы, все элементы которых отличны от нуля, в то время как при прежнем рассмотрении [см. уравнение (7.159)] \mathbf{A} и \mathbf{C} были *диа-гональными* (исключая уравнение, выражающее условие гидроста-тического равновесия, которое в этом разделе для нас несуществен-но). При выполнении процедуры последовательного исключения не-известных, описываемой формулами (6.40) и (6.41), во все операции теперь входят полные матрицы, и поэтому необходимое машинное время возрастает. Общее время счета есть теперь $T = cDK^3$, тогда

как прежде оно (§7.5) было $T' = c'D(K + L)^3$, но c гораздо больше c' .

Решение уравнений (12.40) осуществляется итерациями, как это описывается ниже. Большим достоинством излагаемого метода является то, что он учитывает взаимное влияние одних глубин на другие и различных частот друг на друга. Точнее говоря, влияние δJ_{dk} в точке (τ_d, ν_k) на $J_{d'k'}$ во всех других точках $(\tau_{d'}, \nu_{k'})$ учитывается вполне последовательно, так что процесс распространения фотонов в составе их коллективного ансамбля оказывается полностью описанным.

Имея в виду реальные применения метода, нам следует теперь обсудить вопрос, как получать исходное приближение и как справиться с тем большим числом линий, которые приходится учитывать при изучении реалистичных моделей атомов. Эти вопросы взаимосвязаны, но особенно важным является второй из них. Предположим, например, что в модели атома учитывается 20 уровней. Согласно правилам комбинаторики, при этом могло бы происходить порядка 200 переходов. Если мы, скажем, возьмем по 10 значений частоты на профиль каждой линии, то задача становится не поддающейся решению. Однако спектроскопические правила отбора, разумеется, сильно ограничивают число линий, которые действительно возможны в спектре, так что при 20 уровнях в типичном случае имеется около 30 разрешенных линий. Но лишь немногие из них будут непосредственно влиять на населенности тех уровней, которые представляют основной интерес при рассмотрении определенного ограниченного набора линий в спектре. Обычно удастся разбить всю совокупность переходов на «основные», которые необходимо описывать строго самосогласованно, и «второстепенные», для которых оказывается достаточно менее точного описания. Такое разбиение используется и при нахождении исходного решения.

Для расчета исходного приближения берется модель атмосферы, по ней определяются фоновые коэффициенты поглощения и излучения и рассчитывается поле излучения в предположении равновесных населенностей уровней рассматриваемого атома. Рассчитанные интенсивности излучения используются для вычисления числа фотоионизаций. Затем решаются уравнения статистического равновесия в предположении детального баланса в линиях (но не в континуумах). Поступая таким образом, мы получаем решение с правильной асимптотикой на больших глубинах. После этого для получения \bar{J}_{ln} в каждой линии можно использовать приближение эквивалентного двухуровневого атома.

Найденные значения \bar{J} позволяют рассчитать числа радиативных переходов в линиях. После этого можно решить полные уравнения статистического равновесия, что дает улучшенные значения населенностей уровней. Этот процесс можно повторить несколько раз, расширив его путем включения для непрозрачных континуумов аналога решения в приближении двухуровневого атома, описываемого в §7.5 [см. формулы (7.135) — (7.144)]. Описанный только что процесс можно было бы в принципе повторять до достижения сходимости. В итоге мы пришли бы к методу, описанному в §12.1. Однако в рассматриваемом случае выполняется всего одна или две итерации, и результаты принимаются в качестве начальных приближенных значений n , J и эддингтоновских множителей, необходимых, чтобы можно было начать использовать процедуру линеаризации. Начиная с этого места и далее, числа радиативных процессов во «второстепенных» линиях оставляются неизменными, равными их значениям, получаемым в приближении эквивалентных двухуровневых атомов, а в линеаризационном процессе явно участвуют лишь «основные» линии. Такой подход даст адекватное описание *второстепенных* линий, если они были выбраны удачно и если а) они очень слабы, так что определяются процессами излучения и поглощения в континууме, на который они накладываются, или б) они действительно изолированы и поэтому достаточно точно описываются моделью двухуровневого атома, или же в) они *очень слабо* связаны с линиями, представляющими основной интерес, несмотря на то, что они, скажем, входят в состав мультиплета и приближение двухуровневого атома для них является плохим.

Пользуясь тем начальным приближением, способ получения которого был только что описан, решаем затем линеаризованные уравнения (12.40) и находим δJ на всех глубинах. По полученным δJ уточняем поле излучения. После этого приводим в соответствие с этим уточненным полем излучения значения членов уравнений статистического равновесия, описывающих радиативные переходы, и заново решаем эти уравнения, что дает новые значения населенностей уровней. По этим новым населенностям можно рассчитать коэффициенты поглощения и излучения, затем подставить их в формальное решение уравнения переноса (Λ -итерация) и найти поле излучения и эддингтоновские множители (на этом шаге достигается также сглаживание решения). Метод обычно сходится очень быстро, давая $|\delta J_\nu / J_\nu| \leq 10^{-5}$ за 4 или 5 итераций с типичным уменьшением погрешности на порядок с каждой итерацией. Именно эта схема использовалась при получении большинства результатов, об-

суждаемых в §12.4. Детальное описание одного конкретного варианта этого метода, включая программу, рассчитанную на применение к атмосфере Солнца, дается в [36].

Трудность для развитого выше подхода, основанного на методе Фотрие, заключается в том, что при учете большого числа точек разбиения по частоте расчеты становятся дорогостоящими. Эту трудность, однако, можно преодолеть при помощи нового способа [37], в котором исключение неизвестных производится по схеме Райбики. Предположим опять, что на частоте ν_k возможен только один переход с номером t , происходящий между уровнями l и u . Для этой конкретной частоты линеаризованное уравнение переноса (7.39) с учетом формул (12.38) можно записать в виде

$$\mathbf{T}_k \delta \mathbf{J}_k + \mathbf{L}_k \delta \mathbf{n}_l + \mathbf{U}_k \delta \mathbf{n}_u = \mathbf{R}_k, \quad (12.42)$$

где каждый вектор приращений содержит информацию об изменении той или иной величины с глубиной, например

$$\delta \mathbf{J}_k = (\delta J_{lk}, \dots, \delta J_{dk}, \dots, \delta J_{Dk})^T, \quad (12.43)$$

а матрицы \mathbf{T}_k , \mathbf{L}_k и \mathbf{U}_k имеют размерность D и являются трехдиагональными. Уравнения (12.42) можно разрешить относительно $\delta \mathbf{J}_k$ и записать результат в виде

$$\delta \mathbf{J}_k + \mathcal{L}_k \delta \mathbf{n}_l + \mathcal{U}_k \delta \mathbf{n}_u = \vec{\mathcal{R}}_k, \quad (12.44)$$

где теперь \mathcal{L} и \mathcal{U} — полные матрицы, т.е. матрицы, все элементы которых ненулевые. Далее, основными из входящих в уравнения стационарности величин, зависящих от поля излучения, являются числа несбалансированных радиативных переходов, проинтегрированные по каждой из рассматриваемых линий. Поэтому введем их вариации, определив их следующим образом:

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{Z}_t)_d &= n_{l,d} \delta R_{lu,d} - n_{u,d} \delta R_{ul,d} = \\ &= \sum_k [4\pi w_k \alpha_{lu}(\nu_k) / h\nu_k] [n_{l,d} - G_{lu}(\nu_k) n_{u,d}] \delta \mathbf{J}_{dk}, \end{aligned} \quad (12.45)$$

где сумма распространяется только на те частоты, которые лежат в пределах линии с номером t . Если в (12.45) подставить $\delta \mathbf{J}_k$ из (12.44) и выполнить необходимые суммирования, то окончательно получим

$$\delta \mathbf{Z}_t + \mathbf{A}_t \delta \mathbf{n}_l + \mathbf{B}_t \delta \mathbf{n}_u = \mathbf{C}_t, \quad (12.46)$$

где \mathbf{A}_t и \mathbf{B}_t — полные матрицы.

Упражнение 12.4. а) Написать явные выражения для элементов матриц T_k , L_k и U_k , а также вектора R_k , входящих в уравнение (12.42). б) Предполагая, что матрицы L_k , U_k и вектор R_k известны, написать явные выражения для элементов A_t , B_t и C_t в уравнении (12.46).

Из (5.108) и (12.39) следует, что можно написать

$$\delta n_m = \sum_t D_{mt} \delta Z_t, \quad (12.47)$$

где D_{mt} — диагональная матрица с элементами $(D_{mt})_d = (\partial n_m / \partial Z_t)_d = (\mathcal{A}_d)_{mj}^{-1} - (\mathcal{A}_d)_{mi}^{-1}$. Здесь \mathcal{A}_d — невозмущенная матрица для точки разбиения по глубине с номером d , а i и j — номера нижнего и верхнего уровней линии с номером t . Подставив выражение (12.47) в уравнение (12.46), получим систему

$$\begin{aligned} E_t \delta Z_t &= (I + A_t D_{tt} + B_t D_{ut}) \delta Z_t = \\ &= C_t - A_t \sum_{t' \neq t} D_{tt'} \delta Z_{t'} - B_t \sum_{t' \neq t} D_{ut'} \delta Z_{t'}, \end{aligned}$$

причем для каждого перехода, т.е. для каждого t , будет по одному такому уравнению.

Полный порядок системы (12.48), которая описывает всевозможные взаимодействия между линиями (их взаимосвязь) на всех глубинах, равен DT . Непосредственное решение этих уравнений требовало бы поэтому времени порядка $T_D = cD^3T^3$, которое при, скажем, $T \approx 20$ и $D \approx 50$ становится уже неприемлемо большим. Поэтому система решается итерациями при помощи метода *поэтапного учета воздействия линий* (ПУВ) [526], стр. 438. В этом методе используются два основных итерационных цикла: а) итерация ПУВ для получения определенного набора значений δZ_t , $t = 1, \dots, T$, на данном этапе линеаризации и б) общая процедура метода линеаризации, при которой последовательные совокупности значений δZ_t используются для обновления значений членов, дающих числа переходов, после чего заново решаются полные уравнения статистического равновесия. Процедура ПУВ начинается с решения систем $E_t \delta Z_t^{(0)} = C_t$, $t = 1, \dots, T$. Это начальное решение требует cD^3T операций, причем разрешенные относительно неизвестных системы (или, что эквивалентно, E_t^{-1}) сохраняются в памяти. Затем для каждого набора текущих значений величин δZ_t можно

вычислить правую часть уравнения (12.48), последовательно для каждой линии (заметим, что эта процедура требует лишь перемножения векторов и поэтому выполняется очень быстро). Это дает некоторый определенный вектор известных значений правой части. При помощи ранее найденной E_i^{-1} получаются новые значения величин δZ_i . Каждый цикл процедуры ПУВ требует cD^2T^2 операций, так что если необходимо произвести I итераций, то полное время вычислений оказывается порядка $T_{\text{пув}} = cD^3T + c'D^2T^2$. Ясно, что если $I < DT$, то это значительно меньше T_D .

Путем проведения тестовых расчетов найдено [37], что этот метод работает хорошо, несмотря на то, что итерации ПУВ напоминают метод эквивалентных двухуровневых атомов в том отношении, что на каждом шаге рассматривается только одна линия. Причина заключается в том, что эта часть расчетов требуется лишь для определения величин δZ , т.е. является всего лишь одним шагом общей процедуры метода полной линеаризации (который как раз специально и предназначен для того, чтобы позволить последовательно учитывать все эффекты взаимосвязи). Ввиду того что в методе линеаризации должны выполняться дальнейшие этапы итераций, нет необходимости на каждой данной стадии знать величины δZ точно. Достаточно такой точности, чтобы *ошибка* текущих значений δZ , была меньше значений *самых величин* δZ , на следующем этапе линеаризационной процедуры. На практике хорошо работает требование

$$|\delta Z_i^{(i)} - \delta Z_i^{(i-1)}| < \varepsilon |\delta Z_i^{(i)}|$$

(где i означает номер итерации в методе ПУВ), если ε положить равным примерно 10^{-2} . Оказалось, что оба метода, описанные в этом разделе, очень эффективны для решения широкого круга физических задач, связанных с рассмотрением различных атомов в звездных атмосферах разных типов. Теперь обратимся к обсуждению некоторых результатов, полученных для звезд ранних типов.

12.4. Линии легких элементов в спектрах звезд ранних типов

Совместное изучение системы уравнений переноса и статистического равновесия позволило глубоко проникнуть в физику образования линий в звездных атмосферах. Однако одновременно выяснилось, что, когда учитываются отклонения от ЛТР, уравнения, которые необходимо решить, становятся крайне сложными и требу-