

уровни и в континуум не учитывались. Это несколько снижает точность определения населенностей верхних состояний. Хорошее согласие с наблюдениями было получено при $T_e = 22\,000$ К, $n_e = 4 \cdot 10^{11}$ см $^{-3}$ и $n(C^{++}) = 1 \cdot 10^9$ см $^{-3}$, причем принималось, что $T_c = 30\,000$ К, $R/r_c = 3,6$ и $v(R) = 900$ км/с. Найдено, что населенности четырех нижних возбужденных состояний по отношению к основному состоянию бoльцмановские, тогда как более высокие уровни недонаселены. В предположении, что *весь* углерод находится в форме ионов C^{++} , а все электроны поставляются водородом, найдена нижняя оценка отношения $n(C)/n(H)$, а именно $2,5 \cdot 10^{-3}$. Это значение превышает нормальное космическое содержание в 8 раз и заставляет думать, что содержание углерода в звездах WC в самом деле выше обычного и что главенство линий углерода в их спектрах этим и обусловлено. Учет других ионов углерода, а также электронов, поставляемых другими источниками (например, He), лишь повысил бы приведенную выше нижнюю оценку. Для γ^2 Vel $T_e < T_c$, что отнюдь не является аргументом в пользу нерadiативного подвода энергии и даже не исключает возможности лучистого равновесия в оболочке.

14.3 Уравнение переноса в сопутствующей системе координат

Все виды уравнения переноса, обсуждавшиеся в этой главе до сих пор, были основаны на использовании покоящейся системы отсчета наблюдателя, которому вещество звезды представляется движущимся. Как мы видели, при таком подходе имеется та трудность, что коэффициенты поглощения и излучения вещества из-за эффекта Доплера и aberrации света становятся зависящими от углов. Это приводит к появлению неустранимой связи между углом и частотой и порождает серьезные трудности при вычислении членов, описывающих рассеяние, с помощью дискретных квадратурных сумм. Поэтому становится заманчивым рассмотреть задачу о переносе излучения в системе отсчета, движущейся вместе со звездой.

Есть два веских довода за использование системы отсчета, движущейся вместе с веществом. 1) С точки зрения того, как выглядит уравнение переноса, здесь имеется то преимущество, что в сопутствующей системе и коэффициент поглощения, и коэффициент излучения *не зависят от углов*. Далее, при решении задач с учетом частичного перераспределения можно пользоваться стандартными

функциями перераспределения (относящимися к *неподвижной* среде). Кроме того, при вычислении интегралов, описывающих рассеяние, достаточно рассматривать лишь такую полосу частот, которая целиком охватывала бы профиль поглощения в линии. Ширина этой полосы *не зависит* от скорости вещества. Наконец, квадратурная формула по углу может выбираться, исходя лишь из того, каково *угловое* распределение излучения. 2) Газодинамические расчеты для сферически-симметричных течений (например, расчеты пульсаций, расширения) могут выполняться с высокой точностью в *лагранжевой системе координат* (т.е. в сопутствующей системе). Лагранжевы уравнения газодинамики легко формулируются, и с физической, и с расчетной точек зрения они обладают многими достоинствами. Ясно, что было бы хорошо научиться и поля излучения рассматривать близким к этому способом. С другой стороны, при пользовании сопутствующей системой есть та трудность, что имеющиеся сейчас методы решения пригодны только для сравнительно простых видов движений, так как иначе постановка граничных условий становится очень трудной (см. ниже упражнение 14.12).

Нами в сопутствующей системе будут выведены 1) *монохроматическое уравнение переноса*, которое используется, например, для расчета профилей линий, и 2) *проинтегрированные по частоте моментные уравнения*, которыми определяются суммарные вклады, даваемые излучением в энергию, импульс и давление в сплошной среде, состоящей из газа и излучения.

Чтобы получить выражения, описывающие изменение фигурирующих в задаче физических величин при переходе от покоящейся к сопутствующей системе отсчета, применяется преобразование Лоренца. Здесь мы сталкиваемся с трудностью: строго говоря, преобразование Лоренца применимо, только если скорость v одной системы относительно другой *не зависит от координат и от времени*. Однако в случае звездных атмосфер мы имеем дело с таким положением, когда $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, и, следовательно, сопутствующая система отсчета *не является инерциальной*. Поэтому приходится рассматривать преобразования, описывающие переход из равномерно движущихся систем, которые совпадают в *данный момент времени* с движущейся средой. Указанная только что трудность делает анализ значительно более сложным. Легко показать, что уравнение переноса в двух *равномерно* движущихся системах имеет один и тот же вид (т.е. оно *ковариантно*), если при расчете атомных характеристик производится учет эффекта Доплера и абберрации. Не со-

ставляет труда и установление того, как при таком преобразовании изменяются атомные характеристики. Однако для *нестационарных* и для *стационарных дифференциальных течений* в уравнениях появляются *новые члены*, которые по сути дела учитывают *изменения* в преобразованиях Лоренца от одной точки среды к другой. Эти члены можно получить путем применения дифференциального оператора уравнения переноса $c^{-1}\partial/\partial t + \mathbf{n} \cdot \nabla$ к коэффициенту преобразования удельной интенсивности.

ПЕРЕХОД К ЛОКАЛЬНОЙ ЧАСТОТЕ

Прежде чем приступить к детальному обсуждению преобразования физических переменных, входящих в уравнение переноса, стоит попытаться простейшим возможным способом составить общее представление о физических особенностях рассматриваемой задачи. Макроскопические движения ведут к появлению *доплеровских смещений* частоты фотонов и *абберации*, а также вызывают *адвекцию*, состоящую в «увеличении» излучения движущейся средой. Формально все эти эффекты имеют порядок v/c . Однако в случае излучения в частотах линии влияние смещения частоты $\Delta\nu$ становится существенным не тогда, когда $\Delta\nu/\nu = v/c$ делается порядка единицы, а уже при $\Delta\nu/\Delta\nu_D = v/v_{\text{тепл}}$ порядка единицы. По существу, влияние эффекта Доплера усиливается в $c/v_{\text{тепл}}$ раз из-за быстрого изменения коэффициента поглощения в линии с частотой. Поэтому в первом приближении достаточно учитывать *только доплеровские смещения*, пренебрегая *абберацией* и *адвекцией*.

Если ν — частота излучения в системе наблюдателя, то соответствующая частота в сопутствующей системе равна $\nu_0 = \nu(1 - \mu\nu/c)$. В системе наблюдателя дифференциальный оператор $\mu\partial/\partial z$ (для стационарной плоскопараллельной атмосферы) действует при постоянной частоте ν . Однако если мы сместимся на расстояние Δz , сохраняя ν фиксированным, то изменится $\nu_0 = \nu_0(\nu, z)$, так как меняется скорость v . Поэтому $(\partial/\partial z)_\nu \rightarrow (\partial/\partial z)_{\nu_0} + (\partial\nu_0/\partial z)_\nu(\partial/\partial\nu_0)_{\nu_0}$. Ясно, что $(\partial\nu_0/\partial z)_\nu = -(\nu_0\mu_0/c) \times (\partial\nu/\partial z)$ с точностью до членов порядка v/c . Подставляя эти выражения в уравнение переноса, получим тогда

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial \Gamma^0(z, \mu_0, \nu_0)}{\partial z} - \frac{\mu_0^2 \nu_0}{c} \frac{\partial \nu}{\partial z} \frac{\partial \Gamma^0(z, \mu_0, \nu_0)}{\partial \nu_0} &= \\ &= \eta^0(z, \nu_0) - \chi^0(z, \nu_0) \Gamma^0(z, \mu_0, \nu_0). \end{aligned} \quad (14.99)$$

Соответствующий результат для сферической геометрии имеет вид

$$\mu_0 \frac{\partial \Gamma^0(r, \mu_0, \nu_0)}{\partial r} + \frac{1 - \mu_0^2}{r} \frac{\partial \Gamma^0(r, \mu_0, \nu_0)}{\partial \mu_0} - \frac{\nu_0 v}{cr} \left(1 - \mu_0^2 + \mu_0^2 \frac{d \ln v}{d \ln r} \right) \frac{\partial \Gamma^0(r, \mu_0, \nu_0)}{\partial \nu_0} = \eta^0(r, \nu_0) - \chi^0(r, \nu_0) \Gamma^0(r, \mu_0, \nu_0). \quad (14.100)$$

Упражнение 14.8. Вывести уравнение (14.100).

В связи с уравнениями (14.99) и (14.100) следует отметить несколько моментов. 1) Все переменные — I , μ и ν — берутся здесь в *сопутствующей системе*, и в этой системе χ и η не зависят от углов. 2) Ясно, что при расчете всех членов, описывающих рассеяние, достаточно ограничиться определенной (малой) областью значений ν_0 . 3) Уравнение переноса является теперь уравнением в частных производных. Производная по частоте учитывает изменение с расстоянием частоты данного фотона ν_0 , которую видит внешний наблюдатель, при измерении ее в сопутствующей системе, или, что то же самое, — *смещение частоты фотонов, измеряемой в сопутствующей системе*. Допустим, в частности, что атмосфера расширяется, так что $\partial v / \partial z$ (или $\partial v / \partial r$) больше нуля. Тогда видно, что при перемещении из одной точки атмосферы в другую фотоны всегда испытывают систематическое *красное смещение*, что интуитивно ясно. Заметим, что в случае плоской геометрии играют роль только *градиенты скорости*. В случае сферической геометрии указанный эффект имеет место даже при $\nu(r) = \text{const}$, так как расходимость лучей вызывает в этом случае появление *поперечного* градиента скорости. 4) С математической точки зрения уравнения (14.99) и (14.100) представляют собой уравнения *гиперболического типа* (см. [181], гл. 5; [530], гл. 9 и 12; [462], гл. 4), и для их решения необходимо задать граничные условия по пространственным координатам и начальные условия по частоте, т.е. необходимо решить *краевую задачу с некоторыми начальными условиями*. Численный метод решения этих уравнений будет рассмотрен ниже.

В уравнениях (14.99) и (14.100) отражены все *существенные* физические особенности задачи о *переносе* излучения, однако имеются дополнительные члены, содержащие зависимость от угловой переменной, которые мы опустили, когда пренебрегли абберрацией и адвекцией. Чтобы получить эти члены (они играют важную роль в *гидродинамических уравнениях*), нам нужно исследовать, как соответствующие величины изменяются при преобразовании Лоренца.

ЛОРЕНЦ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Будем рассматривать преобразования, описывающие переход от *покоящейся системы*, определяемой четырьмя координатами $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, ict)$, к *связанной со средой системе* (x_0, y_0, z_0, ict_0) , которая движется относительно покоящейся системы с постоянной скоростью v в направлении оси z . Такой выбор скорости является одним из физически наиболее важных для наших целей и ведет к упрощению вычислений. Обобщения на случай произвольной ориентации \mathbf{v} даются в [621]. Переход из одной системы в другую осуществляется с помощью *преобразования Лоренца*, которое соответствует *собственному вращению* в четырехмерном пространстве-времени. С физической точки зрения преобразование Лоренца выбирается таким образом, что уравнение волнового фронта световой волны имеет в обеих системах *один и тот же вид (ковариантно)* (т.е. таково, что скорость света всегда равна c в обеих системах отсчета).

Преобразование Лоренца имеет следующую математическую форму: $x_0^\alpha = L_3^\alpha x^\beta$ ($\alpha = 1, \dots, 4$), причем здесь использовано эйнштейновское правило, что по повторяющимся индексам производится суммирование. Это преобразование описывается матрицей (см., например, [392], стр. 29, и [253], стр. 191)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}, \quad (14.101)$$

где $\gamma \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ и $\beta \equiv v/c$. Заметим, что матрица L — *эрмитова*, т.е. $L = L^+$, где «+» означает *эрмитово сопряжение* (т.е. комплексное сопряжение и транспонирование). Заметим также, что $L^{-1} = L^\top$, где верхний индекс \top означает обычное транспонирование. В матричных обозначениях $x_0 = Lx$, где x_0 и x — *векторы-столбцы*. Очевидно, что $x = L^{-1}x_0 = L^\top x_0$, или, что эквивалентно, $x^\alpha = (L^{-1})^\alpha_\beta x_0^\beta$.

Преобразование Лоренца можно применять к любым 4-векторам и к любым 4-тензорам второго ранга. Правила преобразования тензорного анализа обеспечивают ковариантность этих величин относительно преобразования Лоренца (*так как оно представляет собой собственное вращение в четырехмерном пространстве*). Поэтому *физические законы, записанные через 4-векторы и 4-тензоры, являются ковариантными автоматически*.

Преобразование произвольного *контравариантного* 4-вектора \mathbf{A} [например, пространственно-временного приращения $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, ic\Delta t)^T$], определяется таким образом, что $A_0^\alpha = (\partial x_0^\alpha / \partial x^\beta) \times A^\beta = L_\beta^\alpha A^\beta$, или, в матричных обозначениях, $\mathbf{A}_0 = \mathbf{L}\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}_0$. Преобразование *ковариантного* 4-вектора \mathbf{B} (например, оператора градиента $[\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z, (ic)^{-1}\partial/\partial t]^T$) определяется формулой $(B_0)_\alpha = (\partial x^\beta / \partial x_0^\alpha) B_\beta = (L^{-1})_\alpha^\beta B_\beta$, которая в матричной записи эквивалентна формуле $\mathbf{B}_0^T = \mathbf{B}^T \mathbf{L}^{-1}$, или, после транспонирования, $\mathbf{B}_0 = (\mathbf{L}^{-1})^T \mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{B}$. Кроме того, $\mathbf{B} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{B}_0$. Наконец, преобразование контравариантного тензора второго ранга $C^{\alpha\beta}$ определяется формулой $C_0^{\alpha\beta} = L_\gamma^\alpha L_\delta^\beta C^{\gamma\delta}$, которая (в матричной форме) эквивалентна формуле $\mathbf{C}_0 = \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{L}^T = \mathbf{L}\mathbf{C}\mathbf{L}^{-1}$ (т.е. рассматриваемое преобразование есть преобразование *подобия*). Мы имеем также $\mathbf{C} = \mathbf{L}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{L} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{C}_0 \mathbf{L}$. (Замечание: термин *ковариантный*, используемый при описании 4-вектора \mathbf{B} , имеет иной смысл, нежели тот, который имелся в виду двумя фразами раньше и относился к физическим законам, где он означал «того же самого вида». Этот двойной смысл слова «ковариантный», сколь он ни неудобен, является общеупотребительным.)

Располагая приведенными выше правилами преобразований, мы можем теперь вывести ряд важных результатов. Прежде всего, применяя преобразование к самим координатам, легко показать, что относительное движение двух систем отсчета не влияет на длину отрезков, перпендикулярных к оси z , т.е. $\Delta x_0 = \Delta x$ и $\Delta y_0 = \Delta y$. Однако объект длиной Δz , покоящийся в неподвижной системе, согласно измерениям, выполненным наблюдателем в движущейся системе, будет иметь длину

$$\Delta z_0 = \gamma^{-1} \Delta z. \quad (14.102a)$$

Этот результат выражает знаменитый *эффект сокращения Лоренца — Фицджеральда*. Аналогичным образом временной интервал Δt , измеренный в неподвижной системе, по измерениям, выполненным наблюдателем в движущейся системе, будет равен

$$\Delta t_0 = \gamma \Delta t. \quad (14.102b)$$

Эта формула выражает *эффект замедления времени*. Из этих результатов мы заключаем, что элемент объема пространства-времени *инвариантен*, т.е.

$$dV dt = dV_0 dt_0. \quad (14.103)$$

Этот результат будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

Далее, применяя преобразование Лоренца к 4-градиенту (являющемуся ковариантным вектором), получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} \right) = \\ & = \left[\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial y_0}, \gamma \left(\frac{\partial}{\partial z_0} - \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t_0} \right), \frac{\gamma}{ic} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} - c\beta \frac{\partial}{\partial z_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (14.104)$$

Обратимся теперь к преобразованию величин, характеризующих излучение и его перенос (дальнейшие сведения об этом можно найти в [521], [551] и [621]). Для произвольной частицы 4-импульс $P^\alpha = (p_x, p_y, p_z, iE/c)^\Gamma$, где p_j — j -й компонент обычного импульса и E — полная энергия частицы. Если частица имеет массу покоя m_0 , то $p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 = E^2$, где $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$. Для фотонов $m_0 = 0$ и $E = h\nu$, поэтому $p = h\nu/c$ и

$$P^\alpha = (h\nu/c)(n_x, n_y, n_z, i)^\Gamma = (h\nu/c)(\mathbf{n}, i)^\Gamma. \quad (14.105)$$

Здесь \mathbf{n} — единичный вектор направления распространения фотона и $(n_x, n_y, n_z) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$. Применяя преобразование Лоренца к выражению (14.105), находим

$$(\nu_0 n_x^0, \nu_0 n_y^0, \nu_0 n_z^0, i\nu_0) = [\nu n_x, \nu n_y, \nu \gamma(n_z - \beta), i\nu \gamma(1 - n_z \beta)], \quad (14.106)$$

что эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} & [\phi_0; (1 - \mu_0^2)^{1/2}; \mu_0; \nu_0] = [\phi; \gamma^{-1}(1 - \mu^2)^{1/2}/(1 - \mu\beta); \\ & (\mu - \beta)/(1 - \mu\beta); \nu \gamma(1 - \mu\beta)]. \end{aligned} \quad (14.107)$$

Обратное преобразование дает

$$\begin{aligned} & [(1 - \mu^2)^{1/2}; \mu; \nu] = [\gamma^{-1}(1 - \mu_0^2)^{1/2}/(1 + \mu_0\beta); (\mu_0 + \beta)/(1 + \mu_0\beta); \\ & \nu_0 \gamma(1 + \mu_0\beta)]. \end{aligned} \quad (14.108)$$

Соотношения (14.106) — (14.108) выражают хорошо известные результаты, касающиеся доплеровского смещения и aberrации. Классические результаты можно из них получить, удерживая только члены $O(v/c)$ т.е. полагая $\gamma = 1$. Из равенств (14.107) и (14.108) легко видеть, что $d\nu_0 = (\nu_0/\nu)d\nu$ и $d\mu_0 = (\nu/\nu_0)^2 d\mu$. Отсюда, пользуясь тем, что $d\omega = \sin \theta d\theta d\phi = d\mu d\phi$, находим

$$\nu d\nu d\omega = \nu_0 d\nu_0 d\omega_0. \quad (14.109)$$

Чтобы выяснить трансформированные свойства удельной интенсивности, найдем [621] число фотонов в интервале частот $d\nu$, проходящих за время dt через площадку dS , ориентированную перпен-

дикулярно к оси z , в телесном угле $d\omega$ вблизи направления, составляющего с осью z угол $\theta = \arccos \mu$. Предположим, что площадка dS неподвижна в покоящейся системе. Тогда

$$N = [I(\mu, \nu) / h\nu] d\omega d\nu dS \cos \theta dt.$$

Эта величина должна совпадать с числом фотонов, проходящих через ту же элементарную площадку, которое насчитал бы наблюдатель из движущейся системы, а именно

$$N_0 = [I^0(\mu_0, \nu_0) / h\nu_0] d\omega_0 d\nu_0 \times (dS \cos \theta_0 dt_0 + c^{-1} dS \nu dt_0).$$

Здесь первое слагаемое дает то число фотонов, которое получилось бы, если бы площадка dS была неподвижна в сопутствующей системе, а второе представляет собой концентрацию фотонов $I^0 / h\nu_0 c$, умноженную на объем $dS \nu dt_0$, заметаемый площадкой dS за время dt_0 . Используя соотношения (14.102), (14.108) и (14.109), находим, что

$$I(\mu, \nu) = (\nu / \nu_0)^3 I^0(\mu_0, \nu_0). \quad (14.110)$$

Рассмотрим, далее, коэффициент излучения. Число фотонов, испускаемых данным объемом за заданный промежуток времени в заданном телесном угле и интервале частот, должно быть в обеих системах одинаково. Поэтому

$$(\eta_\nu d\omega d\nu dV dt) / h\nu = (\eta_\nu^0 d\omega_0 d\nu_0 dV_0 dt_0) / h\nu_0,$$

откуда следует, что

$$\eta(\mu, \nu) = (\nu / \nu_0)^2 \eta^0(\nu_0) \quad (14.111)$$

(здесь явным образом указано, что η в сопутствующей системе не зависит от углов). Чтобы энергетический баланс имел место в любой системе отсчета, необходимо, чтобы скорость потерь энергии на излучение равнялась темпу ее поглощения. Поэтому, пользуясь соотношениями (14.110) и (14.111), заключаем, что

$$\chi(\mu, \nu) = (\nu_0 / \nu) \chi^0(\nu_0). \quad (14.112)$$

Наконец, для двух систем отсчета, равномерно движущихся друг относительно друга, дифференциальный оператор уравнения переноса, согласно (14.104) и (14.106), преобразуется при переходе из одной из них в другую следующим образом:

$$c^{-1} \partial / \partial t + \mathbf{n} \cdot \nabla = (\nu_0 / \nu) [c^{-1} \partial / \partial t_0 + \mathbf{n}^0 \cdot \nabla^0]. \quad (14.113)$$

Теперь уже можно показать, что уравнение переноса действительно

ковариантно, поскольку из соотношения (14.110) — (14.113) следует, что уравнение

$$c^{-1}\partial I_\nu/\partial t + (\mathbf{n} \cdot \nabla)I_\nu = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu \quad (14.114a)$$

переходит в следующее:

$$\begin{aligned} (\nu_0/\nu)(c^{-1}\partial/\partial t_0 + \mathbf{n}^0 \cdot \nabla^0)(\nu/\nu_0)^3 I^0(\mu_0, \nu_0) = \\ = (\nu/\nu_0)^2 [\eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) I^0(\mu_0, \nu_0)]. \end{aligned}$$

Если ν/ν_0 постоянно, как это будет, когда две рассматриваемые системы отсчета движутся *равномерно* друг относительно друга (и *только* тогда), это уравнение можно переписать следующим образом:

$$[c^{-1}\partial/\partial t_0 + (\mathbf{n}^0 \cdot \nabla^0)] I^0(\mu_0, \nu_0) = \eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) I^0(\mu_0, \nu_0). \quad (14.114б)$$

Уравнения (14.114a) и (14.114б), очевидно, имеют одну и ту же форму. Следует отметить два момента. а) Несмотря на сходный вид двух указанных уравнений, уравнение (14.114б) (для покоящейся относительно среды системы отсчета) на самом деле гораздо проще, так как $\eta^0(\nu_0)$ и $\chi^0(\nu_0)$ не зависят от углов. б) Уравнение (14.114a) не приводится к уравнению (14.114б), если две рассматриваемые системы движутся *неравномерно* друг относительно друга, т.е. это уравнение неприменимо, скажем, для расширяющихся или пульсирующих атмосфер.

Один из способов преодоления упомянутой выше трудности состоит в том, что описываемые дифференциальным оператором члены, учитывающие прямые пролеты, а также интенсивность излучения по-прежнему записываются в системе отсчета наблюдателя, а для записи членов, описывающих рождение и гибель фотонов, используются разложения первого порядка в сопутствующей системе ([521], гл. 6). Тогда, используя соотношения (14.111), (14.112) и (14.107), можно написать

$$\begin{aligned} (c^{-1}\partial/\partial t + \mathbf{n} \cdot \nabla) I(\mu, \nu) = \eta^0(\nu) - \chi^0(\nu) I(\mu, \nu) + \\ + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c) \{ 2\eta^0(\nu) - \nu \partial \eta^0/\partial \nu + [\chi^0(\nu) + \nu \partial \chi^0/\partial \nu] I(\mu, \nu) \}. \quad (14.115) \end{aligned}$$

Такой подход может оказаться достаточно точным для *континуумов*, где производные по частоте хорошо определены и почти постоянны, однако для *линий* его точность слишком мала, так как η_ν и χ_ν меняются настолько быстро, что разложений первого порядка недостаточно. Сложность применения уравнения (14.115) состоит в том, что в его правой части имеются как четные, так и нечетные по μ члены. Поэтому обычное сведение к уравнению второго по-

рядка невозможно. Тем не менее, используя специальным образом выбранную сетку, удастся построить удовлетворительную численную схему (см., например, [460]).

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОМЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Полные плотность энергии, поток энергии и давление излучения в данном месте определяются следующими проинтегрированными по частоте величинами [см. формулы (1.7), (1.19), (1.28)]:

$$E_R(\mathbf{r}, t) = c^{-1} \int_0^{\infty} dv \oint d\omega I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t), \quad (14.116a)$$

$$\vec{\mathcal{F}}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} dv \oint d\omega I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) \mathbf{n}, \quad (14.116b)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = c^{-1} \int_0^{\infty} dv \oint d\omega I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) \mathbf{n} \mathbf{n}. \quad (14.116b)$$

Они связаны между собой проинтегрированными по частоте моментными уравнениями [см. уравнения (2.75) и (2.68)]

$$c^{-2} \partial \vec{\mathcal{F}} / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{P} = c^{-1} \int_0^{\infty} dv \oint d\omega [\eta(\mathbf{r}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \nu, t)] \mathbf{n} \quad (14.117a)$$

и

$$\partial E_R / \partial t + \nabla \cdot \vec{\mathcal{F}} = \int_0^{\infty} dv \oint d\omega [\eta(\mathbf{r}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \nu, t)]. \quad (14.117b)$$

Уравнения (14.117) в выписанном здесь виде уже являются ковариантными. Один из способов, которым это можно легко показать, состоит в использовании результатов теории электромагнитного поля, в которой показывается (см., например, [331], гл. 12, [386], гл. 4, или [494], гл. 21), что законы сохранения энергии-импульса в электродинамике можно записать в ковариантной форме:

$$\partial T^{\alpha\beta} / \partial x^\beta = -f^\alpha. \quad (14.118)$$

Здесь $T^{\alpha\beta}$ — тензор энергии-импульса электромагнитного поля, а f^α — 4-вектор, дающий (в расчете на единичный объем) три компонента силы Лоренца, действующей со стороны поля на заряженную материю и умноженной на i/c производную по времени от работы, совершаемой полем над зарядами и токами. Тензор энергии-

импульса представляет собой контравариантный 4-тензор второго ранга, а именно

$$T = \begin{pmatrix} -T^M & ic\mathbf{G} \\ ic\mathbf{G} & -W \end{pmatrix}; \quad (14.119)$$

где T^M — максвелловский тензор напряжений (см. § 1.5), \mathbf{G} — плотность импульса и W — плотность энергии поля.

В гл. 1 было показано, что между характеристиками электромагнитного поля и моментами интенсивности излучения можно установить однозначное соответствие, а именно $T^M = -P$, $\mathbf{G} = c^{-2}\vec{\mathcal{F}}$ и $W = E_R$. Поэтому заключаем, что тензор энергии-импульса поля излучения должен быть равен

$$R = \begin{pmatrix} P & ic^{-1}\vec{\mathcal{F}} \\ ic^{-1}\vec{\mathcal{F}} & -E_R \end{pmatrix} = c^{-1} \begin{pmatrix} \int d\nu \oint d\omega I n n & i \int d\nu \oint d\omega I n \\ i \int d\nu \oint d\omega I n & - \int d\nu \oint d\omega I \end{pmatrix}. \quad (14.120)$$

Нетрудно непосредственно убедиться, что R действительно является 4-тензором. Для этого достаточно заметить, что он образован из внешнего произведения 4-вектора $(\nu\mathbf{n}, i\nu)$ [см. (14.105)] самого на себя, умноженного на инвариант $Id\nu d\omega/\nu^2$ [см. соотношения (14.109) и (14.110)], и результат проинтегрирован по всем углам и частотам. Аналогично силу Лоренца можно отождествить с той скоростью, с которой импульс передается от излучения к веществу, а производную по времени от работы — со скоростью подвода энергии излучения к веществу. Поэтому заключаем, что величина

$$\mathbf{g}_R = c^{-1} [\int d\nu \oint d\omega (\chi I - \eta) \mathbf{n}, i \int d\nu \oint d\omega (\chi I - \eta)] \quad (14.121)$$

представляет собой 4-вектор. Чтобы убедиться, что это так, заметим, что вектор \mathbf{g}_R составлен из 4-вектора $(\nu\mathbf{n}, i\nu)$, умноженного на инварианты $\chi Id\nu d\omega/\nu$ или $\eta d\nu d\omega/\nu$. Дивергенция 4-тензора есть автоматически 4-вектор. Поэтому уравнение

$$\partial R^{\alpha\beta} / \partial x^\beta = -g_R^\alpha \quad (14.122)$$

действительно является ковариантным представлением законов сохранения для поля излучения. Нетрудно видеть, что соотношение (14.122) дает уравнение (14.117а) и умноженное на $-ic$ уравнение (14.117б) и что поэтому эти уравнения имеют одну и ту же форму в системах отсчета, *равномерно* движущихся друг относительно друга. При неравномерном движении в моментных уравнениях, записан-

ных в сопутствующей системе отсчета, появляются дополнительные члены.

Для работы с уравнениями радиационной гидродинамики (§ 15.3) полезно иметь формулы преобразования E_R , \vec{F} и P (или, что эквивалентно, J , H и K) при переходе из неподвижной в сопутствующую систему отсчета, записанные с точностью до членов $O(v/c)$. Эти формулы проще всего получить, пользуясь соотношениями (14.109), (14.110) и (14.107) и выполнив в них разложение до членов первого порядка по v/c . Так, полагая $\gamma = 1$, без труда находим, что $I_\nu^0 d\nu_0 d\omega_0 = (v_0/v)^2 I_\nu d\nu d\omega \approx (1 - 2\beta\mu) I_\nu d\nu d\omega$, откуда следует, что

$$J^0 = J - 2\beta H. \quad (14.123a)$$

Аналогично

$$I_\nu^0 \mu_0 d\nu_0 d\omega_0 = (\mu - \beta)(1 - \mu\beta) I_\nu d\nu d\omega \approx [\mu - \beta(1 + \mu^2)] I_\nu d\nu d\omega,$$

$$I_\nu^0 \mu_0^2 d\nu_0 d\omega_0 = (\mu - \beta)^2 I_\nu d\nu d\omega \approx (\mu^2 - 2\mu\beta) I_\nu d\nu d\omega,$$

откуда следует, что

$$H^0 = H - \beta(J + K) \quad (14.123б)$$

и

$$K^0 = K - 2\beta H. \quad (14.123в)$$

Обратные формулы перехода имеют вид

$$(J, H, K) = [J^0 + 2\beta H^0, H^0 + \beta(J^0 + K^0), K^0 + 2\beta H^0]. \quad (14.124)$$

Заметим, что эти формулы перехода справедливы только для моментов, проинтегрированных по частоте.

Упражнение 14.9. Вывести соотношения (14.123) и (14.124), применяя преобразование Лоренца к тензору энергии-импульса [формула (14.120)] и разлагая результат с точностью до членов $O(v/c)$.

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА В СОПУТСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Полное преобразование уравнения переноса (включая дифференциальный оператор) в случае неоднородного поля скоростей можно выполнить вполне строго, используя ковариантное дифференцирование [399], [135], [278]. Однако этот подход требует основательного знакомства с тензорным исчислением. Вместо этого мы применяем простой метод, основанный на использовании разложений первого порядка. Он дает результаты с точностью до членов

$O(v/c)$. Уравнения переноса, которые будут рассматриваться, имеют вид (для плоской и сферической геометрии соответственно)

$$\begin{aligned} (c^{-1}\partial/\partial t + \mu\partial/\partial r)[(v/v_0)^3 I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0)] = \\ = (v/v_0)^2 [\eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0)] \end{aligned} \quad (14.125a)$$

и

$$\begin{aligned} [c^{-1}\partial/\partial t + \mu\partial/\partial r + r^{-1}(1 - \mu^2)\partial/\partial\mu][(v/v_0)^3 I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0)] = \\ = (v/v_0)^2 [\eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0)]. \end{aligned} \quad (14.125b)$$

Будем рассматривать одномерные течения. Применим *локальное* преобразование Лоренца к системе отсчета, которая в *данный момент времени* неподвижна относительно движущейся среды. Будем пренебрегать членами $O(v^2/c^2)$ и положим поэтому $\gamma \approx 1$. Тогда имеем

$$r_0 = r, \quad (14.126a)$$

$$ct_0(r, t) = ct - c^{-1} \int_0^r v(r', t) dr'. \quad (14.126b)$$

Согласно соотношению (14.126a), пространственные приращения для наблюдателей в обеих системах отсчета будут одними и теми же (т.е. лоренцевского сокращения нет). Соотношение (14.126b) является следствием конечности скорости распространения света и выражает классический *эффект запаздывания*. [Смысл этого термина можно полнее понять из следующего мысленного эксперимента. Предположим, что часы, расположенные в ряде пунктов вокруг некоторой точки r_1 в неподвижной системе отсчета, в начальный момент времени были синхронизированы. Предположим, далее, что в некоторый момент времени t_1 из всех этих пунктов одновременно посылаются импульсы света, принимаемые а) наблюдателем, *покоющимся* в r_1 , и б) наблюдателем в r_1 , движущимся со скоростью v . Наблюдателя (а) импульсы достигнут синхронно, тогда как к наблюдателю (б) импульсы из точек с $r > r_1$ придут раньше, чем из точек с $r < r_1$. Поэтому он придет к выводу, что из точек с $r > r_1$ импульс был излучен в более ранний момент (t_0), чем из точек с $r < r_1$, как это и следует из формулы (14.126b) (для простоты рассматривается случай $v = \text{const}$.)] Эффект запаздывания в каком-то смысле *не является релятивистским*. Он есть *прямое следствие конечности скорости распространения света*. С релятивистской точки зрения он, конечно, имеет глубокий смысл.

Чтобы вычислить производные в уравнениях (14.125), применим

цепное правило:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_{\mu\nu t} = \left(\frac{\partial r_0}{\partial r} \right)_{\mu\nu t} \frac{\partial}{\partial r_0} + \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial r} \right)_{\mu\nu t} \frac{\partial}{\partial \mu_0} + \left(\frac{\partial \nu_0}{\partial r} \right)_{\mu\nu t} \frac{\partial}{\partial \nu_0} + \left(\frac{\partial t_0}{\partial r} \right)_{\mu\nu t} \frac{\partial}{\partial t_0}, \quad (14.127a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} = \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \right)_{r\nu t} = \left(\frac{\partial r_0}{\partial \mu} \right)_{r\nu t} \frac{\partial}{\partial r_0} + \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial \mu} \right)_{r\nu t} \frac{\partial}{\partial \mu_0} + \left(\frac{\partial \nu_0}{\partial \mu} \right)_{r\nu t} \frac{\partial}{\partial \nu_0} + \left(\frac{\partial t_0}{\partial \mu} \right)_{r\nu t} \frac{\partial}{\partial t_0}, \quad (14.127б)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{r\mu\nu} = \left(\frac{\partial r_0}{\partial t} \right)_{r\mu\nu} \frac{\partial}{\partial r_0} + \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial t} \right)_{r\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \mu_0} + \left(\frac{\partial \nu_0}{\partial t} \right)_{r\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \nu_0} + \left(\frac{\partial t_0}{\partial t} \right)_{r\mu\nu} \frac{\partial}{\partial t_0}. \quad (14.127в)$$

Используем, далее, разложения первого порядка $\nu/\nu_0 = 1 + \beta\mu_0$, $\nu_0/\nu = 1 - \beta\mu$, $\mu_0 = (\mu - \beta)(1 - \beta\mu)^{-1}$ и $\mu = (\mu_0 + \beta)(1 + \beta\mu_0)^{-1}$ и сделаем дополнительное предположение, что ускорения (для установившегося течения тождественно равные нулю) настолько малы, что изменение любого компонента скорости за время пролета фотоном средней длины свободного пробега пренебрежимо мало по сравнению с самой скоростью. Поэтому пренебрегаем производной $\partial v/\partial t$ и производными вида $\partial x_0/\partial t$ при $x_0 = r_0$, μ_0 и ν_0 и сохраняем только $\partial t_0/\partial t = 1$. Остальные коэффициенты в выражениях (14.127) с точностью до членов $O(v/c)$ легко найти из формул (14.126) и выписанных выше разложений первого порядка. В результате находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_{\mu\nu t} (r_0, \mu_0, \nu_0, t_0) = [1, c^{-1}(\mu_0^2 - 1)(\partial v/\partial r_0), -c^{-1}\mu_0\nu_0(\partial v/\partial r_0), -\beta/c], \quad (14.128a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mu} \right)_{r\nu t} (r_0, \mu_0, \nu_0, t_0) = [0, (1 + 2\mu_0\beta), -\nu_0\beta, 0]. \quad (14.128б)$$

Будем исходить из уравнения (14.125a), с учетом указанного выше приближения, переписанного в виде

$$\begin{aligned} \{(v/\nu_0)(c^{-1}\partial/\partial t + \mu\partial/\partial r) + 3\mu[\partial(v/\nu_0)/\partial r]\} I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0) = \\ = \eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0). \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражения (14.127), (14.128) и разложения первого порядка для ν/ν_0 и т.д. и удерживая только члены первого порядка по v/c , получаем

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_0} + \left(\mu_0 + \frac{v}{c} \right) \frac{\partial}{\partial r_0} + \frac{\mu_0(\mu_0^2 - 1)}{c} \frac{\partial v}{\partial r_0} \frac{\partial}{\partial \mu_0} - \right. \\ & \left. - \frac{\nu_0 \mu_0^2}{c} \frac{\partial v}{\partial r_0} \frac{\partial}{\partial \nu_0} + \frac{3\mu_0^2}{c} \frac{\partial v}{\partial r_0} \right] I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0) = \\ & = \eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0). \quad (14.129) \end{aligned}$$

При сферической геометрии имеется дополнительный член

$$\begin{aligned} & (\nu_0/\nu)^2 r^{-1} (1 - \mu^2) (\partial/\partial \mu) [(\nu/\nu_0)^3 I^0] = \\ & = (\nu/\nu_0) r^{-1} (1 - \mu^2) (\partial I^0/\partial \mu) + 3r^{-1} (1 - \mu^2) [\partial(\nu/\nu_0)/\partial \mu] I^0. \end{aligned}$$

Выполняя и здесь разложение до членов первого порядка по v/c и используя вытекающее из формулы (14.107) соотношение $\nu^2(1 - \mu^2) = \nu_0^2(1 - \mu_0^2)$, а также то, что $\partial(\nu/\nu_0)/\partial \mu = v/c$, для этих дополнительных членов получаем следующее выражение:

$$r_0^{-1} (1 - \mu_0^2) \{ [(1 + \beta\mu_0)(\partial/\partial \mu_0) - \beta\nu_0(\partial/\partial \nu_0)] + 3\beta \} I^0.$$

Таким образом, в случае сферической геометрии уравнение переноса, записанное в сопутствующей системе отсчета, с точностью до членов $O(v/c)$ имеет вид

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_0} + \left(\mu_0 + \frac{v}{c} \right) \frac{\partial}{\partial r_0} + \frac{1 - \mu_0^2}{r_0} \left[1 + \frac{\mu_0 v}{c} \left(1 - \frac{d \ln v}{d \ln r_0} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \mu_0} - \right. \\ & \left. - \frac{\nu_0 v}{c r_0} \left[1 - \mu_0^2 \left(1 - \frac{d \ln v}{d \ln r_0} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \nu_0} + \frac{3v}{c r_0} \left[1 - \mu_0^2 \left(1 - \frac{d \ln v}{d \ln r_0} \right) \right] \right\} \times \\ & \times I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0) = \eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) I(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0). \quad (14.130) \end{aligned}$$

Упражнение 14.10. Дать подробный вывод уравнений (14.129) и (14.130).

Уравнения (14.129) и (14.130) представляют собой уравнения в сопутствующей системе, записанные с учетом всех членов $O(v/c)$. Впервые они были последовательно выведены Кастором [135]. Производная по времени, входящая в эти уравнения, берется, по существу, все еще в неподвижной системе отсчета (хотя при этом учитывается запаздывание). Лагранжева производная по времени, которая вычисляется в системе, движущейся вместе с элементом

среды (см. § 15.1), состоит из двух членов: $D/Dt = \partial/\partial t + (v/c)\partial/\partial r$, причем второй член описывает *адвекцию*. Для *установившихся* течений члены, содержащие $\partial/\partial t$, тождественно равны нулю. Выведенные только что уравнения имеют довольно сложный вид. Как мы увидим, в *моментных уравнениях* важно сохранять все члены. Однако при решении самого *уравнения переноса* для большинства течений, встречающихся в астрофизике, достаточно удерживать (как это показывают детальные расчеты [446]) *только члены с производной по частоте*, поскольку, как об этом говорилось ранее, эти члены как бы усилены в $c/v_{\text{тепл}}$ раз. В этом предельном случае уравнение (14.129) для *установившегося* течения переходит в уравнение (14.99), а уравнение (14.130) — в (14.100). Метод численного решения уравнения (14.100) будет описан в следующем разделе.

Для задач о переносе излучения при частичном перераспределении полезно вывести из уравнений (14.129) и (14.130) *моментные уравнения* с зависимостью от частоты. В случае сферической геометрии для нулевого момента получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial J_{\nu}^0}{\partial t} + \frac{v}{c} \frac{\partial J_{\nu}^0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 H_{\nu}^0)}{\partial r} + \frac{v}{cr} (3I_{\nu}^0 - K_{\nu}^0) + \frac{1}{c} (J_{\nu}^0 + K_{\nu}^0) \frac{\partial v}{\partial r} + \\ + \frac{v}{cr} \frac{\partial}{\partial \nu_0} [\nu_0 (3K_{\nu}^0 - J_{\nu}^0)] - \frac{1}{c} \left(\frac{2v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \frac{\partial (\nu_0 K_{\nu}^0)}{\partial \nu_0} = \\ = \eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) J_{\nu}^0, \quad (14.131a) \end{aligned}$$

для первого момента

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial H_{\nu}^0}{\partial t} + \frac{v}{c} \frac{\partial H_{\nu}^0}{\partial r} + \frac{\partial K_{\nu}^0}{\partial r} + \frac{1}{r} (3K_{\nu}^0 - J_{\nu}^0) + \frac{2}{c} \left(\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) H_{\nu}^0 + \\ + \frac{v}{cr} \frac{\partial}{\partial \nu_0} [\nu_0 (3N_{\nu}^0 - H_{\nu}^0)] - \frac{1}{c} \left(\frac{2v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \frac{\partial (\nu_0 N_{\nu}^0)}{\partial \nu_0} = \\ = -\chi^0(\nu_0) H_{\nu}^0, \quad (14.131b) \end{aligned}$$

где

$$N_{\nu}^0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t) \mu_0^3 d\mu_0, \quad (14.132)$$

для краткости пишется J_{ν}^0 вместо $J^0(r, \nu_0, t)$ и т.д. и у r и t опущен нижний индекс 0. При практическом решении задач о переносе излучения для установившихся течений вместо (14.131a) и (14.132b)

достаточно пользоваться уравнениями

$$r^{-2} \partial(r^2 H_\nu^0) / \partial r - a [\partial(J_\nu^0 - K_\nu^0) / \partial \nu_0 + b(\partial K_\nu^0 / \partial \nu_0)] = \\ = \eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) J_\nu^0 \quad (14.133a)$$

и

$$\partial K_\nu^0 / \partial r + r^{-1} (3K_\nu^0 - J_\nu^0) - a [\partial(H_\nu^0 - N_\nu^0) / \partial \nu_0 + b \partial N_\nu^0 / \partial \nu_0] = \\ = -\chi^0(\nu_0) H_\nu^0, \quad (14.133b)$$

где $a = \nu_0 v / cr$ и $b = d \ln v / d \ln r$ (см. [447]).

Для решения задач радиационной гидродинамики нужно иметь моментные уравнения, проинтегрированные по частоте. Они следуют непосредственно из уравнений (14.131):

$$\partial E_R^0 / \partial t + v \partial E_R^0 / \partial r + r^{-2} \partial(r^2 \mathcal{F}^0) / \partial r + \\ + (v/r)(3E_R^0 - p_R^0) + (\partial v / \partial r)(E_R^0 + p_R^0) = \\ = 4\pi \int_0^\infty [\eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) J_\nu^0] d\nu_0, \quad (14.134a)$$

$$c^{-2} \partial \mathcal{F}^0 / \partial t + (v/c^2) \partial \mathcal{F}^0 / \partial r + \partial p_R^0 / \partial r + (3p_R^0 - E_R^0) / r + \\ + (2v/c^2 r)(1 + d \ln v / d \ln r) \mathcal{F}^0 = -c^{-1} \int_0^\infty \chi^0(\nu_0) \mathcal{F}_\nu^0 d\nu_0, \quad (14.134b)$$

где $E_R^0 = (4\pi/c) \int J^0(\nu_0) d\nu_0 \equiv (4\pi/c) J^0$ и $p_R^0 \equiv (4\pi/c) K^0$. Уравнения, совершенно аналогичные (14.131) — (14.134), можно выписать и для случая плоской геометрии. По сравнению с их аналогами в неподвижной системе отсчета [см. уравнения (14.117)] уравнения (14.134) содержат в левой части дополнительные члены, зависящие от скорости. Однако это усложнение более чем компенсируется огромным упрощением правой части, где изотропия поглощения и испускания в сопутствующей системе отсчета позволяет выразить интегралы через моменты в отличие от неподвижной системы, где они представляют собой двойные интегралы от удельной интенсивности. Единственный вопрос, на который остается ответить, состоит в том, как практически решать записанное в сопутствующей системе уравнение переноса для интенсивности $I^0(r, \mu_0, \nu_0)$ и для ее моментов.

РЕШЕНИЕ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Рассмотрим теперь методы решения уравнений переноса, записанных в сопутствующей системе отсчета, в том предельном слу-

чае, когда учитываются только доплеровские смещения, т.е. уравнений вида (14.99) и (14.100). Как уже говорилось ранее, уравнение переноса в сопутствующей системе представляет собой *дифференциальное уравнение в частных производных*. Впервые оно было получено Мак-Кри и Митрой [414]. Чандрасекар [156], [157] получил решения этих уравнений в случае плоской геометрии для линейного закона изменения скорости и строго когерентного рассеяния, используя двухпотокное описание поля излучения. Обобщения этого подхода даются в [1]; [2]; [3]; [276], стр. 199. Люси [403] решил уравнения переноса при плоской геометрии и когерентном рассеянии для предельного случая больших скоростей, пренебрегая *пространственной* производной и рассматривая уравнение переноса как обыкновенное дифференциальное уравнение с производной только по частоте. Для случая плоской геометрии предложен также метод, основанный на использовании интегрального уравнения [574]. Этот метод применим только при линейном изменении скорости и поэтому для реалистичных моделей не годится. Общий и гибкий численный метод, развитый Нордлингером и Райбики [478], позволяет решать уравнения переноса в случае плоской геометрии, используя метод исключения, аналогичный методу Фотрие. Этим методом можно решать задачи о переносе излучения при частичном перераспределении. В случае сферической геометрии при использовании решения вдоль характеристик — отдельных лучей — число точек разбиения по углу должно быть того же порядка, что и по глубине, и метод решения, аналогичный методу Фотрие, требует больше машинного времени. Если предполагать *полное перераспределение*, то, как будет сейчас показано, можно построить эффективный алгоритм решения, аналогичный алгоритму Райбики [444]. При частичном перераспределении мы используем моментные уравнения [например, уравнения (14.133)], тем самым избавляясь от угловой переменной, а тогда метод решения, аналогичный методу Фотрие, опять становится эффективным [447].

В случае сферической геометрии будем пользоваться системой координат (ρ, z) , введенной в § 7.6. Тогда вдоль луча, который характеризуется постоянным ρ , уравнение (14.100) принимает вид

$$\begin{aligned} \pm \partial I^\pm(z, \rho, \nu) / \partial z - \bar{\gamma}(z, \rho) \partial I^\pm(z, \rho, \nu) / \partial \nu = \\ = \eta(r, \nu) - \chi(r, \nu) I^\pm(z, \rho, \nu), \end{aligned} \quad (14.135)$$

где

$$\bar{\gamma}(z, \rho) = [\nu v(r)/cr](1 - \mu^2 + \mu^2 d \ln v/d \ln r) \quad (14.136)$$

и $r = (p^2 + z^2)^{1/2}$, $\mu = z/r$. В (14.135) и (14.136) для упрощения обозначений индекс 0 опущен (мы будем придерживаться этого до конца главы), но следует подчеркнуть, что все величины относятся к сопутствующей системе. Вводя, далее, оптическую глубину вдоль луча $d\tau(z, p, \nu) = -\chi(z, p, \nu)dz$ и переменные

$$u(z, p, \nu) = \frac{1}{2} [I^+(z, p, \nu) + I^-(z, p, \nu)] \quad (14.137)$$

и

$$v(z, p, \nu) = \frac{1}{2} [I^+(z, p, \nu) - I^-(z, p, \nu)], \quad (14.138)$$

из уравнения (14.135) можно получить систему

$$\partial u(z, p, \nu)/\partial \tau(z, p, \nu) + \gamma(z, p, \nu)\partial v(z, p, \nu)/\partial \nu = v(z, p, \nu), \quad (14.139)$$

$$\partial v(z, p, \nu)/\partial \tau(z, p, \nu) + \gamma(z, p, \nu)\partial u(z, p, \nu)/\partial \nu = u(z, p, \nu) - S(z, p, \nu), \quad (14.140)$$

где $\gamma(z, p, \nu) = \tilde{\gamma}(z, p)/\chi(z, p, \nu)$ и предполагается, что функция источников имеет вид, отвечающий эквивалентному двухуровневому атому и полному перераспределению, т.е.

$$S(z, p, \nu) = S(r(z, p), \nu) = \alpha(r, \nu)\bar{J}(r) + \beta(r).$$

Коэффициенты α и β выражаются через параметр термализации ε , отношение непрозрачностей χ_c/χ_l и профиль поглощения, а

$$\bar{J}(r) = \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} d\nu \phi(\nu) \int_0^1 d\mu u(z(r, \mu), p(r, \mu), \nu). \quad (14.141)$$

В выражении (14.141) ν_{\min} и ν_{\max} выбираются таким образом, чтобы был охвачен весь профиль линии (при наблюдении из сопутствующей системы). В связи с формулами (14.137) и (14.138) следует особо отметить, что поскольку используется сопутствующая система, то в данном случае I^+ и I^- можно усреднять при заданном значении ν в отличие от ситуации, которая имеет место при использовании системы отсчета наблюдателя [см. формулы (14.23) и (14.24)].

Теперь необходимо поставить граничные условия по пространственной переменной. На внешней границе ($r = R$) имеем $I^- = 0$. Поэтому $u = v$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} [\partial u(z, p, \nu)/\partial \tau(z, p, \nu)]_{z_{\max}} + \gamma(z_{\max}, p, \nu)\partial u(z_{\max}, p, \nu)/\partial \nu = \\ = u(z_{\max}, p, \nu). \end{aligned} \quad (14.142)$$

В плоскости симметрии ($z = 0$) можно, далее, написать, что $v(0, p, \nu) = 0$. Поэтому для лучей, которые не пересекают ядра,

$$[\partial u(z, p, \nu)/\partial \tau(z, p, \nu)]_{z=0} = 0. \quad (14.143)$$

Для лучей, пересекающих ядро (т.е. для лучей с $p \leq r_c$), поступаем так. а) Если ядро *непрозрачно* (поверхность звезды), то применяем диффузионное приближение, что дает v . б) Если оболочка *полая* (случай туманности), то полагаем $v = 0$ (по симметрии).

Кроме того, нужно иметь *начальное условие по частоте*. Очевидно, что в случае *расширяющейся атмосферы* (т.е. атмосферы, у которой $v > 0$ и $dv/dr > 0$) фотоны в частотах *линии*, приходящие из любой другой точки атмосферы, не могут поглощаться вблизи высокочастотной границы профиля поглощения (в *сопутствующей* системе отсчета), потому что все они претерпели систематическое красное смещение. Все фотоны с частотой высокочастотного края профиля должны быть фотонами *континуума*. Чтобы получить требуемое начальное условие, мы можем поэтому либо а) решить уравнения (14.139) и (14.140) для континуума, пренебрегая членами с производной по частоте (что позволяет получить стандартную систему второго порядка), и определить таким образом $u(z, p, \nu_{\max}) = u_{\text{континуум}}$, либо б) задать производную $(\partial u/\partial \nu)_{\nu_{\max}}$ равной любому наперед заданному значению, определяемому наклоном континуума. В частности, если выбрать $\partial u/\partial \nu = 0$, то придем к тем же уравнениям, что и при принятии (а).

Далее рассматриваемая система дискретизуется с использованием тех же узлов $\{r_d\}$, $\{p_i\}$, $\{z_{di}\}$, которые применялись в § 7.6 и 14.1. Узлы по частоте $\{\nu_n\}$ ($n = 1, \dots, N$) выбираются в данном случае в порядке *убывания значений* ($\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_N$), так как начальное условие относится к точке с наибольшей частотой. Заменим интеграл в формуле (14.141) квадратурной суммой

$$\bar{J}(r_d) = \sum_{n=1}^N w_n \sum_{i=1}^{I_d} a_{di} \phi(r_d, \nu_n) u(z(r_d, p_i), p_i, \nu_n). \quad (14.144)$$

Уравнения (14.139) и (14.140) заменяются разностными приближениями

$$(u_{d+1, in} - u_{din})/\Delta \tau_{d+\frac{1}{2}, in} = v_{d+\frac{1}{2}, in} + \delta_{d+\frac{1}{2}, i, n-\frac{1}{2}}(v_{d+\frac{1}{2}, in} - v_{d+\frac{1}{2}, i, n-1}) \quad (14.145)$$

$$(v_{d+\frac{1}{2}, in} - v_{d-\frac{1}{2}, in})/\Delta \tau_{din} = u_{din} - S_{din} + \delta_{di, n-\frac{1}{2}}(u_{din} - u_{di, n-1}), \quad (14.146)$$

где u ищется в узлах $z_d = z(r_d, p_i)$, так что $u_{din} = u(z_d, p_i, \nu_n)$, а v — в промежуточных точках $z_{d \pm 1/2} = \frac{1}{2}(z_d + z_{d \pm 1})$, так что $v_{d \pm 1/2, in} = v(z_{d \pm 1/2}, p_i, \nu_n)$. Кроме того, мы ввели обозначения

$$\chi_{d \pm 1/2, in} = \frac{1}{2}(\chi_{d \pm 1, in} + \chi_{din}), \quad (14.147)$$

$$\Delta\tau_{d \pm 1/2, in} = \chi_{d \pm 1/2, in} |z_d - z_{d \pm 1}|, \quad (14.148)$$

$$\Delta\tau_{din} = \frac{1}{2}(\Delta\tau_{d+1/2, in} + \Delta\tau_{d-1/2, in}) \quad (14.149)$$

и

$$\delta_{di, n-1/2} = \gamma_{din}/(\nu_{n-1} - \nu_n). \quad (14.150)$$

В форме подобных же разностных уравнений можно представить и граничные условия [444]. В уравнениях (14.145) и (14.146) для обеспечения устойчивости разность по частоте вычисляются неявным образом [444], [462], [530].

Уравнение (14.145) можно разрешить аналитически относительно $v_{d+1/2, in}$, что дает

$$v_{d+1/2, in} = [(u_{d+1, in} - u_{din})/\Delta\tau_{d+1/2, in} + \delta_{d+1/2, i, n-1/2} v_{d+1/2, i, n-1}]/(1 + \delta_{d+1/2, i, n-1/2}). \quad (14.151)$$

Представляя решение в виде векторов, определяющих, как интенсивность на данной частоте изменяется с глубиной вдоль определенного луча, т.е. вводя

$$\mathbf{u}_{in} = (u_{1in}, u_{2in}, \dots, u_{D_i in})^T \quad (14.152a)$$

и

$$\mathbf{v}_{in} = (v_{1/2, in}, \dots, v_{D_i-1/2, in})^T, \quad (14.152b)$$

можем переписать уравнение (14.151) в виде

$$\mathbf{v}_{in} = \mathbf{G}_{in} \mathbf{u}_{in} + \mathbf{H}_{in} \mathbf{v}_{i, n-1}, \quad (14.153)$$

где \mathbf{G} — двухдиагональная, а \mathbf{H} — диагональная матрица. Уравнения (14.151) можно использовать для исключения $v_{d \pm 1/2, in}$ из (14.146). В результате получим систему уравнений второго порядка для u_{din} , а именно

$$\begin{aligned} & \{ (u_{d+1, in} - u_{din})/[\Delta\tau_{d+1/2, in}(1 + \delta_{d+1/2, i, n-1/2})] - \\ & - (u_{din} - u_{d-1, in})/[\Delta\tau_{d-1/2, in}(1 + \delta_{d-1/2, i, n-1/2})] \} / \Delta\tau_{din} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + \delta_{d_i, n - \frac{1}{2}})u_{din} - S_{din} - \delta_{d_i, n - \frac{1}{2}}u_{d_i, n - 1} + \\
&+ [\delta_{d - \frac{1}{2}, i, n - \frac{1}{2}}(1 + \delta_{d - \frac{1}{2}, i, n - \frac{1}{2}})^{-1}v_{d - \frac{1}{2}, i, n - 1} - \delta_{d + \frac{1}{2}, i, n - \frac{1}{2}} \times \\
&\quad \times (1 + \delta_{d + \frac{1}{2}, i, n - \frac{1}{2}})^{-1}v_{d + \frac{1}{2}, i, n - 1}]/\Delta\tau_{din}. \quad (14.154)
\end{aligned}$$

Добавляя к уравнению (14.154) граничные условия, получаем систему

$$T_{in}u_{in} + U_{in}u_{i, n - 1} + V_{in}v_{i, n - 1} + W_{in}\bar{J} = X_{in}, \quad (14.155)$$

где T_{in} — трехдиагональная, U_{in} и W_{in} — диагональные, а V_{in} — двухдиагональная матрица и X_{in} — вектор.

Упражнение 14.11. Проверить вывод уравнений (14.151) и (14.154) и понять общую структуру матриц G , U и V .

Чтобы решить полную систему, выберем определенный луч, характеризуемый данным значением p_i , и произведем интегрирование для каждой из частот по отдельности с n , меняющимся от 1 до N . Это можно осуществить, если заметить, что начальное условие по частоте влечет равенство нулю всех матриц U_{i1} , V_{i1} и H_{i1} . Поэтому можно получить выражения вида $u_{i1} = A_{i1} - B_{i1}\bar{J}$ и $v_{i1} = C_{i1} - D_{i1}\bar{J}$, где $A_{i1} = T_{i1}^{-1}X_{i1}$ — вектор, $B_{i1} = T_{i1}^{-1}W_{i1}$ — матрица, $C_{i1} = G_{i1}A_{i1}$ и $D_{i1} = G_{i1}V_{i1}$. Выполнив аналогичные подстановки для последовательных значений n , найдем

$$u_{in} = A_{in} - B_{in}\bar{J} \quad (14.156)$$

и

$$v_{in} = C_{in} - D_{in}\bar{J}, \quad (14.157)$$

где

$$A_{in} = T_{in}^{-1}(X_{in} - U_{in}A_{i, n - 1} - V_{in}C_{i, n - 1}), \quad (14.158)$$

$$B_{in} = T_{in}^{-1}(W_{in} - U_{in}B_{i, n - 1} - V_{in}D_{i, n - 1}), \quad (14.159)$$

$$C_{in} = G_{in}A_{in} + H_{in}C_{i, n - 1} \quad (14.160)$$

и

$$D_{in} = G_{in}B_{in} + H_{in}D_{i, n - 1}. \quad (14.161)$$

Подставляя выражение (14.156) для каждой частоты ν_n и для каждого луча p_i в уравнение (14.144), окончательно получаем для \bar{J} си-

стему вида

$$(I + \sum_{i, n} F_{in} B_{in}) \mathbf{J} = \sum_{i, n} F_{in} \mathbf{A}_{in}, \quad (14.162)$$

где матрицы \mathbf{F} содержат веса квадратурной формулы. Решая эту последнюю систему, находим \mathbf{J} , а значит, и $S(r, \nu)$, а также $u(z, p, \nu)$ и $v(z, p, \nu)$ [по формулам (14.156) и (14.157)]. Если известно $u(z, p, \nu)$, то известно и $u(r, \mu, \nu)$, так что ясно, что мы можем вычислить $J^0(r, \nu)$ и $K^0(r, \nu)$ в сопутствующей системе. Аналогичным образом, зная $v(r, \mu, \nu)$, можно вычислить поток $H^0(r, \nu)$. Таким образом, получено полное решение задачи об определении интенсивности излучения и ее моментов в сопутствующей системе.

Число операций, которое требуется для определения \mathbf{A}_{in} и \mathbf{B}_{in} , входящих в формулу (14.156), пропорционально D_i^2 . Поэтому, суммируя по всем частотам и по всем лучам, получаем следующую оценку времени, необходимого для вычисления: $T_s = cND^3 + c'D^3$. Заметим, что это время зависит от числа частот *линейно*. Аналогичный формализм можно развить для плоской геометрии. В этом случае вместо набора лучей используются M фиксированных значений косинуса угла $\{\mu_i\}$. В случае плоской геометрии машинное время, необходимое для получения решения, равно $T_p = cNMD^2 + c'D^3$. При частичном перераспределении в случае сферической геометрии можно было бы решить моментные уравнения методом Фотрие [447], что позволило бы из формального решения вдоль характеристик — отдельных лучей — получить эддингтоновские множители по заданной функции источников. В случае плоской геометрии при частичном перераспределении применим метод Нордлингера и Райбики [478].

Упражнение 14.12. Рассмотреть течения с монотонным ходом скорости (т.е. с dv/dr , которая везде ≥ 0 или везде ≤ 0). а) Показать, что в случае *плоской* геометрии выбор начального условия по частоте однозначен и зависит только от знака dv/dr (обсуждение немонотонных распределений скорости см. в [451]). б) Показать, что в случае сферической геометрии однозначные условия можно найти, только если $v > 0$ и $dv/dr > 0$ или $v < 0$ и $dv/dr < 0$, и что за счет эффектов проекции распределения скорости с $v > 0$, $dv/dr < 0$ и с $v < 0$, $dv/dr > 0$, будучи монотонными в *радиальном* направлении, приводят к немонотонному изменению проекции скорости на лучи, идущие по касательной.

Метод, описанный выше в общих чертах, был использован для

расчета функций источников и профилей линий для идеализированных моделей атмосфер [444]. Каждая атмосфера характеризуется внешним радиусом R (в единицах $r_c = 1$), оптической толщиной в континууме T_c (при $r = r_c$), статической оптической толщиной в

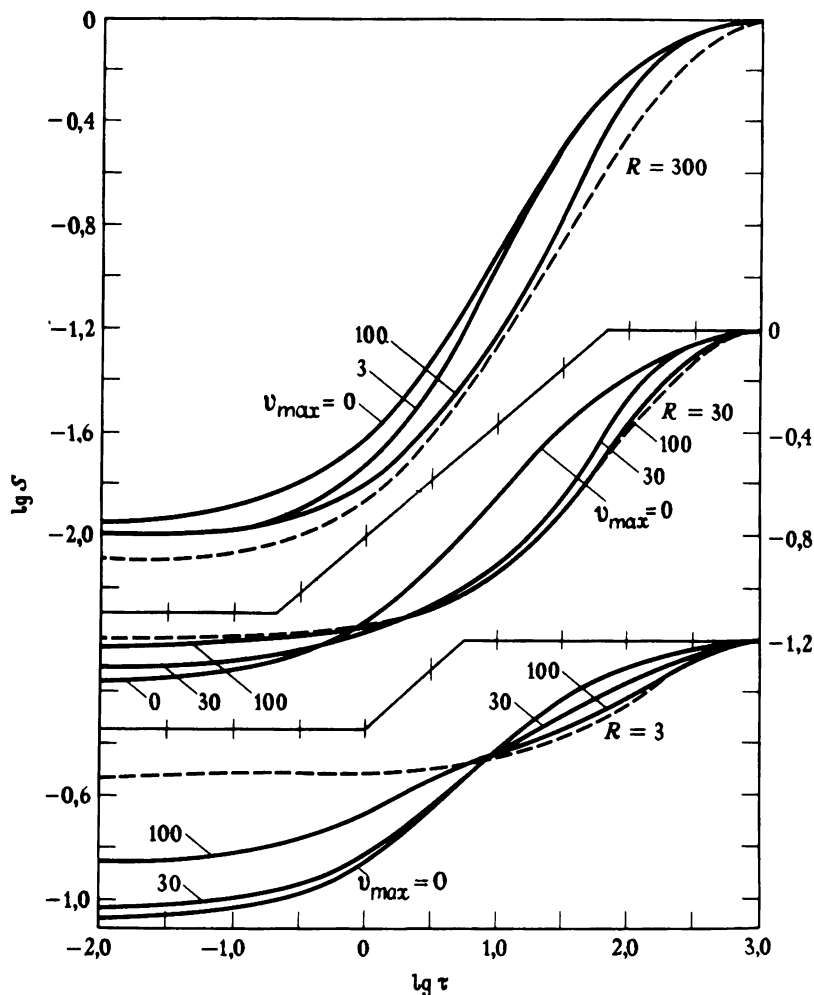


Рис. 14.11. Функции источников в линии в расширяющихся атмосферах, при различных значениях внешнего радиуса R (в единицах r_c) и конечной скорости v_{\max} (в единицах тепловой скорости). Для всех моделей $T_c = 2$, $T_l = 10^3$, $B = 1$ и $\epsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. Абсцисса — десятичный логарифм статической оптической глубины в линии. Пунктирная линия дает среднюю интенсивность в континууме. Числа у кривых — значения $v_{\max} = v(R)$. (По [444], с разрешения.)

линии T_l , непрозрачностями $\chi_l \propto r^{-2}$ и $\chi_c \propto r^{-2}$ и постоянной функцией Планка $B = 1$. Параметр термализации для двухуровневого атома брался равным $\varepsilon = 2/T_l$. Распределение скорости выбиралось либо а) вида $dv/d\tau = \text{const}$, либо б) вида $v(r) = v_0 [\text{arctg}(ar + b) - \text{arctg}(a + b)]$, который дает резкий подъем скорости в точке $r_v = -b/a$ и имеет постоянную конечную скорость при больших r . Распределение вида (б) может рассматриваться как схематическая модель звездного ветра. Результаты расчетов функции источников для нескольких моделей приведены на рис. 14.11. Для этих моделей $T_l = 10^3$, $T_c = 2$, $r_v = (R + 1)/2$, $B = 1$ и $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. Мы видим, что основное влияние градиента скорости в глубоких слоях атмосферы состоит в увеличении вероятности выхода. Поэтому значения функции источников становятся меньше, чем в статическом случае, и при больших значениях v_{max} функция источников S_l приближается к средней интенсивности излучения в континууме J_c (пунктир). Вблизи поверхности увеличение вероятности выхода конкурирует с поглощением излучения континуума в линии, смещенной вследствие эффекта Доплера. В случае плоской геометрии преобладает второй эффект, что приводит к

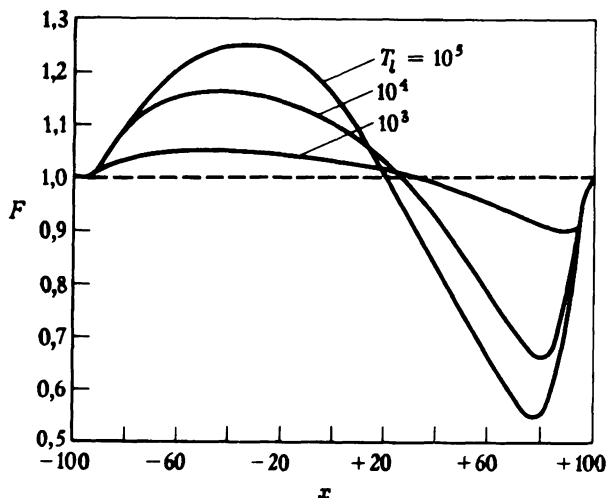


Рис. 14.12. Профили линий (потоки выходящего излучения, проинтегрированные по диску) для расширяющихся сферически-симметричных атмосфер. Ордината — поток, отнесенный к континууму; абсцисса — $\Delta\nu/\Delta\nu_D$. Для всех моделей $R = 300$, $T_c = 2$, $B = 1$, $\varepsilon = 2/T_l$ и $dv/d\tau_l = -100/T_l$. (По [444], с разрешения.)

увеличению S_1 . В очень протяженных атмосферах преобладает первый эффект и S_1 уменьшается. Профили в потоке, регистрируемые внешним наблюдателем, показаны на рис. 14.12 (для моделей, параметры которых приведены в подписи к рисунку). Получаются характерные профили типа Р Лебеда, причем и эмиссионный, и абсорбционный компоненты усиливаются с увеличением оптической толщины оболочки.

Решение уравнения переноса в сопутствующей системе отсчета описанным выше методом удобно, эффективно и легко обобщается на реалистичные модели звезд. Этот метод допускает обобщение и на случай многоуровневых атомов, что должно позволить рассчитывать в случае расширяющихся атмосфер линейчатые спектры для реалистичных моделей атомов. Сравнение точных теоретических спектров с наблюдениями должно будет помочь в определении физической структуры атмосфер звезд с расширяющимися оболочками и звездным ветром.