Обсуждение энергетики звездных корон и звездного ветра также весьма поучительно [290]. Корона нагревается потоком подводимой к ней механической энергии F_m и теряет энергию путем излучения и теплопроводности, а также в виде кинетической энергии ветра. Анализ показывает, что при *заданном давлении в короне* скорость потери энергии за счет истечения вещества и теплопроводности с ростом температуры *увеличивается*, потери же за счет излучения *уменьшаются*. Поэтому при заданном давлении существует температура, при которой полная энергия, теряемая короной, минимальна. Далее, потери, обусловленные всеми тремя этими процессами, с увеличением давления возрастают. Поэтому для корон с минимальным потоком имеется монотонная зависимость между давлением в короне и потоком энергии, необходимым для поддержания короны и ветра. Это позволяет думать, что задание потока F_m однозначно *определяет* температуру и давление в короне, а следовательно, и свойства ветра. (На самом деле нужно еще показать, что если мы имеем некоторую корону с минимальным потоком и произвольным образом меняем F_m, то корона *обязательно* переходит в другое состояние с минимальным потоком.) Конкуренция между этими процессами приводит к появлению трех основных классов корон. 1) При малых значениях F_m основные потери энергии обусловлены теплопроводностью и излучением. Примером служит система корона — ветер Солнца, где на ветер затрачивается всего около 10% подводимого к короне потока механической энергии. (Если ветер возникает в пространственно локализованных областях короны, например *в корональных дырах*, то *локальная* эффективность преобразования может быть намного выше.) 2) При промежуточных значениях F_m потери обусловлены в основном излучением и истечением вещества. Примером служит ветер у сверхгиганта α Cyg типа A2, где потери, связанные с ветром, преобладают потери на излучение еще играют некоторую роль, а потери за счет теплопроводности пренебрежимо малы. 3) При очень больших значениях F_m полностью доминируют затраты энергии на истечение вещества. Для звезд ранних спектральных типов скорость потери массы достигает $10^{-6} \div 10^{-5}\ \mathscr{M}_\odot$ в год. Чтобы возникал такой ветер, потребовались бы чрезвычайно высокие температуры корон (которые, по-видимому, исключаются наблюдениями). Здесь, однако, ветер возникает под действием давления излучения (см. § 15.4).

15.3. Радиационная гидродинамика

Как в атмосфере, так и во внутренних слоях звезд имеются мощные поля излучения, которые могут сильно влиять на приток (и отток) энергии и импульса к веществу, а потому и на его движение. В такой ситуации при изучении динамики течения целесообразно считать, что жидкость состоит как из частиц вещества, так и из фотонов, и учитывать вклад частиц обоих типов в уравнения движения и сохранения энергии. Таким способом получаются уравнения *радиационной гидродинамики*, описывающие совместное течение газа и излучения. Имея в виду те приложения, которые представляют для нас интерес, будем предполагать, что скорость течения $v \ll c$, и поэтому частицы вещества можно рассматривать как нерелятивистские. В некоторых других ситуациях (например, в случае сверхновых или при термоядерных взрывах) это предположение может и не выполняться. Несмотря на ограничение $v \ll c$, тот факт, что фотоны имеют скорость c, приводит к появлению некоторых тонкостей в описании взаимодействия вещества и излучения, и вывод уравнений, в которых это взаимодействие описывается вполне последовательно, представляет собой нетривиальную задачу. В конечном счете оказывается проще всего и надежнее всего с самого начала выводить их в релятивистски ковариантном виде [621], [524], [664], [135]. Эти уравнения можно затем упростить, удерживая только члены порядка v/c и опуская члены порядка v^2/c^2 и более высоких порядков. Следует еще раз отметить, что так же, как это имело место при рассмотрении уравнения переноса в сопутствующей системе координат, недостаточно использовать одно общее преобразование Лоренца, так как скорость течения является, вообще говоря, функцией координат и времени. Как и прежде, будем рассматривать преобразования, описывающие переход от совокупности равномерно движущихся систем, которые в данный момент времени движутся вместе со средой.

Радиативные члены в уравнениях радиационной гидродинамики можно в принципе выразить через величины, измеренные либо в лабораторной системе отсчета, либо в системе, связанной со средой. Хотя уравнения радиационной гидродинамики в неподвижной системе отсчета записать в некоторых отношениях легче (см., например, [521], [551], [692]), оказывается, что в *системе отсчета, движущейся вместе со средой*, они имеют *более простой вид*, поскольку радиативные члены легче всего вычислять именно в этой системе отсчета [621], [135]. В прошлом этот подход широко не использовался, так как для того, чтобы вычислить необходимые характеристики поля излучения, нужно уметь решать уравнение переноса в сопутствующей системе. Как было показано в § 14.3, уравнение переноса в сопутствующей системе легко решается современными методами (и в некоторых отношениях оно даже проще, чем уравнение, записанное в неподвижной системе, в котором из-за зависимости коэффициентов поглощения и излучения от углов, возникающей вследствие эффекта Доплера, появляются дополнительные сложности). Поэтому мы сосредоточим внимание главным образом на выводе уравнений в сопутствующей системе отсчета. Однако будет также показано, что эти уравнения согласуются (с точностью до членов порядка v/c) с уравнениями, записанными в неподвижной системе отсчета. В нашей книге будут рассматриваться только одномерные сферически-симметричные течения. Обширную сводку формул для трехмерных течений в различных координатных системах можно найти в [521], гл. 9.

ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ВЕЩЕСТВА И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ СРЕДЫ

В *декартовой* системе координат $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, ict)$ ковариантная запись уравнений движения и сохранения энергии для одного только вещества дает систему уравнений вида

$$\partial T^{\alpha\beta}/\partial x^\beta = F^\alpha, \quad \alpha = 1,\ldots, 4, \tag{15.83}$$

где F^α — *4-вектор силы* (*сила Минковского*) и $T^{\alpha\beta}$ — тензор, описывающий поток импульса (напряжения), плотность импульса и плотность энергии вещества. Сходные уравнения для излучения были выписаны в § 14.3 [см. формулы (14.118) — (14.122)], и по аналогии с формулой (14.120) можно ожидать, что $T^{\alpha\beta}$ имеет вид

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{\Pi} & ic\mathbf{G} \\ ic\mathbf{G} & -E \end{pmatrix}, \tag{15.84}$$

где Π, G и E — соответствующие ковариантные обобщения тензора потока импульса, вектора плотности импульса и плотности полной энергии вещества соответственно. На тензор T накладываются три условия, а именно: требуется, чтобы он 1) выражался через скалярные инварианты и 4-векторы, т.е. был ковариантным, 2) принимал правильную предельную форму в системе отсчета, покоящейся относительно среды, и 3) давал правильный нерелятивистский предел в лабораторной системе отсчета.

Прежде всего введем *собственное время* — 4-скаляр (инвариант)

$$(d\tau)^2 = -(dx_\alpha dx^\alpha)/c^2 = (dt)^2 - c^{-2}[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]. \tag{15.85}$$

Ясно, что $d\tau$ стремится к dt при $v \to 0$. Введем, далее, *контравариантную 4-скорость*

$$V^{\alpha} = dx^{\alpha}/d\tau. \tag{15.86}$$

Замечая, что, согласно формуле (15.85), $dt/d\tau = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = \gamma$, где v — обычная скорость: $v^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2$, имеем

$$V^i = (dx^i/dt)(dt/d\tau) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}(dx^i/dt) =$$
$$= \gamma v^i, \quad (i = 1, 2, 3), \tag{15.87а}$$
$$V^4 = ic(dt/d\tau) = ic\gamma. \tag{15.87б}$$

Отметим, между прочим, что $V_{\alpha}V^{\alpha} = -c^2$ — мировой скаляр (который инвариантен относительно любых преобразований координат, в чем можно легко убедиться, пользуясь трансформационными свойствами ковариантных и контравариантных векторов). Далее, если ρ_0, e и p — соответственно инвариантная плотность вещества (т.е. концентрация частиц, умноженная на среднюю массу покоя частицы), удельная внутренняя энергия и давление, измеренные в системе отсчета, покоящейся относительно среды, то эквивалентная полная плотность есть

$$\rho_{00} = \rho_0(1 + e/c^2). \tag{15.88}$$

Введем также, следуя Томасу [621],

$$\rho_{000} = \rho_{00} + p/c^2 = \rho_0(1 + h/c^2). \tag{15.89}$$

Здесь h — удельная энтальпия газа, а $\rho_0 h/c^2$ представляет собой массу, эквивалентную полной энергии микроскопических движений в газе (в расчете на единицу объема).

Замечая, что в нерелятивистском пределе $\Pi^{ij} = \rho v^i v^j + p\delta^{ij}$, $G^i = \rho v^i$, можно по аналогии предположить, что

$$T^{\alpha\beta} = \rho_{000}V^{\alpha}V^{\beta} + p\delta^{\alpha\beta}, \tag{15.90}$$

где $\delta^{\alpha\beta}$ — обычный символ Кронекера. Очевидно, что (15.90) удовлетворяет сформулированному выше условию 1. Выпишем компоненты в более подробном виде:

$$T^{ij} = \rho_{000}V^iV^j + p\delta^{ij} = \rho_1 v^i v^j + p\delta^{ij}, \tag{15.91а}$$

$$T^{i4} = T^{4i} = ic\gamma\rho_{000}V^i = ic\rho_1 v^i \tag{15.91б}$$

и

$$T^{44} = -c^2\gamma^2\rho_{000} + p = -c^2\rho_1 + p, \tag{15.91в}$$

где $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$ и $\rho_1 = \gamma^2\rho_{000}$. Заметим, далее, что в системе отсчета, связанной со средой, где $v = 0$, тензор Т становится диагональным, причем $T^{ii} = p = (\Pi^{ii})_0$ и $T^{44} = -(\rho_0 c^2 + \rho_0 e)$. Это дает правильное статическое давление и правильную энергию в расчете на единицу объема среды (с учетом энергии покоя вещества). Таким образом, сформулированное выше условие 2 выполнено. Далее, рассмотрим Т в нерелятивистском пределе (при $v/c \ll 1$). Заметим прежде всего, что если ρ_0 — плотность в сопутствующей системе отсчета, то, поскольку элемент объема преобразуется по формуле $dV = \gamma^{-1}dV_0$ (лоренцевское сокращение), плотность, измеренная в лабораторной системе отсчета, будет равна $\rho = \gamma^2\rho_0$. Поэтому, разлагая каждый элемент тензора Т в ряд по степеням v/c и удерживая только главные члены, непосредственно убеждаемся, что T^{ij} и T^4 (или T^{4i}) дают правильные выражения для тензора потока импульса и для плотности импульса, а

$$\begin{aligned} T^{44} &= -\gamma^2(\rho_0 c^2 + \rho_0 e + pv^2/c^2) \to -\gamma(\rho c^2 + \rho e) \approx \\ &\approx -(\rho c^2 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e), \end{aligned} \tag{15.92}$$

что представляет собой нерелятивистское выражение для плотности энергии (с учетом энергии покоя вещества). Таким образом, Т удовлетворяет и сформулированному выше условию 3.

Действие внешних сил на среду описывается при помощи *4-силы* F^α (в расчете на единицу объема). Ее пространственные составляющие дают скорость увеличения импульса вещества в расчете на единицу объема, а временна́я составляющая определяет скорость увеличения энергии единицы объема. Выражение $V_\alpha F^\alpha$ представляет собой *инвариант*, и поэтому он может вычисляться в любой системе отсчета. В частности, мы можем найти его в системе отсчета, движущейся вместе с веществом. В этой системе

$$V_\alpha F^\alpha = (V_4 F^4)_0 = -c^2 d\rho_{00}/d\tau. \tag{15.93}$$

В отсутствие эффектов общей теории относительности производная в правой части будет равна нулю, если нет изменений собственной плотности, обусловленных высвобождением химической энергии или превращением вещества в энергию, например, при термоядерных реакциях. Таким образом, $V_\alpha F^\alpha = 0$. Заметим, что из этого соотношения следует, что в сопутствующей системе отсчета $(F^4)_0 = 0$. Этот результат понадобится нам в дальнейшем.

Движение одного только вещества описывается уравнением (15.83), где $T^{\alpha\beta}$ определяется формулой (15.90). Если $R^{\alpha\beta}$ — тензор энергии — импульса излучения [см. формулу (14.120)], то уравнения движения среды, состоящей из вещества и излучения, имеют вид

$$\partial(T^{\alpha\beta} + R^{\alpha\beta})/\partial x^\beta = F^\alpha, \tag{15.94}$$

или

$$\partial T^{\alpha\beta}/\partial x^\beta = F^\alpha + g^\alpha, \tag{15.95}$$

где g^α дается формулой (14.121). Кроме того, можно написать уравнение неразрывности для частиц вещества (фотоны не имеют массы покоя). Потребовав сохранения их числа, получим

$$\partial(\rho_0' V^\alpha)/\partial x^\alpha = 0. \tag{15.96}$$

УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ В СОПУТСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Если предположить, что для среды, состоящей из вещества и излучения, в системе отсчета, движущейся вместе с веществом, остается верным первый закон термодинамики, то единственное изменение в уравнении энергии для газа [см. уравнение (15.24)] должно быть связано с учетом притока и оттока энергии от вещества (в расчете на единицу объема за единицу времени) за счет его взаимодействия с полем излучения. Поэтому можно написать

$$\rho_0 De/Dt - (p/\rho_0)D\rho_0/Dt = 4\pi\int_0^\infty (\chi_\nu^0 J_\nu^0 - \eta_\nu^0)d\nu, \tag{15.97}$$

где D/Dt — лагранжева производная, вычисляемая для заданного элемента движущегося вещества, а χ_ν^0, η_ν^0 и J_ν^0 относятся к *сопутствующей системе отсчета*, которая покоится относительно газа. Сейчас будет показано, что сделанное нами априорное предположение в самом деле верно, и уравнение (15.97) является совершенно строгим [621], [135]. Умножая скалярно уравнения движения (15.95) на $-V_\alpha$ и используя явное выражение для $T^{\alpha\beta}$, даваемое формулой (15.90), находим

$$-(V_\alpha V^\alpha)\frac{\partial(\rho_{000}V^\beta)}{\partial x^\beta} - \rho_{000}V^\beta\left(V_\alpha\frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta}\right) - V^\alpha\frac{\partial p}{\partial x^\alpha} = -V_\alpha F^\alpha - V_\alpha g^\alpha. \tag{15.98}$$

Но $V_\alpha V^\alpha = -c^2$, так что $V_\alpha \partial V^\alpha/\partial x^\beta = \partial(\frac{1}{2}V_\alpha V^\alpha)/\partial x^\beta = 0$, и, если вспомнить, что $V_\alpha F^\alpha = 0$, то уравнение (15.98) принимает вид

$$c^2\partial(\rho_{000}V^\alpha)/\partial x^\alpha - V^\alpha\partial p/\partial x^\alpha = -V_\alpha g^\alpha. \tag{15.99}$$

Далее, умножая (15.96) на $(c^2 + e + p/\rho_0)$, вычитая затем результат из (15.99) и учитывая, что $D/Dt = V^\alpha(\partial/\partial x^\alpha)$, получаем

$$\rho_0(De/Dt) - (p/\rho_0)(D\rho_0/Dt) = -V_\alpha g^\alpha. \tag{15.100}$$

Упражнение 15.10. Провести выкладки, необходимые для получения (15.100) из (15.99).

Поскольку левая часть уравнения (15.100) записана в системе, движущейся с веществом, то и величину, стоящую в правой части, можно вычислять в сопутствующей системе отсчета. В этой системе, очевидно, $V^i = 0$, $i = 1, 2, 3$, и $V^4 = ic$, а согласно (14.121)

$$g^4 = (4\pi i/c)\int(\chi_\nu^0 J_\nu^0 - \eta_\nu^0)d\nu, \tag{15.101}$$

причем мы воспользовались тем, что коэффициенты поглощения и излучения в сопутствующей системе не зависят от углов. Таким образом, ясно, что уравнение (15.100) сводится к уравнению (15.97), которое поэтому действительно представляет собой правильное уравнение энергии для вещества, взаимодействующего с излучением.

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ В СОПУТСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Чтобы получить уравнение движения в сопутствующей системе отсчета, можно предположить, что силу, с которой излучение действует на вещество, нужно добавить к обычным объемным силам, скажем, к силе тяжести. При использовании сопутствующей системы отсчета сила, с которой излучение действует на вещество, равна [см. (14.121)]

$$\mathbf{g}_R^0 = c^{-1}\int\chi_\nu^0\vec{\mathscr{F}}_\nu^0 d\nu, \tag{15.102}$$

где χ_ν^0 и $\vec{\mathscr{F}}_\nu^0$ также берутся в сопутствующей системе. Здесь мы воспользовались также тем, что в этой системе χ_ν^0 и η_ν^0 не зависят от углов. Поэтому уравнение (15.21) позволяет надеяться, что

$$\rho D\mathbf{v}/Dt = -\nabla p + \mathbf{F} + c^{-1}\int\chi_\nu^0\vec{\mathscr{F}}_\nu^0 d\nu. \tag{15.103}$$

Чтобы убедиться в справедливости уравнения (15.103), рассмотрим i-ю составляющую уравнения (15.95), которую при помощи формул (15.91) можно записать в виде

$$\partial(\rho_1 v^i v^j)/\partial x^j + \partial(\rho_1 v^i)/\partial t + \partial p/\partial x^i = F^i + g^i, \tag{15.104}$$

или

$$\rho_1 \frac{\partial v^i}{\partial t} + \rho_1 v^j \frac{\partial v^i}{dx^j} + v^i \frac{\partial(\rho_1 v^j)}{\partial x^j} + v^i \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x^i} =$$

$$= F^i + g^i. \tag{15.105}$$

Временна́я же компонента уравнения (15.95), умноженная на v^i, имеет вид

$$v^i\partial(\rho_1 v^j)/\partial x^j + v^i\partial(\rho_1 - c^{-2}p)/\partial t = v^i(F^4 + g^4)/(ic). \tag{15.106}$$

Отсюда получаем вычитанием

$$\rho_1 \frac{\partial v^i}{\partial t} + \rho_1 v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{v^i}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} = F^i + g^i - \frac{v^i}{ic}(F^4 + g^4). \tag{15.107}$$

Поскольку $D/Dt + V^\alpha\partial/\partial x^\alpha$ и $\rho = \gamma\rho_{000}$, то (15.107) эквивалентно уравнению

$$\pi D\mathbf{v}/Dt = -\nabla p - (\mathbf{v}/c^2)\partial p/\partial t + \mathbf{F} + \mathbf{g} - \mathbf{v}(F^4 + g^4)/(ic). \tag{15.108}$$

И в этом случае левая часть уравнения записана в системе, движущейся с веществом, а поэтому и правую часть можно вычислять в сопутствующей системе (в которой, очевидно, $v = 0$). Тогда, как и ожидалось, получается уравнение (15.103), в котором $\mathbf{g}$ берется в сопутствующей системе отсчета и рассчитывается по формуле (14.121).

Удобно переписать уравнение (15.108) в другой форме, заменив g^α на $-\partial R^{\alpha\beta}/\partial x^\beta$ [см. формулу (14.120)]. Тогда получим

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla p + \left(\nabla\cdot \mathrm{P} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{\mathscr{F}}}{\partial t}\right) - \frac{\mathbf{v}}{c^2}\left(\frac{\partial E_R}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{\mathscr{F}}\right) =$$

$$= \mathbf{F} - \frac{\mathbf{v}}{c^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\mathbf{F}\right), \tag{15.109}$$

где скорость увеличения энергии вещества в расчете на единицу объема записана в виде $F^4 = -(\mathbf{v}\cdot\mathbf{F})/ic$. В уравнении (15.109) величины, относящиеся к полю излучения, могут находиться теперь в произвольной (лабораторной) системе отсчета. Последний член в левой части уравнения (15.109) получается из слагаемого $-\mathbf{v}g^4/ic$ в уравнении (15.108) и описывает скорость изменения собственной плотности вещества, обусловленного взаимодействием вещества с полем излучения. В большинстве исследований этот член опускается, и поэтому они не могут считаться до конца последовательными. Заметим далее, что если нас интересует описание лишь нерелятивистских течений, то член, даваемый F^4, имеет порядок v^2/c^2 по сравнению с **F** и поэтому его можно опустить. Аналогично если изучаются течения *вещества* (а не временна́я эволюция поля излучения), то соответствующее характерное время будет равно $\Delta t \sim \Delta x/v$, где v — скорость течения, и член с $\partial p/\partial t$ будет, очевидно, порядка v^2/c^2 по сравнению с ∇p и может быть опущен. Наконец, $E_R \sim p_R$, поэтому член $(v/c^2)\partial E_R/\partial t$ имеет порядок v^2/c^2 относительно $\nabla \cdot \mathbf{P}$, и его также можно опустить. *Все эти члены будут всюду в дальнейшем отбрасываться.*

УРАВНЕНИЯ В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

В большинстве работ по радиационной гидродинамике все уравнения записываются в инерциальной лабораторной системе. Покажем теперь (с точностью до членов порядка v/c), что уравнения, записанные в инерциальной и в сопутствующей системах отсчета, согласуются между собой. Это можно сделать, выразив величины, характеризующие поле излучения в инерциальной системе отсчета, через их аналоги в сопутствующей системе при помощи соотношения (14.124), из которого следует, что

$$E_R = E_R^0 + 2c^{-2}\mathbf{v}\cdot\vec{\mathscr{F}}^0, \qquad (15.110а)$$

$$\vec{\mathscr{F}} = \vec{\mathscr{F}}^0 + E_R^0\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot \mathrm{P}^0, \qquad (15.110б)$$

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}^0 + c^{-2}(\mathbf{v}\vec{\mathscr{F}}^0 + \vec{\mathscr{F}}^0\mathbf{v}). \qquad (15.110в)$$

Рассмотрим сперва уравнение движения (15.109), которое для сферически-симметричного течения в поле силы тяжести принимает вид

$$\rho\frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial t} + \frac{\partial p_R}{\partial r} + \frac{3p_R - E_R}{r} - \frac{v}{c^2}\left(\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial r} + \frac{2\mathscr{F}}{r}\right) = -\frac{G\mathscr{M}\rho}{r^2}, \qquad (15.111)$$

где было использовано выражение (1.43б) для $\nabla\cdot\mathrm{P}$. Чтобы получить уравнение с точностью до членов $O(v/c)$, необходимо использовать точные преобразования, описываемые формулами (15.110а) и (15.110в). С другой стороны, даже в пределе свободного течения $\mathscr{F}^0 \sim cE_R^0$ или cp_R^0. Поэтому ясно, что все члены с $\mathscr{F}$ в уравнении

(15.111) уже имеют порядок *по крайней мере* v/c (если вспомнить, что мы считаем $\Delta t \sim \Delta x/v$). Поэтому добавочные члены в (15.110б), содержащие v, дадут члены $O(v^2/c^2)$, и их можно опустить, так что будет достаточно положить $\mathscr{F} = \mathscr{F}^0$. Совершая в величинах, характеризующих поле излучения в инерциальной системе отсчета, указанные преобразования, в результате находим

$$\rho\frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial r} + \left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathscr{F}^0}{\partial t} + \frac{v}{c^2}\frac{\partial \mathscr{F}^0}{\partial r} + \frac{\partial p_R^0}{\partial r} + \right.$$
$$\left. + \frac{3p_R^0 - E_R^0}{r} + \frac{2\mathscr{F}^0}{c^2}\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\right)\right] = -\frac{G\mathscr{M}\rho}{r^2}. \qquad (15.112)$$

Упражнение 15.11. Проверить уравнение (15.112).

Если воспользоваться уравнением переноса (14.134б), записанным в сопутствующей системе, то *сумма членов, стоящих в квадратных скобках, сильно упрощается* и в результате находим

$$\rho Dv/Dt + \partial p/\partial r = -G\mathscr{M}\rho/r^2 + (4\pi/c)\int \chi_\nu^0 H_\nu^0 d\nu. \qquad (15.113)$$

Таким образом, выясняется, что *уравнение переноса в сопутствующей системе, выведенное в гл. 14, позволяет сводить друг к другу с точностью до членов порядка v/c уравнения движения в инерциальной и в сопутствующей системах отсчета.*

Рассмотрим теперь уравнение сохранения энергии в форме (15.28) (в пренебрежении теплопроводностью). Производная по времени берется от имеющейся в единице объема энергии, и к этой энергии нужно теперь добавить E_R. Оператор дивергенции действует на поток энергии, и к этому члену следует добавить $\vec{\mathscr{F}}$. Поэтому будем иметь

$$\partial(\rho e + \frac{1}{2}\rho v^2 + E_R)/\partial t + \nabla\cdot[(\rho e + \frac{1}{2}\rho v^2 +$$
$$+ p)\mathbf{v} + \vec{\mathscr{F}}] = \mathbf{v}\cdot\mathbf{F}. \qquad (15.114)$$

Чтобы получить уравнение энергии для газа, вычтем члены, описывающие механическую работу, которые получаются путем скалярного умножения уравнения движения (15.109) на $\mathbf{v}$. Заметим, что два члена, содержащие v/c^2, станут при этом порядка v^2/c^2. Такого же порядка и член $c^{-2}\mathbf{v}\cdot(\partial\vec{\mathscr{F}}/\partial t)$ на интервалах времени $\Delta t \sim \Delta x/v$.

Поэтому получаем

$$\rho\left[D\left(\frac{1}{2}v^2\right)/Dt\right] + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)p + \mathbf{v}\cdot(\nabla\cdot\mathrm{P}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{F}. \qquad (15.115)$$

Вычитая это уравнение из (15.114), находим

$$\partial(\rho e + E_R)/\partial t + \nabla\cdot(\rho e\mathbf{v} + \vec{\mathscr{F}}) + p(\nabla\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}\cdot(\nabla\cdot\mathrm{P}) = 0. \qquad (15.116)$$

С учетом (15.17) и (15.13) уравнение (15.116) приводится к виду

$$\rho(De/Dt) - (p/\rho)(D\rho/Dt) + [\partial E_R/\partial t + \nabla\cdot\vec{\mathscr{F}} - \mathbf{v}\cdot(\nabla\cdot\mathrm{P})] = 0. \qquad (15.117)$$

Ясно, что при переходе к сопутствующей системе отсчета необходимо использовать все три слагаемых в выражении (15.110б) для $\vec{\mathscr{F}}$. С другой стороны, очевидно, что вторые слагаемые в выражениях (15.110а) и (15.110в) на промежутках времени, характерных для течения жидкости, будут давать члены $O(v^2/c^2)$. Поэтому этими членами можно пренебречь. Вычислим теперь $\nabla\cdot\vec{\mathscr{F}} = \nabla\cdot(\vec{\mathscr{F}}^0 + E_R^0\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\mathrm{P}^0)$. Заметим, что для сферически-симметричного течения

$$\nabla\cdot(E_R^0\mathbf{v}) = E_R^0(\nabla\cdot\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\cdot\nabla)E_R^0 =$$

$$= v\,\frac{\partial E_R^0}{\partial r} + E_R^0\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r}\right), \qquad (15.118\text{а})$$

$$\nabla\cdot(v\cdot\mathrm{P}^0) = r^{-2}\partial(r^2 v p_R^0)/\partial r = v\partial p_R^0/\partial r + p_R^0(\partial v/\partial r + 2v/r). \qquad (15.118\text{б})$$

Кроме того,

$$v\cdot(\nabla\cdot\mathrm{P}^0) = v[\partial p_R^0/\partial r + (3p_R^0 - E_R^0)/r]. \qquad (15.118\text{в})$$

Поэтому, раскрывая выражение в квадратных скобках в уравнении (15.117) и пользуясь (14.134а), получаем

$$\frac{\partial E_R^0}{\partial t} + \frac{\partial\mathscr{F}^0}{\partial r} + \frac{2\mathscr{F}^0}{r} + v\,\frac{\partial E_R^0}{\partial r} + E_R^0\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r}\right) +$$

$$+ p_R^0\,\frac{\partial v}{\partial r} + (E_R^0 - p_R^0)\,\frac{v}{r} = \frac{\partial E_R^0}{\partial t} + v\,\frac{\partial E_R^0}{\partial r} + \frac{\partial\mathscr{F}^0}{\partial r} + \frac{2\mathscr{F}^0}{r} +$$

$$+ (E_R^0 + p_R^0)\,\frac{\partial v}{\partial r} + (3E_R^0 - p_R^0)\,\frac{v}{r} = 4\pi\int(\eta_\nu^0 - \chi_\nu^0 J_\nu^0)\,d\nu. \qquad (15.119)$$

Уравнение (15.117), таким образом, совпадает с уравнением энергии (15.97), записанным в сопутствующей системе отсчета.

Наконец, уравнения движения и энергии удобно объединить, написав полное уравнение энергии, из которого наглядно видно влияние импульса и энергии, которые излучение передает веществу. Пусть q_R — обусловленная излучением скорость приращения плотности энергии вещества, а $\mathbf{f}_R$ — сила в расчете на единицу объема, обусловленная действием излучения. Тогда из уравнений (15.97) и (15.13) будем иметь

$$\rho(De/Dt) + p(\nabla \cdot \mathbf{v}) = q_R. \qquad (15.120)$$

Скалярно умножая уравнение (15.103) на $\mathbf{v}$, получаем

$$\rho\left[D\left(\frac{1}{2}v^2\right)/Dt\right] + (\mathbf{v}\cdot\nabla)p = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{f} + \mathbf{f}_R). \qquad (15.121)$$

Складывая (15.120) и (15.121) и пользуясь (15.17), находим

$$\partial\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e\right)/\partial t + \nabla\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e + p\right)\mathbf{v}\right] =$$

$$= q_R + \mathbf{v}\cdot(\mathbf{f} + \mathbf{f}_R). \qquad (15.122)$$

Для *установившегося* ($\partial/\partial t = 0$) сферически-симметричного течения в обычном поле силы тяжести интегрирование уравнения (15.122) дает

$$4\pi r^2\rho v\left(\frac{1}{2}v^2 + e + p/\rho - G\mathscr{M}/r\right) +$$

$$+ 4\pi\int_r^\infty (q_R + \mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_R)r^2dr = E = \text{const}, \qquad (15.123)$$

что аналогично соотношению (15.59) с учетом радиативных членов. Для дальнейшего первую группу членов удобно обозначить через E_0, написав

$$E_0(r) + 4\pi\int_r^\infty (q_R + \mathbf{v}\cdot\mathbf{f}_R)r^2dr = E = \text{const}. \qquad (15.124)$$

15.4. Ветер, порождаемый излучением

Наблюдательные факты, собранные за последнее десятилетие, убедительно показали, что у всех звезд, лежащих на диаграмме Герцшпрунга — Рессела в области, соответствующей высоким тем-