

Тогда для выполнения условия адиабатичности требуется, чтобы $\Delta\omega(\rho)\tau_s = \eta(\rho) \gg 1$, т.е. *адиабатическими будут лишь столкновения с ρ , меньшими радиуса Вайскопфа*. В случае водорода $\Delta\omega_{ii}$ для столкновений с ионами очень мало, и практически для всего профиля справедливо статистическое приближение, а столкновения, вызывающие уширение, имеют ρ , меньшие радиуса Вайскопфа. Таким образом, ионное уширение будет адиабатическим. Для электронов верно прямо противоположное. Здесь $\Delta\omega_{ii}$ будет велико, и почти весь профиль описывается ударным приближением, причем прицельные расстояния больше радиуса Вайскопфа. Электронное уширение сильно неадиабатично (и потому должно описываться квантовой теорией). Когда условие адиабатичности нарушено, получаются гораздо большие значения параметра затухания, чем те, которые даются классической теорией. По этой причине современные квантовомеханические результаты часто совершенно непохожи на те, которые получались в ранних классических работах.

9.4. Уширение вследствие столкновений.

Статистическое приближение

Основная модель в этом приближении: излучающий атом находится в статистически флуктуирующем поле, создаваемом хаотически распределенными возмущающими частицами. Движение частиц не учитывается. Эта модель называется *квазистатическим* приближением. [Как мы увидим позже, это приближение хорошо для ионов (например, протонов), так как они движутся в плазме медленно.] То или иное конкретное распределение возмущающих частиц создает некоторое определенное поле. Относительная вероятность различных значений напряженности поля определяется тем, насколько часто осуществляются распределения частиц, создающие соответствующие напряженности. При заданной величине поля частота колебаний излучающего атома смещается на определенное $\Delta\omega$. Предполагается, что интенсивность излучения с таким $\Delta\omega$ пропорциональна статистической частоте, с которой встречается соответствующее поле. Поэтому центральной проблемой здесь является определение распределения вероятности значений возмущающих полей. Если оно известно, профиль линии можно рассчитать. В этом разделе мы ограничимся рассмотрением квазистатического уширения водородных линий, обусловленного линейным эффектом Штарка из-за взаимодействия атомов водорода с протонами (хотя излагаемая теория применима и к другим случаям).

ПРИБЛИЖЕНИЕ БЛИЖАЙШЕГО СОСЕДА

В качестве первого приближения предположим, что основное воздействие на излучающий атом производит *самое сильное* возмущение, действующее в каждый данный момент, а именно то, которое вызывается *ближайшим соседом*, и что влиянием всех других частиц можно пренебречь. Тогда, если $W(r)dr$ есть вероятность того, что ближайший сосед расположен на расстоянии от r до $r + dr$ от излучающего атома, то спектр его излучения определяется тем, что

$$I(\Delta\omega)d\Delta\omega \propto W(r)(dr/d\Delta\omega)d\Delta\omega, \quad (9.80)$$

причем здесь предполагается, что $\Delta\omega$ дается формулой (9.53), т.е. $\Delta\omega = C_p/r^p$.

Чтобы найти $W(r)$, рассчитаем вероятность того, что в интервале расстояний $(r, r + dr)$ частица есть, а на расстояниях, меньших r , ни одной частицы нет. Тогда, предполагая, что частицы распределены в пространстве равномерно, причем их концентрация равна N , для $W(r)$ получим следующее соотношение:

$$W(r)dr = [1 - \int_0^r W(x)dx] 4\pi r^2 N dr. \quad (9.81)$$

Здесь множитель $4\pi r^2 N dr$ — относительная вероятность того, что в оболочке, ограниченной сферами с радиусами r и $r + dr$, частица есть, а множитель в квадратных скобках — вероятность того, что в полость внутри этой оболочки ни одна частица не попала. Дифференцируя, находим

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{W(r)}{4\pi r^2 N} \right] = -4\pi r^2 N \frac{W(r)}{4\pi r^2 N}. \quad (9.82)$$

Отсюда, интегрируя и пользуясь условием нормировки, получаем

$$W(r) = 4\pi r^2 N \exp(-4\pi r^3 N/3). \quad (9.83)$$

Обычно в качестве *единицы измерения расстояний* принимают *среднее расстояние между частицами* $r_0 = (4\pi N/3)^{-1/3}$, на котором возмущающая частица вызывает так называемый *нормальный сдвиг частоты* $\Delta\omega_0 = C_p/r_0^p$. Тогда

$$\Delta\omega/\Delta\omega_0 = (r_0/r)^p \quad (9.84)$$

и выражение (9.83) можно переписать следующим образом:

$$W(r)dr = \exp[-(\Delta\omega_0/\Delta\omega)^{3/p}] d(\Delta\omega_0/\Delta\omega)^{3/p}. \quad (9.85)$$

В случае *линейного эффекта Штарка* возмущающее поле $F = e/r^2$. Если ввести *нормальную напряженность поля* F_0 , положив

$$F_0 = e/r_0^2 = e(4\pi N/3)^{2/3} = 2,5985eN^{2/3}, \quad (9.86)$$

и условиться измерять F в единицах F_0 (т.е. положить $\beta = F/F_0$), то приближение ближайшего соседа дает

$$W(\beta)d\beta = (3/2)\beta^{-3/2}\exp(-\beta^{-3/2})d\beta. \quad (9.87)$$

Видно, что при $\beta \rightarrow \infty$ имеем $W(\beta) \sim (3/2)\beta^{-3/2}$. Итак, статистическое приближение предсказывает, что в крыльях линии, расширенной за счет линейного эффекта Штарка, профиль должен убывать как $\Delta\omega^{-3/2}$ вопреки тому, что дает ударное приближение, согласно которому он пропорционален $\Delta\omega^{-2}$.

Основной недостаток изложенной теории заключается в том, что профиль, конечно, является результатом возмущений, оказываемых всеми частицами, а не только ближайшим соседом. Чтобы получить более точные результаты, нужно построить более аккуратную теорию.

ТЕОРИЯ ХОЛЬЦМАРКА

Влияние *совокупности* частиц на излучающий атом было изучено Хольцмарком [305], рассчитавшим суммарный вектор поля в том месте, где расположен излучающий атом. Этот вектор есть сумма векторов напряженности полей каждой из возмущающих частиц. Изящное изложение этого вопроса было дано Чандрасекаром [151]. За выводом приводимого нами результата следует обратиться к этой его работе.

Для взаимодействия вида $F = C_p/r^p$ теория дает

$$W(\beta) = (2\beta/\pi) \int_0^\infty \exp(-y^{3/p})y \sin \beta y dy. \quad (9.88)$$

Здесь $\beta = F/F_0$, причем нормальная напряженность поля определяется теперь следующим образом:

$$F_0 = \gamma C_p N^{p/3}, \quad (9.89)$$

где

$$\gamma = \{2\pi^2 p / [3(p+3)\Gamma(3/p)\sin(3\pi/2p)]\}^{p/3}. \quad (9.90)$$

В частности, для линейного эффекта Штарка $p = 2$, $C_p = e$, $\gamma = 2,6031$ и $F_0 = 2,6031eN^{2/3}$, что лишь несущественно отличается

от нормальной напряженности поля согласно приближению ближайшего соседа.

Интеграл в формуле (9.88) при $p = 2$ не выражается в конечном виде через известные функции, и $W(\beta)$ приходится представлять в виде разложений в ряды. При малых β

$$W(\beta) = \frac{4}{3\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \Gamma\left(\frac{4l+6}{3}\right) \frac{\beta^{2l+2}}{(2l+1)!}, \quad (9.91)$$

при $\beta \gg 1$ имеет место асимптотическое разложение

$$W(\beta) \approx 1,496\beta^{-5/2}(1 + 5,107\beta^{-3/2} + 14,43\beta^{-3} + \dots), \quad (9.92)$$

главный член которого, по существу, совпадает с тем, что дает приближение ближайшего соседа. Таблицы $W(\beta)$ даются в [151] и [629], стр. 28.

ДЕБАЕВСКОЕ ЭКРАНИРОВАНИЕ

И СНИЖЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ИОНИЗАЦИИ

При получении найденных выше распределений вероятностей *взаимодействия между возмущающими частицами* не учитывались. На самом же деле вероятность обнаружить частицу в объеме dV не равна просто NdV , а зависит также от величины *электростатического потенциала* ϕ в dV . Например, если в некоторой точке $\phi > 0$, то электроны будут стремиться сдвинуться к этой точке, ионы же будут стараться удалиться от нее. При $\phi < 0$ все будет наоборот. Следуя Эккеру [203], [204], [205], [206], эти эффекты можно схематически учесть, введя бoльцмановский множитель, зависящий от $\psi = e\phi/kT$. Для электронов и ионов напомним поэтому соответственно

$$n_e W_e dV = n_e \exp(\psi) dV \approx n_e (1 + \psi) dV \quad (9.93)$$

и

$$n_i W_i dV = n_i \exp(-Z_i \psi) dV \approx n_i (1 - Z_i \psi) dV, \quad (9.94)$$

где n_e и n_i — концентрации электронов и ионов, Z_i — заряд иона, и мы предположили, что $\psi \ll 1$. Поскольку в достаточно больших объемах плазма *электрически нейтральна*,

$$n_e = \sum Z_i n_i. \quad (9.95)$$

Вычислим теперь потенциал, создаваемый некоторым выбранным ионом при упрощающем предположении, что все частицы

можно считать размазанными по пространству с соответствующей эквивалентной плотностью заряда. Тогда для определения ϕ можно воспользоваться уравнением Пуассона

$$\nabla^2\phi = -4\pi e\rho, \quad (9.96)$$

где ρ дается формулой

$$e\rho = -en_e W_e + e \sum Z_i n_i W_i. \quad (9.97)$$

При учете (9.93) — (9.95) это выражение приводится к виду

$$e\rho = -e\psi(n_e + \sum Z_i^2 n_i). \quad (9.98)$$

Подставив (9.98) в (9.96), можем переписать уравнение Пуассона в виде $\nabla^2\phi = \phi/D^2$, где

$$D = (kT/4\pi e^2)^{1/2} (n_e + \sum Z_i^2 n_i)^{-1/2}. \quad (9.99)$$

Величина D называется *дебаевским радиусом*. Решая уравнение для ϕ , находим $\phi = r^{-1}(Ae^{-r/D} + Be^{r/D})$. Если потребовать, чтобы $\phi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, то получим $B = 0$. Далее, чтобы при $r \rightarrow 0$ наш потенциал переходил в потенциал изолированного иона, положим $A = Z_i e$. Итак, потенциал, создаваемый ионом, помещенным в плазму, равен

$$\phi(r) = Z_i e \exp(-r/D)/r. \quad (9.100)$$

Из формулы (9.100) видно, что вне сферы Дебая поле иона сильно экранировано и быстро спадает. Физически так происходит потому, что заряженная частица стремится в своей окрестности поляризовать плазму. Противоположно заряженные частицы, которые скапливаются вокруг нее, на больших расстояниях экранируют поле рассматриваемой частицы. Таким образом, дебаевский радиус устанавливает верхний предел: а) расстояний, на которых две заряженные частицы могут эффективно взаимодействовать, б) размеров областей, в пределах которых могут наблюдаться заметные отклонения от электрической нейтральности, и в) длин волн электромагнитного излучения, которое может распространяться через плазму без диссипации.

В большинстве астрофизических приложений можно считать, что плазма практически чисто водородная. Тогда $Z_i = 1$, $n_i = n_e$. Поэтому, подставляя в формулу (9.99) численные значения постоянных, находим

$$D = 4,8(T/n_e)^{1/2} \text{ см.} \quad (9.101)$$

Упражнение 9.5. Сравнить дебаевские радиусы а) в звездной атмосфере с $T = 10^4$ К, $n_e = 10^{14}$, б) в солнечной короне при $T = 10^6$ К, $n_e = 10^8$, в) в области H II ($T = 10^4$ К, $n_e = 10^2$).

Чтобы учесть влияние экранирования на $W(\beta)$, можно сделать очень простое предположение [205], [206], что поле возмущающей частицы не изменяется при $r \leq D$ и тождественно равно нулю при $r > D$. Тогда мы получим

$$W(\beta, \delta) = (2\beta\delta/\pi) \int_0^\infty e^{-\delta g(y)} y \sin(\delta^{1/2} \beta y) dy, \quad (9.102)$$

где

$$g(y) = (3/2)y^{1/2} \int_y^\infty (1 - z^{-1} \sin z) z^{-3/2} dz \quad (9.103)$$

и $\delta = 4\pi D^3 N/3$ — число частиц, содержащихся в сфере дебаевского радиуса. Естественно ожидать, что при $\delta \rightarrow \infty$ мы возвратимся к распределению Хольцмарка, т.е. $W(\beta, \infty) = W_H(\beta)$. С помощью формулы (9.102) можно показать, что при $\delta \rightarrow \infty$

$$W(\beta, \delta) = W_H(\beta) + \delta^{-1/2} F(\beta),$$

где $F(\beta)$ — некоторый сходящийся определенный интеграл. То, что при больших δ получается распределение Хольцмарка, видно и из асимптотического разложения

$$W(\beta, \delta) = 1,496\beta^{-5/2}(1 + 5,107\beta^{-3/2} - 6,12\delta^{-1/3}\beta^{-2} + \dots), \quad (9.104)$$

если сравнить его с формулой (9.92). В принципе при малых δ рассматриваемое приближение должно было бы непрерывным образом переходить в приближение ближайшего соседа, однако на самом деле при $\delta < 5$ оказываются нарушенными принятые предположения (в частности, то, что можно использовать усредненную плотность заряда). Графики $W(\beta, \delta)$ для нескольких значений δ представлены на рис. 9.1 вместе с распределениями по теории Хольцмарка и в приближении ближайшего соседа.

Способ учета взаимодействия между возмущающими частицами, описанный выше, является в некоторых отношениях излишне упрощенным. Очень точные расчеты распределений напряженностей поля, создаваемого возмущающими частицами, были выполнены при помощи методов групповых разложений [65], [472], [515] и численным интегрированием методом Монте-Карло [308], [309], [310], стр. 482. В исследованиях уширения водородных линий, вы-

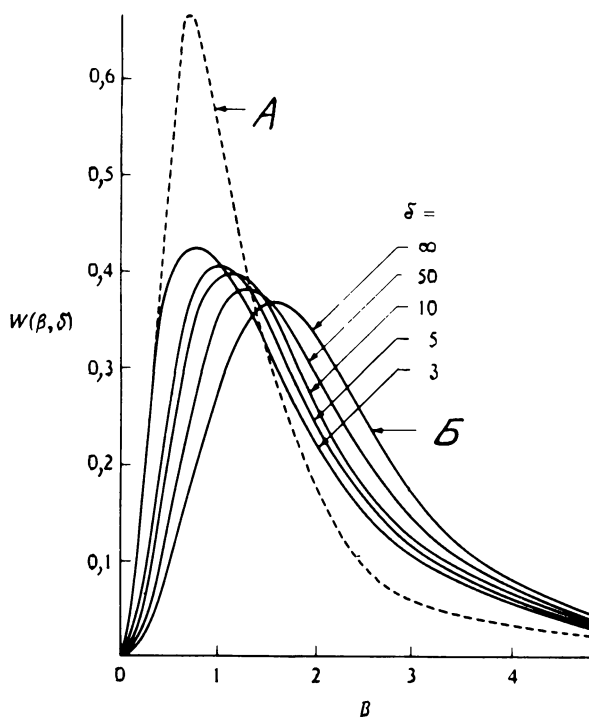


Рис. 9.1. Распределение вероятностей напряженности поля в пробной точке с учетом эффектов экранировки; δ — число заряженных частиц в пределах сферы Дебая; *A* — приближение ближайшего соседа; *B* — распределение Хольцмарка. По [205], с разрешения автора.

полненных в самое последнее время, используются эти точные функции распределения. На практике влияние экранирования часто очень существенно для лабораторной плазмы, тогда как в звездных атмосферах плотности настолько низки, что число частиц в сфере Дебая оказывается большим ($\delta > 100$), и отклонения от распределения Хольцмарка невелики.

Присутствие близких зарядов частично нейтрализует воздействие заряда ядра на связанные электроны в атоме. За счет этого уменьшается глубина потенциальной ямы, в которой находится связанный электрон. Поправку к энергии связи можно вычислить, пользуясь потенциалом (9.100), учитывающим дебаевское экранирование. Оказывается, что при $r \ll D$

$$\Delta E = (Ze^2/r)[\exp(-r/D) - 1] \approx -Ze^2/D. \quad (9.105)$$

Электрон, находящийся в состоянии, которое в невозмущенном

атоме лежит по энергии на $\Delta\chi$ ниже ионизационного предела, можно считать свободным, если $\Delta\chi \leq \Delta E$. Иначе говоря, энергия ионизации атома уменьшается на величину

$$\Delta\chi = Ze^2/D = (27,2Za_0/D) \text{ эВ} = 3 \cdot 10^{-8} Zn_e^{1/2} T^{-1/2} \text{ эВ}. \quad (9.106)$$

При выводе этого выражения была использована формула (9.101). Этот расчет $\Delta\chi$ является очень приближенным. Снижение потенциалов ионизации в плазме обсуждается с различных точек зрения в [178].

КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ УШИРЕНИЕ ВОДОРОДНЫХ ЛИНИЙ ИОНАМИ

Если никаких возмущающих полей нет, то каждый уровень атома водорода вырожден и состоит из $2n^2$ подуровней. В работах К. Шварцшильда [563] и Эпштейна [208] было показано, что если приложить электрическое поле, эти подуровни разделяются. Так как водород обладает ненулевым дипольным моментом, сдвиг по энергии прямо пропорционален напряженности приложенного поля F (*линейный эффект Штарка*). Если никаких других механизмов уширения нет, линия будет состоять из нескольких *штарковских компонент*, возникающих при переходах между подуровнями нижнего и верхнего состояний. Каждая штарковская компонента характеризуется определенной относительной интенсивностью I_k [561] и будет смещена от центра линии на величину

$$\Delta\lambda_k = (3h\lambda^2 nk/8\pi^2 cmeZ)F = C_k F, \quad (9.107)$$

где Z — заряд ядра атома (для водорода $Z = 1$) и n_k — некоторое целое число. Наблюдаемая линия будет представлять собой наложение этих компонент, взятых с весами, пропорциональными их относительным интенсивностям, и положениями, соответствующими вероятностям определенных сдвигов по оси длин волн.

Совокупность штарковских компонент водородной линии симметрична относительно центра линии, причем компоненты с номерами $\pm k$ идентичны, так что $I_{-k} = I_k$, $C_{-k} = C_k$ (см., например, [638], стр. 320; [629], стр. 73). Если предположить, что интенсивности нормированы таким образом, что $\sum I_k = 1$ (где сумма распространяется на все компоненты), то профиль линии будет

$$\begin{aligned} I(\Delta\lambda)d\Delta\lambda &= \sum I_k W(F_k/F_0)dF_k/F_0 = \\ &= \sum I_k W(\Delta\lambda/C_k F_0)d\Delta\lambda/C_k F_0. \end{aligned} \quad (9.108)$$

Обычно вводят параметр

$$\alpha \equiv \Delta\lambda/F_0, \quad (9.109)$$

где F_0 — нормальная напряженность поля: $F_0 = 2,60eN^{2/3}$. Тогда профиль линии описывается функцией $S(\alpha)$:

$$S(\alpha)d\alpha = \sum_k I_k W(\alpha/C_k)d\alpha/C_k, \quad (9.110)$$

которая нормирована на единицу в интервале изменения α от $-\infty$ до ∞ . Коэффициент поглощения в расчете на один атом можно записать в виде

$$\alpha_\nu(\Delta\lambda) = (\pi e^2/mc)fS(\Delta\lambda/F_0)(\lambda^2/cF_0). \quad (9.111)$$

Обширные таблицы C_k , I_k и $S(\alpha)$ для большого числа водородных линий приводятся в [634]. Наибольшее C_k растет с увеличением главного квантового числа верхнего уровня n как n^2 . Если вспомнить, что при $\beta \gg 1$ величина $W(\beta) \propto \beta^{-5/2}$, из формул (9.108) или (9.110) становится ясно, что штарковские ширины быстро увеличиваются при переходе к старшим членам серии (грубо говоря, как n^3).

Обсудим теперь, когда эти квазистатические профили можно применять. Пусть $\bar{n}_k = \sum n_k I_k / \sum I_k$, причем сумма берется только по положительным значениям k . Тогда, положив $\bar{\Delta\omega} = \bar{C}_2/r^2$ и $F = e/r^2$, из формулы (9.107) получим

$$\bar{C}_2 = 3h\bar{n}_k/4\pi m = 1,738\bar{n}_k, \quad (9.112)$$

причем $\bar{n}_k = n(n-1)/2$ при $n \gg 1$. Согласно формуле (9.78), величина смещения в шкале длин волн, которое разделяет области применимости ударного и статистического приближений, равна (при $p = 2$)

$$\Delta\lambda_W = v^2\lambda^2/2\pi^3c\bar{C}_2. \quad (9.113)$$

Заметим, что $\Delta\lambda_W \propto v^2$, и поэтому $\Delta\lambda_W$ (электронное) $\approx 10^3\Delta\lambda_W$ (протонное). Воспользовавшись формулами (9.112) и (9.50), получим результаты, приведенные в табл. 9.2. Очевидно, что уширение ионами очень хорошо описывается квазистатическим приближением (особенно если вспомнить, что в ядре линии решающую роль будут играть доплеровские смещения, обусловленные движением атомов). Электронное же уширение описывается ударным приближением (не считая области очень больших смещений от центра линии), причем, как отмечалось в §9.3, должна учитываться неадиабатичность. На полный профиль оказывают влияние как ионы, так

и электроны. Как будет показано в §9.5, последние дают значительный вклад в уширение линии. Использование функций $S(\alpha)$, учитывающих влияние одних только ионов, серьезно занижает ширины водородных линий. Удовлетворительное теоретическое описание профилей водородных линий в звездных спектрах стало возможным только после создания квантовомеханической теории уширения линий.

ТАБЛИЦА 9.2

Расстояние от центра линии $\Delta\lambda_{\mu}$ (в \AA), отделяющее области применимости статистического и ударного приближений для водородных линий

Линии	Возмущающие частицы	T, K	
		2,5 10^4	10^4
H_{α}	Электроны	580,0	230,0
	Протоны	0,63	0,25
H_{β}	Электроны	120,0	48,0
	Протоны	0,13	0,05
H_{γ}	Электроны	48,0	19,0
	Протоны	0,05	0,02
H_{δ}	Электроны	32,0	13,0
	Протоны	0,03	0,01

9.5. Квантовая теория уширения линий

Точный профиль линии с учетом эффектов давления дается квантовомеханическими расчетами. Разработка этой теории явилась большим шагом вперед в одной из наиболее важных (и трудных) областей применения атомной физики к анализу звездных спектров. Хорошие обзоры общей теории можно найти в [62], [63], [64], [73], гл. 13, [179], [264], гл. 4, [268], [582]. Здесь будет дано лишь краткое общее представление об этой теории. В центре внимания будет тот случай, когда уровни атома испытывают ударное уширение электронами и квазистатическое уширение ионами.

ПРОФИЛЬ ЛИНИИ

Как было показано в гл. 4, мощность, излучаемая *изолированным атомом* при переходе из верхнего состояния j в нижнее со-