Глава 1

УРАВНЕНИЕ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

1.0. Введение

Основные идеи, связывающие группу симметрии некоторого линейного дифференциального уравнения в частных производных и системы координат, в которых данное уравнение допускает решения с разделяющимися переменными, можно легко продемонстрировать на конкретных примерах. Наиболее простым нетривиальным примером, подходящим для этой цели, очевидно, является приведенное волновое уравнение, или уравнение Гельмгольца,

$$(\Delta_2 + \omega^2)\Psi(x, y) = 0, \tag{0.1}$$

где ω — некоторая вещественная положительная константа и

$$\Delta_2\Psi = \partial_{xx}\Psi + \partial_{yy}\Psi.$$

(Здесь $\partial_{xx}\Psi$ — частная производная второго порядка от Ψ по переменной x.)

В этой главе мы дадим подробный анализ группы симметрии уравнения (0.1), решений с разделяющимися переменными этого уравнения, а также уравнений, с ним связанных; в дальнейшем этот анализ будет служить нам основой в подобных исследованиях гораздо более сложных задач.

На данном этапе мы рассмотрим только такие решения Ψ уравнения (0.1), которые определены на некотором открытом связном множестве $\mathscr{D}$ плоскости R^2 и аналитичны относительно вещественных переменных x, y. (Здесь $\mathscr{D}$, например, можно выбрать так, чтобы оно совпадало с этой плоскостью.) Множество всех таких решений Ψ образует векторное (комплексное) пространство $\mathscr{F}_0$, т. е. если $\Psi \in \mathscr{F}_0$ и $a \in \mathbb{C}$, то $(a\Psi)(x, y) \equiv a\Psi(x, y) \in \mathscr{F}_0$, и если Ψ_1, $\Psi_2 \in \mathscr{F}_0$, то $(\Psi_1 + \Psi_2)(x, y) \equiv \Psi_1(x, y) + \Psi_2(x, y) \in \mathscr{F}_0$. Фиксируя $\mathscr{D}$ в нашем анализе, назовем $\mathscr{F}_0$ *пространством решений* уравнения (0.1).

Пусть $\mathscr{F}$ — векторное пространство всех комплекснозначных функций, определенных и вещественно-аналитических на $\mathscr{D}$, и пусть Q — дифференциальный оператор в частных производных:

$$Q = \Delta_2 + \omega^2, \tag{0.2}$$

определенный на $\mathscr{D}$. Ясно, что $Q\Phi \in \mathscr{F}$ при $\Phi \in \mathscr{F}$, а $\mathscr{F}_0$ — такое подпространство векторного пространства $\mathscr{F}$, которое является ядром, или нуль-пространством, линейного оператора Q.

1.1. Группа симметрии уравнения Гельмгольца

Известно, что если $\Psi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x, y)$, является некоторым решением уравнения (0.1), то $\Psi^{\wedge}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{a})$, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ — вещественный двумерный вектор, и $\Psi^{\wedge\wedge}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}O)$, где

$$O(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

также будут решениями этого уравнения. (Точку $\mathbf{x}$ следует выбирать так, чтобы $\mathbf{x} + \mathbf{a}$ и $\mathbf{x}O$ лежали в $\mathscr{D}$, с тем чтобы $\Psi^{\wedge}$ и $\Psi^{\wedge\wedge}$ имели смысл при вычислении их в точке $\mathbf{x}$.) Таким образом, переносы в рассматриваемой плоскости и повороты относительно начала координат отображают решения уравнения (0.1) в решения. Эти переносы и повороты порождают группу $E(2)$ — группу движений евклидовой полости, или *евклидову группу*, элементы которой суть движения фигуры как твердого тела в данной плоскости. Как мы покажем в дальнейшем, использование евклидовой симметрии уравнения (0.1) дает возможность просто доказать многие факты относительно решений уравнения Гельмгольца. Ниже мы дадим доказательство того, что уравнение (0.1) допускает евклидову группу движений, и покажем, что в определенном смысле $E(2)$ представляет собой максимальную группу симметрии этого уравнения.

Линейный дифференциальный оператор

$$L = X(\mathbf{x})\,\partial_x + Y(\mathbf{x})\,\partial_y + Z(\mathbf{x}), \qquad X,\ Y,\ Z \in \mathscr{F}, \tag{1.1}$$

называется *оператором симметрии* для уравнения Гельмгольца, если

$$[L, Q] = R(\mathbf{x})\,Q, \qquad R \in \mathscr{F}, \tag{1.2}$$

где $[L, Q] = LQ - QL$ — коммутатор операторов L и Q, а аналитическая функция $R = R_L$ зависит от L. Напомним, что Q — оператор (0.2). (Соотношение (1.2) означает, что оператор справа и оператор слева, будучи примененными к любой функции $\Phi \in \mathscr{F}$, дают один и тот же результат.)

Пусть $\mathscr{G}$ — множество всех операторов симметрии уравнения Гельмгольца.

Теорема 1.1. *Оператор симметрии L отображает решения уравнения* (0.1) *в решения, т. е. если $\Psi \in \mathscr{F}_0$, то $L\Psi \in \mathscr{F}_0$.*