определенный на $\mathscr{D}$. Ясно, что $Q\Phi \in \mathscr{F}$ при $\Phi \in \mathscr{F}$, а $\mathscr{F}_0$ — такое подпространство векторного пространства $\mathscr{F}$, которое является ядром, или нуль-пространством, линейного оператора Q.

1.1. Группа симметрии уравнения Гельмгольца

Известно, что если $\Psi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x, y)$, является некоторым решением уравнения (0.1), то $\Psi^{\wedge}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x} + \mathbf{a})$, где $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ — вещественный двумерный вектор, и $\Psi^{\wedge\wedge}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}O)$, где

$$O(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

также будут решениями этого уравнения. (Точку $\mathbf{x}$ следует выбирать так, чтобы $\mathbf{x} + \mathbf{a}$ и $\mathbf{x}O$ лежали в $\mathscr{D}$, с тем чтобы $\Psi^{\wedge}$ и $\Psi^{\wedge\wedge}$ имели смысл при вычислении их в точке $\mathbf{x}$.) Таким образом, переносы в рассматриваемой плоскости и повороты относительно начала координат отображают решения уравнения (0.1) в решения. Эти переносы и повороты порождают группу $E(2)$ — группу движений евклидовой полости, или *евклидову группу*, элементы которой суть движения фигуры как твердого тела в данной плоскости. Как мы покажем в дальнейшем, использование евклидовой симметрии уравнения (0.1) дает возможность просто доказать многие факты относительно решений уравнения Гельмгольца. Ниже мы дадим доказательство того, что уравнение (0.1) допускает евклидову группу движений, и покажем, что в определенном смысле $E(2)$ представляет собой максимальную группу симметрии этого уравнения.

Линейный дифференциальный оператор

$$L = X(\mathbf{x})\,\partial_x + Y(\mathbf{x})\,\partial_y + Z(\mathbf{x}), \qquad X,\ Y,\ Z \in \mathscr{F}, \tag{1.1}$$

называется *оператором симметрии* для уравнения Гельмгольца, если

$$[L, Q] = R(\mathbf{x})\,Q, \qquad R \in \mathscr{F}, \tag{1.2}$$

где $[L, Q] = LQ - QL$ — коммутатор операторов L и Q, а аналитическая функция $R = R_L$ зависит от L. Напомним, что Q — оператор (0.2). (Соотношение (1.2) означает, что оператор справа и оператор слева, будучи примененными к любой функции $\Phi \in \mathscr{F}$, дают один и тот же результат.)

Пусть $\mathscr{G}$ — множество всех операторов симметрии уравнения Гельмгольца.

Теорема 1.1. *Оператор симметрии L отображает решения уравнения* (0.1) *в решения, т. е. если $\Psi \in \mathscr{F}_0$, то $L\Psi \in \mathscr{F}_0$.*

Доказательство. Если $\Psi \in \mathcal{F}_0$, мы имеем $\Psi \in \mathcal{F}$ и $Q\Psi = 0$. В силу (1.2) $QL\Psi = LQ\Psi - RQ\Psi = 0$ и, следовательно, $L\Psi \in \mathcal{F}_0$. ■

Кроме того, нетрудно показать, что если некоторый оператор L вида (1.1) отображает решения Ψ уравнения $Q\Psi = 0$ в решения, то L удовлетворяет соотношению коммутирования (1.2) для некоторого $R \in \mathcal{F}$. (Однако неизвестно, будет ли справедливо это утверждение для произвольного линейного дифференциального уравнения второго порядка.)

Теорема 1.2. *Множество $\mathcal{G}$ операторов симметрии является комплексной алгеброй Ли, т. е. если $L_1, L_2 \in \mathcal{G}$, то*

(1) $a_1L_1 + a_2L_2 \in \mathcal{G}$ *для всех* $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$,

(2) $[L_1, L_2] \in \mathcal{G}$.

Доказательство. Поскольку $L_1, L_2 \in \mathcal{G}$, эти операторы удовлетворяют уравнениям $[L_j, Q] = R_j(\mathrm{x})Q$, где $R_j \in \mathcal{F}$, $j = 1, 2$. Простым вычислением можно показать, что оператор первого порядка $L = a_1L_1 + a_2L_2$ удовлетворяет соотношению (1.2) при $R = a_1R_1 + a_2R_2$. Подобным же образом оператор $L = [L_1, L_2]$ — оператор первого порядка, удовлетворяющий соотношению (1.2) при $R = \tilde{L}_1R_2 - \tilde{L}_2R_1$, где в соответствии с (1.1) $L = \tilde{L} + Z(\mathrm{x})$. ■

Замечание. Не исключено, что $\mathcal{G}$ может быть бесконечномерной алгеброй Ли, хотя в рассмотренном нами примере $\dim \mathcal{G} = 4$.

А теперь в явном виде вычислим алгебру симметрии уравнения (0.1). Подставляя (0.2) и (1.1) в (1.2) и вычисляя коммутатор, находим

$$2X_x\partial_{xx} + 2(X_y + Y_x)\partial_{xy} + 2Y_y\partial_{yy} + (X_{xx} + X_{yy} + 2Z_x)\partial_x + \\ + (Y_{xx} + Y_{yy} + 2Z_y)\partial_y + (Z_{xx} + Z_{yy}) = -R(\partial_{xx} + \partial_{yy} + \omega^2). \quad (1.3)$$

Чтобы это операторное уравнение было справедливо при применении к произвольной функции $\Phi \in \mathcal{F}$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при ∂_{xx}, ∂_{yy} и т. д. в обеих частях уравнения были одинаковы:

$$\begin{aligned} &(\text{а}) \quad 2X_x = -R = 2Y_y, && X_y + Y_x = 0, \\ &(\text{б}) \quad X_{xx} + X_{yy} + 2Z_x = 0, && Y_{xx} + Y_{yy} + 2Z_y = 0, \\ &(\text{в}) \quad Z_{xx} + Z_{yy} = -R\omega^2. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Из уравнений (1.4а) следует, что $X_x = Y_y$ и $X_y = -Y_x$. Следовательно, $X_{xx} + X_{yy} = Y_{xy} - Y_{xy} = 0$; подобным же образом $Y_{xx} + Y_{yy} = 0$. Сравнивая эти соотношения с уравнениями (1.4б), можно видеть, что $Z_x = Z_y = 0$, откуда $Z = \delta$ — константа. Из

(1.4в) вытекает, что $R=0$. Тогда из уравнений (1.4а) имеем $X=X(y)$, $Y=Y(x)$, причем $X'(y)=-Y'(x)$. Из последнего соотношения следует, что $X'=-Y'=\gamma\in\mathbb{C}$. Итак, общим решением уравнений (1.4) является

$$X=\alpha+\gamma y,\quad Y=\beta-\gamma x,\quad Z=\delta,\quad R=0, \tag{1.5}$$

и оператор симметрии L имеет вид

$$L=(\alpha+\gamma y)\,\partial_x+(\beta-\gamma x)\,\partial_y+\delta. \tag{1.6}$$

Ясно, что алгебра симметрии $\mathscr{G}$ четырехмерна и имеет базис

$$P_1=\partial_x,\quad P_2=\partial_y,\quad M=y\partial_x-x\partial_y,\quad E=1, \tag{1.7}$$

получаемый при $\alpha=1$ и $\beta=\gamma=\delta=0$ для P_1, $\beta=1$ и $\alpha=\gamma=\delta=0$ для P_2 и т. д. Легко проверить, что соотношениями коммутирования для этого базиса будут

$$[P_1,P_2]=0,\quad [M,P_1]=P_2,\quad [M,P_2]=-P_1 \tag{1.8}$$

и $[E,L]=0$ для всех $L\in\mathscr{G}$. Оператор симметрии E не представляет для нас никакого интереса, поэтому мы его не рассматриваем, а сосредоточим внимание на трехмерной алгебре Ли с базисом $\{P_1,P_2,M\}$ и соотношениями коммутирования (1.8). Кроме того, в силу некоторых соображений, смысл которых станет вскоре понятен, мы ограничимся рассмотрением *вещественной* алгебры Ли $\mathscr{E}(2)$ с базисом $\{P_1,P_2,M\}$, т. е. алгебры Ли, состоящей из всех элементов вида $\alpha P_1+\beta P_2+\gamma M$, где α, β, γ принадлежат полю вещественных чисел R. Алгебра $\mathscr{E}(2)$ изоморфна алгебре Ли евклидовой группы $E(2)$ плоскости R^2. Чтобы показать это, рассмотрим известную реализацию группы $E(2)$ как группы (3×3)-матриц. Элементы $E(2)$ имеют вид

$$g(\theta,a,b)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ a & b & 1\end{bmatrix},\qquad \begin{matrix}a,\ b\in R,\\ 0\leqslant\theta<2\pi\ (\mathrm{mod}\ 2\pi),\end{matrix} \tag{1.9}$$

а групповое произведение дается умножением матриц

$$g(\theta,a,b)\,g(\theta',a',b')=g(\theta+\theta',\ a\cos\theta'+b\sin\theta'+a',\\ -a\sin\theta'+b\cos\theta'+b'). \tag{1.10}$$

Группа $E(2)$ действует как группа преобразований в данной плоскости. В самом деле, элемент группы $g(\theta,a,b)$ отображает точку $\mathbf{x}=(x,y)$ в R^2 в точку

$$\mathbf{x}g=(x\cos\theta+y\sin\theta+a,\ -x\sin\theta+y\cos\theta+b). \tag{1.11}$$

Легко проверить, что $\mathbf{x}(g_1g_2) = (\mathbf{x}g_1)g_2$ для всех $\mathbf{x} \in R^2$, $g_1, g_2 \in E(2)$ и что $\mathbf{x}g(0, 0, 0) = \mathbf{x}$, где $g(0, 0, 0)$ — единичный элемент группы $E(2)$. Геометрически g соответствует повороту на угол θ по часовой стрелке относительно начала координат $(0, 0)$ с последующим переносом на (a, b).

Вычисляя алгебру Ли матричной группы $E(2)$ обычным способом (см. приложение А), находим, что базис для данной алгебры Ли задается матрицами

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.12}$$

с соотношениями коммутирования, тождественными (1.8). (Здесь коммутатор $[A, B]$ двух $(n \times n)$-матриц является *матричным коммутатором* $[A, B] = AB - BA$.) Следовательно, алгебра симметрии $\mathscr{E}(2)$ изоморфна алгебре Ли группы $E(2)$.

Из алгебры Ли с базисом (1.12), применяя экспоненциальное отображение, можно построить общий элемент группы (1.9). В самом деле, легко показать, что

$$g(\theta, a, b) = \exp(\theta M) \exp(aP_1 + bP_2), \tag{1.13}$$

где

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1} A^k, \quad A^0 = E_n, \tag{1.14}$$

для любой $(n \times n)$-матрицы A (здесь E_n — единичная $(n \times n)$-матрица).

Используя классические результаты теории алгебр Ли (см. приложение А), можно действие $\mathscr{E}(2)$ на $\mathscr{F}$, задаваемое соотношениями (1.7), расширить до локального представления $\mathbf{T}$ группы $E(2)$ на $\mathscr{F}$. Так, из теоремы А.3 мы получаем операторы $\mathbf{T}(g)$, где

$$\begin{aligned} &\mathbf{T}(g(0, a, 0))\Phi(\mathbf{x}) = \exp(aP_1)\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x + a, y), \\ &\mathbf{T}(g(0, 0, b))\Phi(\mathbf{x}) = \exp(bP_2)\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x, y + b), \\ &\mathbf{T}(g(\theta, 0, 0))\Phi(\mathbf{x}) = \exp(\theta M)\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x\cos\theta + y\sin\theta, \\ &\qquad\qquad - x\sin\theta + y\cos\theta) \end{aligned} \tag{1.15}$$

и $\Phi \in \mathscr{F}$. По аналогии с (1.13) общий оператор $\mathbf{T}(g)$ определяется так:

$$\mathbf{T}(g(\theta, a, b))\Phi(\mathbf{x}) = \exp(\theta M)\exp(aP_1)\exp(bP_2)\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}g), \tag{1.16}$$

где точка $\mathbf{x}g$ задается соотношением (1.11). Итак, преобразование (1.11), определяемое элементом группы $E(2)$ как группы

преобразований, в точности совпадает с преобразованием, индуцируемым производными Ли в (1.7). (Напомним, что если L — некоторая производная Ли, то по определению мы имеем

$$\exp(aL)\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} (a^k/k!) L^k \Phi(\mathbf{x}), \qquad \Phi \in \mathcal{F}; \tag{1.17}$$

см. (A.8).)

Следствием фундаментальных результатов теории алгебр Ли является тот факт, что для операторов $\mathbf{T}(g)$ выполняется свойство гомоморфизма

$$\mathbf{T}(gg') = \mathbf{T}(g)\mathbf{T}(g'), \qquad g,\ g' \in E(2); \tag{1.18}$$

впрочем, недоверчивый читатель может проверить это непосредственно. Применение формул (1.16), (1.18) требует определенной осторожности, так как для пары $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$, $g \in E(2)$ элемент $\mathbf{x}g$ может и не лежать в $\mathcal{D}$ и, следовательно, функция $\Phi(\mathbf{x}g)$ не будет определена. При фиксированном же $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ элемент $\mathbf{x}g$ будет лежать в $\mathcal{D}$ при условии, что g находится в достаточно малой окрестности единичного элемента $g(0, 0, 0)$ группы $E(2)$. Следовательно, формулы (1.16) и (1.18) справедливы только локально.

Если L — оператор симметрии первого порядка уравнения Гельмгольца, т. е. L отображает решения в решения, то L^k также отображает решения в решения для каждого $k = 2, 3, 4, \ldots$. Кроме того, из (1.17) видно, что оператор $\exp(aL)$ также отображает решения в решения. Поскольку операторы $\mathbf{T}(g)$ состоят из произведений выражений вида $\exp(aL)$, $L \in \mathcal{E}(2)$, можно сделать вывод, что если $\Psi(\mathbf{x})$ — аналитическое решение уравнения $Q\Psi = 0$, то $\Psi'(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(g)\Psi(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}g)$ также будет аналитическим решением в области, которая является открытым множеством, состоящим из всех таких $\mathbf{x} \in R^2$, что $\mathbf{x}g \in \mathcal{D}$. (Если $\mathcal{D} = R^2$, то операторы $\mathbf{T}(g)$ будут определены глобально, и в этом случае определение области существования не требуется.) Основываясь на этих замечаниях, назовем $E(2)$ *группой симметрии* уравнения $Q\Psi = 0$.

Теперь легко видеть, почему мы ограничиваемся рассмотрением вещественной алгебры Ли с базисом P_1, P_2, M. Экспонента какого-либо элемента комплексной алгебры Ли, скажем iP_1, где $i = \sqrt{-1}$, является оператором симметрии уравнения Гельмгольца, но тем не менее $\exp(iP_1)\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x + i, y)$, и мы получаем функцию, которая не определена для произвольной функции $\Phi \in \mathcal{F}$, поскольку Φ определено лишь для вещественных значений x и y. Итак, мы рассматриваем только такую алгебру Ли, экспоненты элементов которой таковы, что имеет место формула (1.16).

Аналогично тому, как мы определили операторы симметрии первого порядка для уравнения Гельмгольца, можно определить операторы симметрии второго порядка. Оператор второго порядка

$$S = A_{11}\partial_{xx} + A_{12}\partial_{xy} + A_{22}\partial_{yy} + B_1\partial_x + B_2\partial_y + C, \quad A_{jk},\ B_j,\ C \in \mathcal{F}, \tag{1.19}$$

называется *оператором симметрии* уравнения (0.1), если

$$[S, Q] = U(\mathbf{x})Q, \tag{1.20}$$

где $U(\mathbf{x})$ — дифференциальный оператор первого порядка

$$U = H_1(\mathbf{x})\partial_x + H_2(\mathbf{x})\partial_y + J(\mathbf{x}), \qquad H_j,\ J \in \mathcal{F}. \tag{1.21}$$

(Здесь U может зависеть от S.) Рассмотрим оператор симметрии первого порядка L как частный случай оператора симметрии второго порядка. При $S = L$ уравнение (1.20) выполняется, если $H_1 = H_2 = 0$. Поскольку коммутатор операторов второго порядка является оператором порядка $\leqslant 3$, мы требуем, чтобы U был оператором первого порядка.

Следующая теорема доказывается так же, как теорема 1.1.

Теорема 1.3. *Оператор симметрии второго порядка S отображает решения уравнения* (0.1) *в решения, т. е. если $\Psi \in \mathcal{F}_0$, то $S\Psi \in \mathcal{F}_0$.*

Нетрудно доказать, что если оператор S в (1.19) отображает решения Ψ уравнения $Q\Psi = 0$ в решения, то S удовлетворяет соотношению коммутирования (1.20) для некоторого U вида (1.21).

Пусть $\mathcal{S}$ будет векторным пространством всех операторов симметрии второго порядка S. Ясно, что $\mathcal{S}$ содержит алгебру симметрии первого порядка $\mathcal{G}$. Однако $\mathcal{S}$ не является алгеброй Ли при обычном определении оператора коммутирования, поскольку коммутатор $[S, S']$ двух операторов симметрии второго порядка, вообще говоря, является оператором третьего порядка и, следовательно, не является элементом векторного пространства $\mathcal{S}$. (Заметим, что $[S, S']$ все еще отображает решения в решения.)

Среди элементов векторного пространства $\mathcal{S}$ содержатся все операторы вида RQ, где R — произвольный элемент пространства $\mathcal{F}$. Действительно, оператор $S = RQ$ удовлетворяет соотношению (1.20), где $U = [R, Q]$ — дифференциальный оператор первого порядка. Можно непосредственно проверить, что RQ отображает решения Ψ уравнения $Q\Psi = 0$ в решения же. Поскольку $(RQ)\Psi = R(Q\Psi) = 0$, решение Ψ отображается в

решение, тождественно равное нулю. Итак, операторы RQ являются симметриями тривиального вида и действуют как нулевой оператор в пространстве решений $\mathcal{F}_0$.

Множество всех тривиальных симметрий $\mathfrak{q} = \{RQ\colon R \in \mathcal{F}\}$ образует подпространство векторного пространства $\mathcal{S}$, и каждый элемент $\mathfrak{q}$ действует как нулевой оператор на $\mathcal{F}_0$. Впредь мы будем игнорировать это подпространство $\mathfrak{q}$ и будем рассматривать факторпространство нетривиальных симметрий $\mathcal{S}/\mathfrak{q}$. Итак, будем считать две симметрии S, S' в $\mathcal{S}$ тождественными ($S \equiv S'$), если $S' = S + RQ$ для некоторого $R \in \mathcal{F}$. Если S задается формулой (1.19), то $S \equiv S'$, где $S' = S - A_{22}Q$, и, следовательно, коэффициент при ∂_{yy} в выражении для S' равен нулю. Поэтому все симметрии S эквивалентны симметриям S', у которых коэффициенты при ∂_{yy} равны нулю. (Заметим, что операторы S и S' совпадают на пространстве решений $\mathcal{F}_0$.) Кроме того, два оператора S_1, S_2, у которых коэффициенты при ∂_{yy} равны нулю, совпадают на $\mathcal{F}_0$ тогда и только тогда, когда остальные их коэффициенты тождественны.

Вычисление всех нетривиальных симметрий выполняется просто. Подставляем выражения (1.19) (при $A_{22} = 0$) и (1.21) в формулу (1.20) и в полученном соотношении приравниваем коэффициенты при различных частных производных по x и y в правой и левой частях. В результате получаем уравнения, аналогичные (1.3) и (1.4), но более сложные. Здесь мы представляем только результаты нашего вычисления.

Факторпространство $\mathcal{S}/\mathfrak{q}$ представляет собой девятимерное комплексное векторное пространство с базисом

$$\begin{aligned} &(\text{а})\quad P_1,\ P_2,\ M,\ E,\\ &(\text{б})\quad P_1^2,\ P_1P_2,\ M^2,\ \{M,\ P_1\},\ \{M,\ P_2\}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Здесь $\{A, B\} = AB + BA$, где A, B — операторы на $\mathcal{F}$. Заметим, что если A и B — операторы симметрии первого порядка, то произведения AB и BA будут операторами симметрии второго порядка. Из (1.22) видно, что уравнение Гельмгольца допускает только эти нетривиальные симметрии и никаких иных, т. е. все операторы симметрии второго порядка являются квадратичными многочленами от элементов множества $\mathcal{G}$. (В действительности можно показать, что операторы нетривиальных симметрий любого порядка являются многочленами от элементов множества $\mathcal{G}$, но в этом нет никакой необходимости.) Вообще говоря, если $Q\Psi = 0$ — дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, у которого все нетривиальные операторы симметрии второго порядка являются квадратичными многочленами от элементов алгебры симметрии первого порядка $\mathcal{G}$, то мы называем такое уравнение *уравне-*

нием класса I. Если существует некоторый нетривиальный оператор симметрии второго порядка, который не может быть представлен квадратичным многочленом от операторов симметрии первого порядка, то такое уравнение называется *уравнением класса* II. На основании (1.22) можно сделать вывод, что уравнение Гельмгольца является уравнением класса I.

А теперь несколько замечаний относительно символа $\{\cdot, \cdot\}$. Рассмотрим оператор симметрии второго порядка MP_1. Заметим, что

$$MP_1 = {}^1/_2(MP_1 + P_1M) + {}^1/_2(MP_1 - P_1M) = {}^1/_2\{M, P_1\} + {}^1/_2[M, P_1].$$

Итак, мы представили MP_1 в виде суммы оператора в точности второго (не первого) порядка ${}^1/_2\{M, P_1\}$ и оператора первого порядка ${}^1/_2[M, P_1] = {}^1/_2P_2$. Аналогичным образом любое произведение AB элементов алгебры $\mathscr{E}(2)$ можно однозначно представить в виде суммы симметризованной части чисто второго порядка ${}^1/_2\{A, B\}$ и коммутатора ${}^1/_2[A, B]$, принадлежащего алгебре $\mathscr{E}(2)$. В (1.22а) дан базис для операторов первого порядка в $\mathscr{P}/\mathfrak{q}$, в (1.22б) — базис для подпространства операторов чисто второго порядка.

Чтобы подойти к пятимерному пространству, натянутому на базис (1.22б), с другой точки зрения, рассмотрим пространство $\mathscr{E}(2)^{(2)}$ симметризованных операторов второго порядка из алгебры $\mathscr{E}(2)$. Базис этого шестимерного пространства состоит из пяти операторов, указанных в (1.22б), и оператора P_2^2. Однако на $\mathscr{F}_0$ оператор $P_1^2 + P_2^2 \in \mathscr{E}(2)^{(2)}$ совпадает с оператором $-\omega^2$, т. е. является оператором умножения на постоянную $-\omega^2$. Итак, для того чтобы охарактеризовать элементы пространства $\mathscr{E}(2)^{(2)}$, действие которых на $\mathscr{F}_0$ отлично от указанного, нужно перейти к факторпространству $\mathscr{E}(2)^{(2)}/\{P_1^2 + P_2^2\}$, где $\{P_1^2 + P_2^2\}$ — подпространство пространства $\mathscr{E}(2)^{(2)}$, состоящее из всех элементов вида $a(P_1^2 + P_2^2)$, $a \in R$. Мы поступает так потому, что два оператора S_1, S_2 в $\mathscr{E}(2)^{(2)}$, такие, что $S_1 - S_2 = a(P_1^2 + P_2^2)$, имеют на $\mathscr{F}_0$ одни и те же собственные функции с соответствующими собственными значениями, отличающимися на величину $a\omega^2$.

До сих пор мы рассматривали $\mathscr{P}/\mathfrak{q}$ как пространство всех *комплексных* линейных комбинаций базисных операторов (1.22). А теперь покажем, что для описания связи между операторами симметрии и разделением переменных для вещественного уравнения Гельмгольца достаточно рассмотреть только *вещественные* линейные комбинации базисных операторов (1.22). Чтобы не вводить новый символ для обозначения вещественного девятимерного векторного пространства, мы сохраним символ $\mathscr{P}/\mathfrak{q}$, но теперь будем считать, что это векторное пространство определено над R, а не над $\mathbb{C}$.

Учитывая это замечание, мы видим, что пятимерное подпространство операторов чисто второго порядка в $\mathcal{P}/\mathfrak{q}$ изоморфно факторпространству $\mathcal{E}(2)^{(2)}/\{P_1^2+P_2^2\}$, т. е. мы можем отождествить операторы симметрии чисто второго порядка уравнения Гельмгольца с элементами чисто второго порядка в универсальной обертывающей алгебре алгебры $\mathcal{E}(2)$ по модулю центра этой обертывающей алгебры. Такая точка зрения будет использована при изучении орбит в разд. 1.2.

1.2. Разделение переменных для уравнения Гельмгольца

Метод разделения переменных для решения уравнений в частных производных, который легко продемонстрировать при решении некоторых важных задач, в общем виде оказывается весьма тонким, и описать его довольно трудно. Поэтому мы начнем с наиболее простых случаев, а затем постепенно перейдем к случаям, все более и более сложным.

Пока мы удовлетворимся несколько расплывчатым определением, утверждающим, что метод разделения переменных — это метод нахождения решений некоторого уравнения второго порядка в частных производных с n переменными, который состоит в сведении этого уравнения к некоторой системе из n (самое большее) обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Будем искать решения уравнения (0.1) в виде $\Psi(x, y) = X(x)Y(y)$. Тогда уравнение Гельмгольца примет вид

$$X''Y + XY'' + \omega^2 XY = 0, \tag{2.1}$$

где штрих означает дифференцирование. Это уравнение можно записать в следующем виде:

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \omega^2, \tag{2.2}$$

где левая часть — функция только от x, а правая — функция только от y. (Следовательно, в (2.2) декартовы координаты x, y разделяются.) Это возможно лишь в том случае, когда обе части нашего уравнения равны некоторой константе $-k^2$, называемой *константой разделения*. Таким образом, уравнение (2.2) эквивалентно двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$X''(x) + k^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + (\omega^2 - k^2) Y(y) = 0. \tag{2.3}$$

Базисом решений первого уравнения (2.3) является $X_1 = e^{ikx}$, $X_2 = e^{-ikx}$ при $k \neq 0$, базисом решений второго уравнения яв-